

---

# INTRODUCTION À LA GÉOMÉTRIE TROPICALE

*par*

Ilia Itenberg

---

## 1. Introduction

Ce texte est une introduction à la géométrie tropicale, un nouveau domaine de mathématiques qui a connu un progrès spectaculaire durant les huit dernières années. La géométrie tropicale a des liens multiples et profonds avec de nombreuses branches des mathématiques, tant en mathématiques pures qu'en mathématiques appliquées. On peut citer, par exemple, la géométrie algébrique, la géométrie symplectique, l'analyse complexe, les systèmes dynamiques, la logique, la combinatoire, le calcul formel, et les modèles statistiques (cette liste est, bien sûr, loin d'être exhaustive). Des objets tropicaux apparaissent aussi dans la cristallographie et la biologie quantitative.

Les racines de la géométrie tropicale remontent au moins au travail de G. Bergman [1] sur les ensembles limites logarithmiques au début des années 1970. L'essor actuel de la géométrie tropicale est principalement dû à M. Kapranov, M. Kontsevich, G. Mikhalkin, O. Viro et B. Sturmfels.

En géométrie tropicale, les objets algébro-géométriques sont remplacés par des objets affines par morceaux. Par exemple, les courbes tropicales planes sont des graphes rectilignes dont les arêtes ont des pentes rationnelles. Nous allons présenter les notions de base et les premiers résultats de la géométrie tropicale, en nous concentrant principalement sur les courbes tropicales dans le plan.

## 2. Semi-corps tropical

**2.1. Opérations tropicales.** Un rôle très important dans la suite sera joué par le *semi-corps tropical*  $\mathbb{R}_{\text{trop}}$ . Il s'agit de l'ensemble  $\mathbb{R}$  équipé des deux opérations  $\oplus$  et  $\odot$  définies de la façon suivante :

$$a \oplus b = \max\{a, b\} \quad \text{et} \quad a \odot b = a + b \quad (\text{pour tous } a \text{ et } b \text{ dans } \mathbb{R}).$$

Les opérations  $\oplus$  et  $\odot$  s'appellent l'*addition tropicale* et la *multiplication tropicale*, respectivement. L'ensemble  $\mathbb{R}$  muni de ces deux opérations n'est pas un corps (par exemple, l'opération  $\oplus$  n'a pas d'élément neutre), mais un *semi-corps*. Ceci signifie que  $(\mathbb{R}, \oplus)$  est un semi-groupe commutatif,  $(\mathbb{R}, \odot)$  est un groupe commutatif (avec 0 pour élément neutre), et l'opération  $\odot$  est distributive par rapport à l'opération  $\oplus$  :

$$a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c) \quad (\text{pour tous } a, b \text{ et } c \text{ dans } \mathbb{R}).$$

L'ensemble  $\mathbb{R}$  muni des opérations  $\oplus$  et  $\odot$  s'appelle le *semi-corps tropical* et est noté  $\mathbb{R}_{\text{trop}}$ . Dans  $\mathbb{R}_{\text{trop}}$ , on peut additionner, multiplier et diviser, mais on ne peut pas soustraire. Le nom *tropical* a été donné à ce semi-corps par des informaticiens français en l'honneur du travail pionnier de leur collègue brésilien Imre Simon sur le semi-anneau max-plus.

## 2.2. Déquantification des nombres réels strictement positifs

Il est important de remarquer que les opérations tropicales peuvent être vues comme opérations limites sous une certaine déformation de l'addition et la multiplication habituelles.

Considérons une famille de semi-corps  $\{S_h\}$ ,  $h \in [0, +\infty)$ . Comme ensemble, chaque semi-corps  $S_h$  coïncide avec  $\mathbb{R}$ . Les opérations d'addition et multiplication dans  $S_h$  sont définies de la manière suivante :

$$a \oplus_h b = \begin{cases} h \ln(\exp(a/h) + \exp(b/h)) & \text{si } h \neq 0, \\ \max\{a, b\}, & \text{si } h = 0; \end{cases}$$

$$a \odot_h b = a + b.$$

Ces opérations dépendent de  $h$  de façon continue. Pour toute valeur non nulle de  $h$ , le semi-corps  $S_h$  est isomorphe au semi-corps  $\mathbb{R}_+^*$  des nombres réels strictement positifs (munis des opérations habituelles d'addition et multiplication) : l'application  $x \mapsto h \ln x$  effectue un

isomorphisme entre  $\mathbb{R}_+^*$  et  $S_h$ . Par contre,  $S_0$  coïncide avec  $\mathbb{R}_{\text{trop}}$  et n'est pas isomorphe à  $\mathbb{R}_+^*$ .

Le passage de valeurs non nulles de  $h$  à la valeur 0 dans la famille  $\{S_h\}$  s'appelle la *déquantification de Maslov des nombres réels strictement positifs* (voir [13] et [14]). Des déformations similaires sont connues dans plusieurs domaines des mathématiques. Comme il a été remarqué par O. Viro [31], la déquantification de Maslov est directement liée au patchwork, la méthode de construction de variétés algébriques réelles proposée par Viro il y a une trentaine d'années (voir [29, 30] et [23]). La déquantification de Maslov est aussi directement liée au passage à la « *large complex limit* » (voir [12]) qui fait dégénérer une structure complexe sur une variété. Toutes ces déformations fournissent un lien très important entre la géométrie algébrique et la géométrie des complexes polyédraux.

### 3. Courbes tropicales dans $\mathbb{R}^2$

**3.1. Polynômes tropicaux.** Nous allons maintenant faire une brève description de la géométrie algébrique sur le semi-corps tropical  $\mathbb{R}_{\text{trop}}$ . Cette description est limitée au cas des courbes tropicales dans  $\mathbb{R}^2$  et est orientée vers les problèmes énumératifs présentés dans le texte d'E. Brugallé (ce volume). On renvoie à [20, 9] pour une information plus complète sur les variétés tropicales.

Soit

$$p(x, y) = \sum_{(k, \ell) \in \Lambda_p} a_{k, \ell} x^k y^\ell$$

un polynôme (de Laurent) à deux variables et à coefficients réels (ici  $\Lambda_p$  est une collection finie de points ayant des coordonnées entières dans  $\mathbb{R}^2$ ). Si on considère  $p$  comme *polynôme tropical* (c'est-à-dire, si on remplace dans ce polynôme l'addition et la multiplication habituelles par leurs analogues tropicales), on obtient une fonction convexe affine par morceaux

$$f_p(x, y) = \max_{(k, \ell) \in \Lambda_p} \{a_{k, \ell} + kx + \ell y\}.$$

Cette fonction est définie sur  $\mathbb{R}^2$  et prend ses valeurs dans  $\mathbb{R}$  (en fait, pour être plus précis, on peut dire que cette fonction est définie sur  $(\mathbb{R}_{\text{trop}})^2$  et prend ses valeurs dans  $\mathbb{R}_{\text{trop}}$ ). La fonction  $f_p$  s'appelle

la *transformée de Legendre* de la fonction  $\nu_p : \Lambda_p \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $\nu_p(k, \ell) = -a_{k, \ell}$ , pour tout  $(k, \ell) \in \Lambda_p$ .

Pour introduire la courbe tropicale définie par notre polynôme tropical, considérons le *lieu des coins*  $T_p$  de la fonction  $f_p$  : le sous-ensemble  $T_p$  de  $\mathbb{R}^2$  est formé par les points où la fonction  $f_p$  n'est pas localement affine. Le graphe  $\Gamma_p$  de la fonction  $f_p$  est une surface polyédrale dans  $\mathbb{R}^3$ . En projetant sur  $\mathbb{R}^2$  la réunion des sommets et des arêtes de  $\Gamma_p$ , on obtient  $T_p$ . L'ensemble  $T_p$  contient un nombre fini de *sommets* (qui sont les images des sommets de  $\Gamma_p$ ) et un nombre fini d'*arêtes* (qui sont les images des arêtes de  $\Gamma_p$ ). Si  $T_p$  n'est pas une droite, chaque arête de  $T_p$  est soit un segment reliant deux sommets, soit une demi-droite ayant un sommet pour extrémité. Dans le deuxième cas, on dit que l'arête en question est un *bout* de  $T_p$ .

**Exemple 3.1.** Soit  $p(x, y) = a \odot x \oplus b \odot y \oplus c$  un polynôme tropical de degré 1. L'ensemble  $T_p$  associé à  $p$  est la réunion de trois demi-droites qui ont la même extrémité. Les directions des trois bouts de  $T_p$  sont, respectivement, sud, ouest et nord-est (voir la figure 1). Dans ce cas particulier, une modification des coefficients de  $p$  résulte en translation de  $T_p$ . L'extrémité commune des trois arêtes de  $T_p$  est le point  $(c - a, c - b)$ .

**Exemple 3.2.** Le polynôme  $p(x, y) = x$  produit la fonction affine  $f_p : (x, y) \mapsto 1 + x$  (et pas la fonction  $(x, y) \mapsto x$ ), car, du point de vue tropical, on a  $p(x, y) = 1 \odot x$ . Dans ce cas, l'ensemble  $T_p$  est vide.

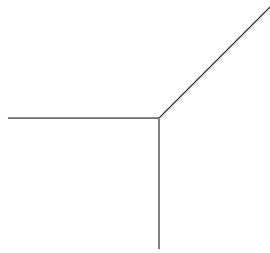


FIGURE 1. Une droite tropicale

Chaque arête de l'ensemble  $T_p$  associé à un polynôme tropical

$$p(x, y) = \bigoplus_{(k, \ell) \in \Lambda_p} a_{k, \ell} \odot x^{\odot k} y^{\odot \ell}$$

(ici  $x^{\odot k}$  et  $y^{\odot \ell}$  sont la  $k$ -ème puissance tropicale de  $x$  et la  $\ell$ -ème puissance tropicale de  $y$ , respectivement) peut être munie d'un entier strictement positif de la façon suivante. Soit  $\sigma$  une arête de  $T_p$ . Notons  $\hat{\sigma}$  l'arête de  $\Gamma_p$  telle que la projection de  $\hat{\sigma}$  coïncide avec  $\sigma$ . L'arête  $\hat{\sigma}$  est adjacente à deux faces de  $\Gamma_p$  contenues dans les graphes de deux fonctions affines

$$(x, y) \mapsto a_{k_1, \ell_1} + k_1 x + \ell_1 y, \quad (x, y) \mapsto a_{k_2, \ell_2} + k_2 x + \ell_2 y,$$

où  $(k_1, \ell_1)$  et  $(k_2, \ell_2)$  sont des points de  $\Lambda_p$ . Associons à  $\sigma$  le *poids*  $w(\sigma)$  égal à la *longueur entière* du segment reliant les points  $(k_1, \ell_1)$  et  $(k_2, \ell_2)$ . (Un point de  $\mathbb{R}^2$  est dit *entier*, si les deux coordonnées de ce point sont entières ; pour un segment reliant deux points entiers de  $\mathbb{R}^2$ , la *longueur entière* de ce segment est le nombre de ses points entiers diminué de 1 ; par exemple, le segment reliant les points  $(3, 0)$  et  $(0, 3)$  a la longueur entière 3.)

L'ensemble  $T_p$  dont les arêtes sont munies des poids définis ci-dessus s'appelle la *courbe tropicale* associée au polynôme tropicale  $p$ . On utilise la même notation  $T_p$  pour cette courbe tropicale. L'enveloppe convexe  $\Delta_p$  (dans  $\mathbb{R}^2$ ) de  $\Lambda_p$  s'appelle le *polygone de Newton* de  $p$  (parfois, on dit que  $\Delta_p$  est le polygone de Newton de la courbe tropicale  $T_p$ ). Si  $\Delta_p$  est le triangle à sommets  $(0, 0)$ ,  $(d, 0)$  et  $(0, d)$ , où  $d$  est un entier strictement positif, on dit que notre courbe tropicale est *de degré*  $d$ . La figure 2 montre certaines courbes tropicales de degrés 1, 2 et 3 (sur les figures, on n'indique que les poids différents de 1).

Un bout quelconque d'une courbe tropicale de degré  $d$  a une des trois directions : sud, ouest ou nord-est. Pour toute courbe tropicale de degré  $d$ , le nombre de bouts (comptés avec les poids) ayant une direction donnée est égal à  $d$ . Ces affirmations seront justifiées dans la section suivante.

**3.2. Dualité.** L'utilisation d'une transformation de Legendre indique la présence d'une dualité. Dans notre cas, il y a une dualité entre la subdivision  $\Theta_p$  du plan donnée par une courbe tropicale  $T_p$  et une certaine subdivision du polygone de Newton de  $p$ .

La subdivision en question de  $\Delta_p$  est définie par la fonction  $\nu_p : (k, \ell) \mapsto -a_{k, \ell}$  de la façon suivante. Considérons le graphe de  $\nu_p$  : c'est un ensemble fini de points dans  $\mathbb{R}^3$ . L'enveloppe convexe de ce

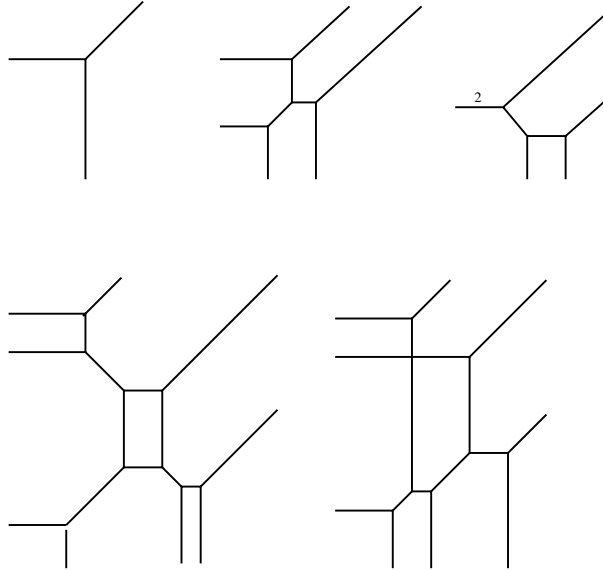
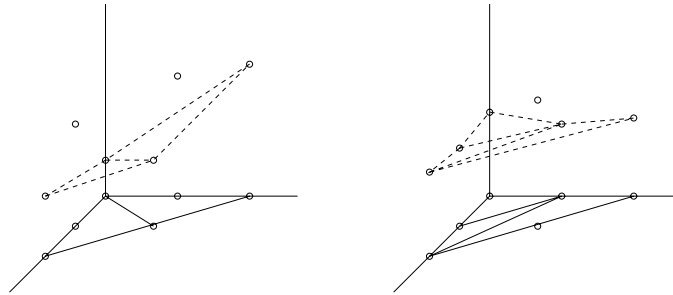


FIGURE 2. Exemples de courbes tropicales de degrés 1, 2 et 3

graphe est un polytope convexe dans  $\mathbb{R}^3$ . Quand on le regarde par-dessous, on voit un certain nombre de faces, et quand on projette ces faces sur  $\Delta_p$  on obtient une subdivision de  $\Delta_p$ . Notons  $\Phi_p$  cette subdivision.

FIGURE 3. Exemples de subdivisions du triangle à sommets  $(0,0)$ ,  $(2,0)$  et  $(0,2)$ 

On a donc, d'une part, une subdivision du polygone de Newton, et d'autre part une subdivision du plan donnée par la courbe tropicale. Ces deux subdivisions sont duales l'une de l'autre.

**Théorème 3.3 (Théorème de dualité).** *Pour tout polynôme tropical*

$$p(x, y) = \bigoplus_{(k, \ell) \in \Lambda_p} a_{k, \ell} \odot x^{\odot k} y^{\odot \ell}$$

tel que son polygone de Newton  $\Delta_p$  soit non dégénéré (c'est-à-dire, ne soit pas contenu dans une droite), il existe une bijection  $\mathcal{B}$  entre les éléments de  $\Phi_p$  d'un côté et les éléments de  $\Theta_p$  de l'autre côté telle que

- pour chaque polygone  $\Pi$  de  $\Phi_p$ , l'élément  $\mathcal{B}(\Pi)$  soit un sommet de  $T_p$ ,
- pour chaque arête  $E$  de  $\Phi_p$ , l'élément  $\mathcal{B}(E)$  soit une arête de  $T_p$ , et les arêtes  $E$  et  $\mathcal{B}(E)$  soient orthogonales,
- une arête  $E$  de  $\Phi_p$  soit contenu dans un côté de  $\Delta_p$  si et seulement si  $\mathcal{B}(E)$  est un bout de  $T_p$ ,
- pour chaque sommet  $V$  de  $\Phi_p$ , l'élément  $\mathcal{B}(V)$  soit une région de  $\mathbb{R}^2 \setminus T_p$ ,
- la correspondance  $\mathcal{B}$  renverse la relation d'incidence.

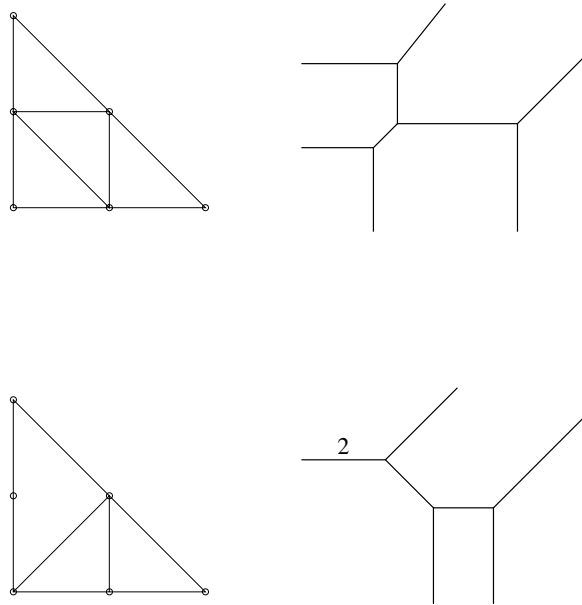


FIGURE 4. Exemples de coniques tropicales et leurs subdivisions duales

Remarquons que, pour toute arête d'une courbe tropicale, le poids de cette arête est égal à la longueur entière de l'arête duale.

Le théorème 3.3 peut être facilement démontré à l'aide des deux lemmes suivants.

**Lemme 3.4.** *Soit*

$$p(x, y) = \bigoplus_{(k, \ell) \in \Lambda_p} a_{k, \ell} \odot x^{\odot k} y^{\odot \ell}$$

*un polynôme tropical, et  $(i, j)$  un vecteur à coordonnées entières dans  $\mathbb{R}^2$ . Alors, le polynôme tropical*

$$p(x, y) = \bigoplus_{(k, \ell) \in \Lambda_p} a_{k, \ell} \odot x^{\odot(k+i)} y^{\odot(\ell+j)}$$

*définit la même courbe tropicale que le polynôme  $p$ .*

**Lemme 3.5.** *Soit*

$$p(x, y) = \bigoplus_{(k, \ell) \in \Lambda_p} a_{k, \ell} \odot x^{\odot k} y^{\odot \ell}$$

*un polynôme tropical, et  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $L : (k, l) \mapsto \alpha k + \beta l + \gamma$ , une fonction affine. Alors, la courbe tropicale définie par le polynôme tropical*

$$\bigoplus_{(k, \ell) \in \Lambda_p} (a_{k, \ell} + L(k, \ell)) \odot x^{\odot k} y^{\odot \ell}$$

*peut être obtenue de la courbe tropicale  $T_p$  par la translation de vecteur  $(-\alpha, -\beta)$ .*

**3.3. Description géométrique.** Les courbes tropicales dans  $\mathbb{R}^2$  peuvent être décrites de façon géométrique. Soit

- $\mathcal{V}$  une collection finie de points distincts dans  $\mathbb{R}^2$ ,
- $\mathcal{E}_b$  une collection finie de segments dont les extrémités appartiennent à  $\mathcal{V}$ ,
- $\mathcal{E}_n$  une collection finie de demi-droites dont les extrémités appartiennent à  $\mathcal{V}$ .

Supposons que l'intersection de deux éléments quelconques de  $\mathcal{E}_b \cup \mathcal{E}_n$  est soit un point de  $\mathcal{V}$ , soit vide. Considérons une fonction  $w : \mathcal{E}_b \cup \mathcal{E}_n \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Pour chaque élément  $e$  de  $\mathcal{E}_b \cup \mathcal{E}_n$ , le nombre  $w(e)$  s'appelle le *poids* de  $e$ . Un tel quadruplet  $(\mathcal{V}, \mathcal{E}_b, \mathcal{E}_n, w)$  s'appelle un *graphe rectiligne pondéré*. Les éléments de  $\mathcal{V}$  (respectivement,



de  $\mathcal{E}_b \cup \mathcal{E}_n$ ) s'appellent *sommets* (respectivement, *arêtes*) du graphe rectiligne pondéré  $(\mathcal{V}, \mathcal{E}_b, \mathcal{E}_n, w)$ .

Un graphe rectiligne pondéré  $(\mathcal{V}, \mathcal{E}_b, \mathcal{E}_n, w)$  est dit *équilibré* si

- chaque arête dans  $\mathcal{E}_b \cup \mathcal{E}_n$  a une pente rationnelle,
- aucun sommet dans  $\mathcal{V}$  n'est adjacent à exactement deux arêtes dans  $\mathcal{E}_b \cup \mathcal{E}_n$ ,
- pour tout sommet  $v$  dans  $\mathcal{V}$ , on a  $\sum_{e_i \in \mathcal{E}(v)} w(e_i) \cdot \vec{e}_i = 0$ , où  $\mathcal{E}(v) \subset \mathcal{E}_b \cup \mathcal{E}_n$  est l'ensemble formé par les arêtes dans  $\mathcal{E}_b \cup \mathcal{E}_n$  qui sont adjacentes à  $v$ , et  $\vec{e}_i$  est le plus petit vecteur à coordonnées entières sortant de  $v$  le long de  $e_i$ .

La dernière propriété de la définition ci-dessus s'appelle la *condition d'équilibre*.

**Théorème 3.6.** *Toute courbe tropicale  $T$  dans  $\mathbb{R}^2$  telle que  $T$  (considéré comme ensemble) ne soit pas une droite représente un graphe rectiligne pondéré équilibré. Inversement, tout graphe rectiligne pondéré équilibré représente une courbe tropicale.*

*Démonstration.* Soit  $T_p$  la courbe tropicale associée à un polynôme tropical  $p$ . Supposons que  $T_p$  n'est pas une droite, et considérons le graphe rectiligne pondéré  $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E}_b, \mathcal{E}_n, w)$  tel que l'ensemble  $\mathcal{V}$  (respectivement,  $\mathcal{E}_b, \mathcal{E}_n$ ) soit formé par les sommets (respectivement, les arêtes bornées, les bouts) de  $T_p$ , et les poids des arêtes de  $G$  coïncident avec les poids des arêtes correspondantes de  $T_p$ . Remarquons que

- chaque arête de la subdivision duale  $\Phi_p$  du polygone de Newton de  $T_p$  a une pente rationnelle,
- chaque polygone dans  $\Phi_p$  a au moins trois côtés,
- pour chaque polygone dans  $\Phi_p$  à sommets  $V_1, V_2, \dots, V_n$ , on a  $\overrightarrow{V_1 V_2} + \dots + \overrightarrow{V_{n-1} V_n} + \overrightarrow{V_n V_1} = 0$ .

Donc le Théorème 3.3 implique que le graphe  $G$  est équilibré.

Pour démontrer la deuxième partie de l'énoncé, considérons un graphe rectiligne pondéré équilibré  $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E}_b, \mathcal{E}_n, w)$ , et choisissons une région  $R_1$  du complémentaire de  $G$  dans  $\mathbb{R}^2$ . Associons à  $R_1$  une fonction affine arbitraire  $\varphi_{R_1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi_{R_1}(x, y) = k_{R_1}x + \ell_{R_1}y + a_{R_1}$ . Soit  $R_2$  une région voisine de  $R_1$ , c'est-à-dire, une région telle que l'intersection  $e$  des adhérences de  $R_1$  et  $R_2$  soit une arête dans  $\mathcal{E}_b \cup \mathcal{E}_n$ .

Associons à  $R_2$  la fonction affine  $\varphi_{R_2} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi_{R_2}(x, y) = k_{R_2}x + \ell_{R_2}y + a_{R_2}$  telle que  $((k_{R_2} - k_{R_1})/w(e), (\ell_{R_2} - \ell_{R_1})/w(e))$  soit le plus petit vecteur à coordonnées entières normal à  $e$  et pointé vers  $R_2$ , et les restrictions de  $\varphi_{R_1}$  and  $\varphi_{R_2}$  sur  $e$  coïncident. Continuant de la même manière, on associe à toute région  $R$  du complémentaire de  $G$  dans  $\mathbb{R}^2$  une fonction affine  $\varphi_R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi_R(x, y) = k_Rx + \ell_Ry + a_R$ . La condition d'équilibre garantie que la fonction  $\varphi_R$  ne dépend pas de la suite de régions utilisée dans la définition de  $\varphi_R$ . On obtient une collection finie  $\Lambda$  de points entiers  $(k_R, \ell_R)$  (où  $R$  parcourt toutes les régions du complémentaire de  $G$  dans  $\mathbb{R}^2$ ) et un polynôme tropical

$$p(x, y) = \bigoplus_{(k_R, \ell_R) \in \Lambda} a_{k_R, \ell_R} \odot x^{\odot k_R} y^{\odot \ell_R}.$$

Le graphe  $G$  représente la courbe tropicale  $T_p$  définie par  $p$ . □

La construction ci-dessus produit une courbe tropicale à partir d'un graphe rectiligne pondéré équilibré. Le polygone de Newton de la courbe obtenue n'est déterminé par le graphe de départ qu'à une translation de vecteur à coordonnées entières près.

**3.4. Courbes tropicales irréductibles.** Soient  $p_1, \dots, p_n$  des polynômes tropicaux qui définissent dans  $\mathbb{R}^2$  des courbes tropicales  $T_1, \dots, T_n$ , respectivement. La somme  $T_1 + \dots + T_n$  des courbes tropicales  $T_1, \dots, T_n$  est la courbe tropicale définie par le polynôme tropical  $p_1 \odot \dots \odot p_n$ . Comme ensemble, la courbe tropicale  $T_1 + \dots + T_n$  est la réunion des ensembles  $T_1, \dots, T_n$ , et le poids de chaque arête de  $T_1 + \dots + T_n$  est égal à la somme des poids des arêtes correspondantes des courbes  $T_1, \dots, T_n$ . Une courbe tropicale dans  $\mathbb{R}^2$  est dite *réductible* si elle peut être représentée comme somme de deux courbes tropicales plus petites. Une courbe tropicale non réductible dans  $\mathbb{R}^2$  est dite *irréductible*. Par exemple, les coniques tropicales présentées sur la figure 4 sont irréductibles. Par contre, la conique tropicale présentée sur la figure 5 est réductible.

**3.5. Version tropicale du théorème de Bézout.** Les courbes tropicales ont beaucoup de propriétés en commun avec les courbes algébriques complexes. Par exemple, deux droites tropicales en position générale une par rapport à l'autre ont exactement un point

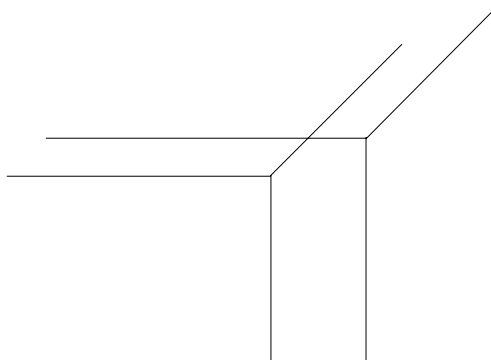


FIGURE 5. Une conique tropicale réductible

commun. Cette observation peut être généralisée de la façon suivante (voir, par exemple, [27]).

**Théorème 3.7 (Version tropicale du théorème de Bézout)**

Soient  $T_1$  et  $T_2$  des courbes tropicales dans  $\mathbb{R}^2$  de degrés  $m_1$  et  $m_2$ , respectivement. Supposons que  $T_1$  et  $T_2$  sont en position générale (cette condition signifie que  $T_1$  et  $T_2$  ne se coupent qu'en points intérieurs d'arêtes). Alors, le nombre de points d'intersection (comptés avec certaines multiplicités) de  $T_1$  et  $T_2$  est égal à  $m_1 m_2$ . Les multiplicités des points d'intersection sont définies de la façon suivante. Considérons un point d'intersection d'une arête  $e_1$  de  $T_1$  et d'une arête  $e_2$  de  $T_2$ . Soient  $(a_1, b_1)$  et  $(a_2, b_2)$  les plus petits vecteurs directeurs à coordonnées entières de  $e_1$  et  $e_2$ , respectivement. Alors, la multiplicité du point d'intersection en question est égale à

$$w(e_1)w(e_2) |a_1 b_2 - a_2 b_1|.$$

*Démonstration.* Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux nombres réels tels que  $\alpha < 0$ ,  $\beta > 0$  et  $\alpha/\beta$  soit irrationnel. Pour tout nombre réel positif  $t$ , notons  $T_1(t)$  l'image de la courbe tropicale  $T_1$  par la translation de vecteur  $(t\alpha, t\beta)$  (remarquons que  $T_1(t)$  est une courbe tropicale de degré  $m_1$ ).

Il existe un nombre positif  $\tilde{t}$  tel que tout sommet de  $T_1(\tilde{t})$  ait sa première coordonnée strictement plus petite que la première coordonnée de tout sommet de  $T_2$ , et tout sommet de  $T_1(\tilde{t})$  ait sa deuxième coordonnée strictement plus grande que la deuxième coordonnée de tout sommet de  $T_2$ . Tout point d'intersection de  $T_1(\tilde{t})$  et  $T_2$  est un

point d'intersection d'un bout vertical de  $T_1(\tilde{t})$  et d'un bout horizontal de  $T_2$ . Donc, le nombre de points d'intersection, comptés avec les multiplicités, de  $T_1(\tilde{t})$  et  $T_2$  est égal à  $m_1m_2$ .

D'autre part, sur l'intervalle  $[0, \tilde{t}]$ , il n'y a qu'un nombre fini de valeurs  $t$  telles que les courbes tropicales  $T_1(t)$  et  $T_2$  ne soient pas en position générale. Si  $t'$  est une telle valeur, alors, la condition d'équilibre implique que, pour tout nombre  $\varepsilon$  strictement positif et suffisamment petit, le nombre de points d'intersection, comptés avec les multiplicités, des courbes tropicales  $T_1(t' - \varepsilon)$  et  $T_2$  est égal au nombre de points d'intersection, comptés avec les multiplicités, des courbes tropicales  $T_1(t' + \varepsilon)$  et  $T_2$ . Par conséquent, le nombre de points d'intersection, comptés avec les multiplicités, de  $T_1$  et  $T_2$  est égal à  $m_1m_2$ .  $\square$

Avant de formuler une généralisation du théorème que l'on vient de démontrer, introduisons la notion de *volume mixte* de polytopes convexes. Soit  $n$  un entier strictement positif, et soient  $\Pi_1, \dots, \Pi_n$  des polytopes convexes dans  $\mathbb{R}^n$  (chacun de ces polytopes est l'enveloppe convexe d'une collection finie de points). Pour tous nombres réels positifs  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , considérons le polytope  $\lambda_1\Pi_1 + \dots + \lambda_n\Pi_n$  (ce polytope est formé par les points de la forme  $\lambda_1x_1 + \dots + \lambda_nx_n$ , où  $x_i \in \Pi_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ). Le volume (euclidien standard) du polytope  $\lambda_1\Pi_1 + \dots + \lambda_n\Pi_n$  est un polynôme de degré  $n$  en  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Ce polynôme a un monôme de la forme  $M\lambda_1 \dots \lambda_n$ . En divisant le coefficient  $M$  du monôme en question par  $n!$ , on obtient la quantité qui s'appelle *volume mixte* des polytopes  $\Pi_1, \dots, \Pi_n$  et est notée  $\text{Vol}_n(\Pi_1, \dots, \Pi_n)$ .

Si tous les polytopes  $\Pi_1, \dots, \Pi_n$  coïncident avec un polytope  $\Pi$ , alors le volume mixte de  $\Pi_1, \dots, \Pi_n$  est égal au volume  $\text{vol}(\Pi)$  de  $\Pi$ . Si  $n = 2$ , alors le volume mixte de  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$  s'appelle aussi *aire mixte* de  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$  et est égal à

$$\frac{\text{vol}(\Pi_1 + \Pi_2) - \text{vol}(\Pi_1) - \text{vol}(\Pi_2)}{2}.$$

**Théorème 3.8 (Version tropicale du théorème de Bernstein)**

*Le nombre de points d'intersection, comptés avec les multiplicités, de deux courbes tropicales en position générale dans  $\mathbb{R}^2$  est égal à*

$2 \text{Vol}_2(\Delta_1, \Delta_2)$ , où  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  sont des polygones de Newton de ces courbes.

Si  $\Pi_i$ ,  $i = 1, 2$ , est le triangle à sommets  $(0, 0)$ ,  $(m_i, 0)$  et  $(0, m_i)$ , alors le polygone  $\Pi_1 + \Pi_2$  est le triangle à sommets  $(0, 0)$ ,  $(m_1 + m_2, 0)$ ,  $(0, m_1 + m_2)$ , et l'aire mixte de  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$  est égale à  $m_1 m_2 / 2$ . Dans ce cas, le Théorème 3.8 se réduit au Théorème 3.7.

Considérons un autre exemple. Soit  $\Pi_1$  le trapèze à sommets  $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(2, 2)$ ,  $(0, 4)$ , et  $\Pi_2$  le triangle à sommets  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, 3)$ ; voir le dessin 6.

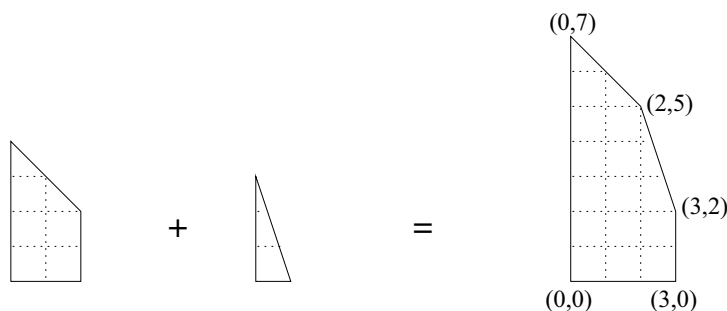


FIGURE 6. La somme d'un trapèze et d'un triangle

Dans ce cas, la somme  $\Pi_1 + \Pi_2$  est un pentagone ayant l'aire 15, 5. L'aire mixte de  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$  est égale à 4. Donc, une courbe tropicale  $T_1$  ayant  $\Pi_1$  pour polygone de Newton et une courbe tropicale  $T_2$  ayant  $\Pi_2$  pour polygone de Newton se coupent en 8 points (si on compte les points d'intersection avec les multiplicités et si les courbes tropicales  $T_1$  et  $T_2$  sont en position générale).

Si  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$  sont deux polygones convexes dans  $\mathbb{R}^2$ , et  $\Pi'_2$  est un polygone convexe entièrement contenu dans  $\Pi_2$ , alors

$$\text{Vol}_2(\Pi_1, \Pi'_2) \leq \text{Vol}_2(\Pi_1, \Pi_2).$$

Essayez de démontrer cette affirmation (par exemple, en utilisant le Théorème 3.8). Remarquons que l'on peut avoir l'égalité  $\text{Vol}_2(\Pi_1, \Pi'_2) = \text{Vol}_2(\Pi_1, \Pi_2)$  même si  $\Pi'_2 \subsetneq \Pi_2$ . Par exemple, l'aire mixte du triangle à sommets  $(0, 0)$ ,  $(4, 0)$ ,  $(0, 4)$  et du carré à sommets  $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(2, 2)$ ,  $(0, 2)$  (ces polygones sont représentés sur la

figure 7) est égale à 8, c'est-à-dire, à l'aire mixte de deux triangles à sommets  $(0, 0)$ ,  $(4, 0)$ ,  $(0, 4)$ .

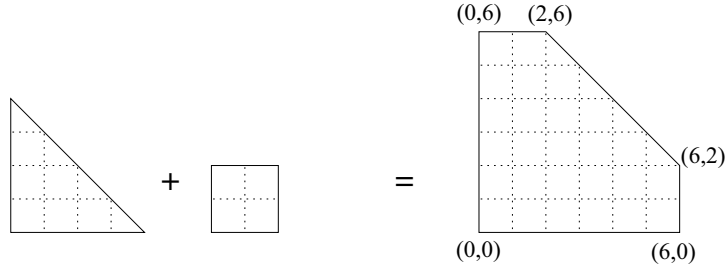


FIGURE 7. La somme d'un triangle et d'un carré

Un autre exemple est fourni par les deux segments  $[(0, 0), (m_1, 0)]$  et  $[(0, 0), (0, m_2)]$  : leur aire mixte est égale à  $m_1 m_2 / 2$ .

Le volume mixte a beaucoup de propriétés importantes. Voici une de ses propriétés.

**Théorème 3.9 (Inégalité d'Alexandrov-Fenchel ; voir, par exemple, [3])**

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2, et soient  $\Pi_1, \dots, \Pi_n$  des polytopes convexes dans  $\mathbb{R}^n$ . Alors,

$$\begin{aligned} \text{Vol}_n(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_n)^2 \\ \geq \text{Vol}_n(\Pi_1, \Pi_1, \Pi_3, \dots, \Pi_n) \text{Vol}_n(\Pi_2, \Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_n). \end{aligned}$$

Il est remarquable que l'inégalité de Alexandrov-Fenchel peut être démontrée en utilisant une approche algèbro-géométrique (voir [28, 11]).

**3.6. Problèmes énumératifs.** Si on choisit deux points en position générale dans  $\mathbb{R}^2$  (ici la position générale signifie que les points choisis ne sont pas sur la même droite horizontale, sur la même droite verticale ou sur la même droite de pente 1), alors, par ces deux points, on peut faire passer exactement une droite tropicale. Notons  $\varrho$  la pente de la droite (habituelle) passant par les deux points choisis.

– Si  $\varrho \in (-\infty, 0)$ , alors le bout « sud » et le bout « ouest » de la droite tropicale  $T$  en question contiennent chacun un point choisi.

- Si  $\varrho \in (0, 1)$ , alors le bout « ouest » et le bout « nord-est » de  $T$  contiennent chacun un point choisi.
- Si  $\varrho \in (1, +\infty)$ , alors le bout « sud » et le bout « nord-est » de  $T$  contiennent chacun un point choisi.

L'observation concernant l'unicité de la droite tropicale qui passe par deux points en position générale dans  $\mathbb{R}^2$  a une généralisation très importante : le théorème de correspondance de G. Mikhalkin (voir [19]). Ce théorème est la base des applications spectaculaires de la géométrie tropicale en géométrie énumérative et est présenté dans le texte d'E. Brugallé.

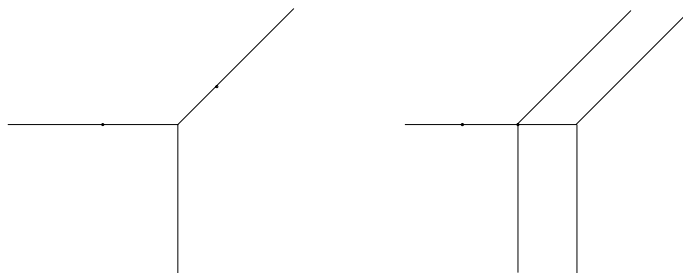


FIGURE 8. Droite tropicale passant par deux points

#### 4. Amibes de courbes complexes

Dans les applications énumératives de la géométrie tropicale, un rôle très important est joué par les *amibes* de courbes complexes.

Considérons le *tore complexe*  $(\mathbb{C}^*)^2$ , où  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Une *courbe algébrique*  $X$  dans  $(\mathbb{C}^*)^2$  est le lieu des zéros d'un polynôme de Laurent  $P \in \mathbb{C}[z^{\pm 1}, w^{\pm 1}]$ ,

$$P(z, w) = \sum_{(k, \ell) \in \Lambda_P} A_{k, \ell} z^k w^\ell,$$

où  $\Lambda_P \subset \mathbb{Z}^2$  est un ensemble fini, appelé le *support* de  $P$ , et  $A_{k, \ell} \neq 0$  pour tout  $(k, \ell) \in \Lambda_P$ . Comme ci-dessus, on appelle *polygone de Newton* de  $P$  l'enveloppe convexe (dans  $\mathbb{R}^2$ ) du support  $\Lambda_P$ . Notons  $\Delta_P$  le polygone de Newton de  $P$ .

Si  $\Lambda_P \subset \mathbb{N}^2$ , on a affaire à un polynôme habituel (et non à un polynôme de Laurent). Un polynôme complexe à deux variables définit

une courbe dans  $\mathbb{C}^2$ . Deux polynômes  $P$  et  $Q$  définissent la même courbe dans  $\mathbb{C}^2$  si et seulement si ils sont proportionnels :  $P = \lambda Q$ , où  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  ; ils ont alors le même polygone de Newton, et on l'appelle le polygone de Newton de la courbe  $X = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid P(z, w) = 0\}$ .

Pour les courbes dans le tore complexe  $(\mathbb{C}^*)^2$ , la situation est un peu différente : deux polynômes de Laurent  $P$  et  $Q$  définissent la même courbe dans le tore complexe  $(\mathbb{C}^*)^2$  si et seulement si il existe  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  et  $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$  tels que  $Q(z, w) = \lambda z^i w^j P(z, w)$  ; on a alors  $\Lambda_Q = \Lambda_P + (i, j)$  et  $\Delta_Q = \Delta_P + (i, j)$ . Par conséquent, on peut parler du polygone de Newton  $\Delta_X$  d'une courbe  $X = \{(z, w) \in (\mathbb{C}^*)^2 \mid P(z, w) = 0\}$ , mais il est défini *modulo* les translations de vecteurs à coordonnées entières (comparer cette situation avec celle des polygones de Newton des courbes tropicales dans  $\mathbb{R}^2$  ; voir section 3.3).

Dans le cas de  $(\mathbb{C}^*)^2$ , le théorème de Bernstein [2], dont le Théorème 3.8 est une version tropicale, affirme que, si  $P_1$  et  $P_2$  sont des polynômes de Laurent ayant des polygones de Newton  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ , respectivement, et  $P_1$  et  $P_2$  sont suffisamment génériques (parmi les polynômes de Laurent ayant les polygones de Newton  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ ), alors le nombre de racines dans  $(\mathbb{C}^*)^2$  du système  $P_1(z, w) = P_2(z, w) = 0$  est égal à  $2 \text{Vol}_2(\Delta_1, \Delta_2)$ .

Maintenant, considérons l'application

$$\begin{aligned} \text{Log} : (\mathbb{C}^*)^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (z, w) &\longmapsto (\ln |z|, \ln |w|). \end{aligned}$$

Pour une courbe algébrique  $X$  dans  $(\mathbb{C}^*)^2$ , l'*amibe*  $\mathcal{A}(X)$  de  $X$  est l'image de  $X$  par l'application  $\text{Log}$ .

L'amibe est toujours un sous-ensemble fermé de  $\mathbb{R}^2$ . Son complémentaire est non vide et possède un nombre fini de composantes connexes, qui sont toutes convexes. L'amibe  $\mathcal{A}(X)$  a un nombre fini d'asymptotes le long desquelles elle va vers l'infini. Les directions asymptotiques sont orthogonales aux côtés du polygone de Newton  $\Delta_X$  (voir [5]).

Les amibes permettent d'étudier et, d'une certaine façon, de visualiser les courbes algébriques complexes. Le cas des droites est particulièrement simple.



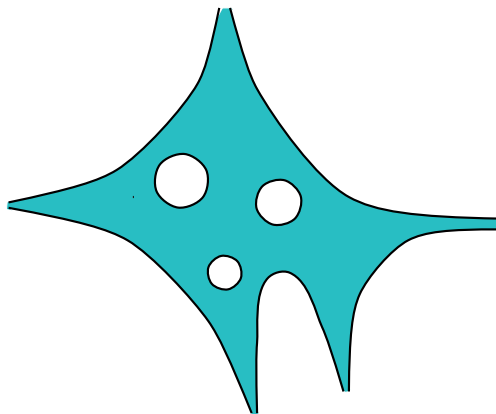


FIGURE 9. Amibe d'une courbe

L'amibe d'une droite  $X$  définie dans  $(\mathbb{C}^*)^2$  par un polynôme  $az + bw + c$  tel que  $abc \neq 0$  peut être décrite de la façon suivante. Si l'on pose

$$u = \ln |z| \quad \text{et} \quad v = \ln |w|,$$

alors l'amibe  $\mathcal{A}(X)$  est l'ensemble des points  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  qui vérifient les trois inégalités

$$u \leq -\ln |a| + \ln(|c| + |b|e^v),$$

$$v \leq -\ln |b| + \ln(|c| + |a|e^u),$$

$$|a|e^u + |b|e^v \geq |c|.$$

Le polygone de Newton de la droite  $X$  est (à translation près) le triangle de sommets  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ , donc les directions asymptotiques de l'amibe de la droite  $X$  sont sud, ouest et nord-est. Au-dessus de chaque point  $(u, v)$  qui se trouve à l'intérieur de  $\mathcal{A}(X)$ , il y a deux points de  $X$ , et au-dessus de chaque point  $(u, v)$  du bord de l'amibe, il n'y a qu'un seul point de  $X$  (cela **n'est pas** vrai pour l'amibe d'une courbe algébrique quelconque; le cas d'une droite est très spécial). Donc, pour imaginer la droite  $X$ , on peut prendre deux copies de  $\mathcal{A}(X)$  et les recoller le long du bord. Du point de vue topologique, on obtient une sphère (de dimension 2) privée de trois points.

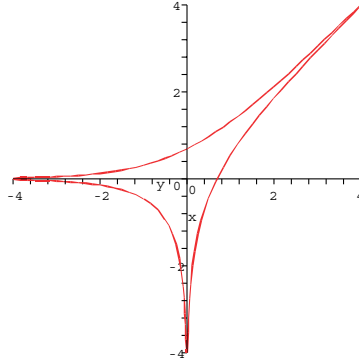


FIGURE 10. Amibe de la droite définie par le polynôme  $z + w + 1$ .

La notion d'amibe est apparue plusieurs fois en mathématiques, sous des noms différents. Sous le nom *amibe*, cette notion a été introduite par I.M. Gelfand, M. Kapranov et A. Zelevinsky [5] en 1994. Depuis, les amibes ont fait l'objet d'études approfondies et de généralisations diverses, notamment par M. Forsberg, M. Passare, A. Tsikh, H. Rullgård, L. Ronkin et G. Mikhalkin (voir, par exemple, [4, 15, 18, 17, 21, 22, 24, 25, 6]).

Citons seulement un des résultats importants concernant les amibes des courbes algébriques dans  $(\mathbb{C}^*)^2$ .

**Théorème 4.1 (M. Forsberg, M. Passare et A. Tsikh, [4])**

Soit  $\Delta$  un polygone convexe à sommets entiers dans  $\mathbb{R}^2$ , et soit  $X$  une courbe algébrique dans  $(\mathbb{C}^*)^2$  telle que  $X$  ait  $\Delta$  comme polygone de Newton. Alors, il existe une fonction localement constante  $\text{Ind} : \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{A}(X) \rightarrow \Delta \cap \mathbb{Z}^2$  qui envoie des composantes connexes différentes du complémentaire de  $\mathcal{A}(X)$  sur des points entiers différents de  $\Delta$ . En particulier, le nombre de composantes connexes de  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{A}(X)$  est inférieur ou égal au nombre de points entiers de  $\Delta$ .

## 5. Amibes non archimédiennes

Une des explications du phénomène de ressemblance des courbes tropicales et des courbes algébriques est le fait que toute courbe

tropicale dans  $\mathbb{R}^2$  peut être vue comme l'amibe d'une courbe algébrique définie sur un corps valué non archimédien.

Soient  $K$  un corps avec une norme, et  $V \subset (K^*)^2$  une courbe algébrique, c'est-à-dire, le lieu des zéros d'un polynôme (de Laurent)  $P \in K[z^{\pm 1}, w^{\pm 1}]$ ,

$$P(z, w) = \sum_{(k, \ell) \in \Lambda_P} A_{k, \ell} z^k w^\ell,$$

où  $\Lambda_P \subset \mathbb{Z}^2$  est un ensemble fini. La définition de l'amibe se généralise facilement à cette situation : l'amibe  $\mathcal{A}_K(V)$  est l'image de  $V$  par l'application

$$\begin{aligned} \text{Log} : (K^*)^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2, \\ (z, w) &\longmapsto (\ln |z|, \ln |w|), \end{aligned}$$

où  $|z|$  et  $|w|$  sont les normes de  $z$  et  $w$ , respectivement.

Une *valuation* (à valeurs réelles) d'un corps  $K$  est une fonction  $v : K^* \rightarrow \mathbb{R}$  telle que, pour tous  $z$  et  $w$  dans  $K$ , on ait

$$v(zw) = v(z) + v(w) \quad \text{et} \quad v(z + w) \geq \min\{v(z), v(w)\}.$$

Un corps muni d'une valuation est dit *valué non archimédien*. Si  $K$  est un corps valué non archimédien et  $v$  est sa valuation, on définit la norme  $|z|$  de  $z \in K^*$  par  $|z| = e^{-v(z)}$ , et on pose  $|0| = 0$ . L'amibe d'une variété algébrique  $V \subset (K^*)^n$  est l'image de  $V$  par l'application  $\text{Log} : (z_1, \dots, z_n) \mapsto (-v(z_1), \dots, -v(z_n))$ .

Un exemple important d'un corps valué non archimédien est le corps  $\cup_{l \geq 1} k((t^{1/l}))$  des séries de Puiseux sur un corps  $k$ . Les éléments de ce corps sont les séries formelles  $b(t) = \sum_{r \in S} b_r t^r$  à coefficients dans  $k$  et à une variable  $t$  telles que  $S \subset \mathbb{Q}$  soit minoré et contenu dans une suite arithmétique. La valuation est donnée par le plus petit  $r$  tel que  $b_r \neq 0$ . Si  $k$  est algébriquement clos et de caractéristique 0, alors le corps des séries de Puiseux sur  $k$  est aussi algébriquement clos (voir, par exemple, [32]).

Un autre exemple est le corps  $\mathcal{K}$  des séries transfinies  $b(t) = \sum_{r \in S} b_r t^r$  à coefficients complexes et exposants réels (ici  $S \subset \mathbb{R}$  est un ensemble *bien ordonné*, c'est-à-dire, chaque sous-ensemble de  $S$  contient un élément minimal). Ce corps est algébriquement clos. La valuation non archimédienne  $v : \mathcal{K}^* \rightarrow \mathbb{R}$  est encore une fois donnée par le plus petit  $r$  tel que  $b_r \neq 0$ .

Soit  $K$  un corps valué non archimédien algébriquement clos tel que  $v(K^*) \supset \mathbb{Q}$ . Considérons un polynôme  $P \in K[z^{\pm 1}, w^{\pm 1}]$ ,

$$P(z, w) = \sum_{(k, \ell) \in \Lambda_P} A_{k, \ell} z^k w^\ell,$$

où  $\Lambda_P \subset \mathbb{Z}^2$  est un ensemble fini, et  $A_{k, \ell} \neq 0$  pour tout  $(k, \ell) \in \Lambda_P$ . Notons  $V_P$  la courbe définie par  $P$  dans  $(K^*)^2$ . L'amibe  $\mathcal{A}_K(V_P)$  de  $V_P$  peut être décrite de la façon suivante.

Considérons le polynôme tropical

$$p(x, y) = \bigoplus_{(k, \ell) \in \Lambda_P} a_{k, \ell} \odot x^{\odot k} y^{\odot \ell},$$

où  $a_{k, \ell} = -v(A_{k, \ell})$  pour tout  $(k, \ell) \in \Lambda_P$ .

**Théorème 5.1 (M. Kapranov, [10]).** *L'adhérence  $\overline{\mathcal{A}(V_P)}$  de l'amibe  $\mathcal{A}_K(V_P) \subset \mathbb{R}^2$  coïncide (comme ensemble) avec la courbe tropicale  $T_p$  définie par  $p$ . Si la valuation  $v : K^* \rightarrow \mathbb{R}$  est surjective, alors  $\mathcal{A}(V_P)$  coïncide avec  $T_p$ .*

Le théorème de Kapranov montre en particulier que, contrairement au cas complexe, (l'adhérence de) l'amibe d'une courbe algébrique dans  $(K^*)^2$  ne dépend que des valuations des coefficients d'un polynôme définissant la courbe.

Un autre corollaire du théorème de Kapranov est le fait que le Théorème 4.1 a un analogue non archimédien : il existe une fonction localement constante  $\text{Ind} : \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\mathcal{A}(V_P)} \rightarrow \Delta_P \cap \mathbb{Z}^2$ , où  $\Delta_P$  est le polygone de Newton de  $P$ , qui envoie des composantes connexes différentes du complémentaire de  $\overline{\mathcal{A}(V_P)}$  sur des points entiers différents de  $\Delta_P$ . En effet, toute région de  $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\mathcal{A}(V_P)}$  correspond à un monôme de  $P$  et est déterminée de façon unique par ce monôme.

Les amibes non archimédiennes sont des limites de certaines familles d'amibes de courbes complexes. Soient  $\Lambda$  une collection finie de points entiers dans  $\mathbb{R}^2$ , et  $\nu : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. Une famille de polynômes complexes  $P_t(z, w) = \sum_{(k, \ell) \in \Lambda} a_{k, \ell} t^{\nu(k, \ell)} z^k w^\ell$  à deux variables s'appelle une *famille de patchwork* (cf. [29, 30]). Notons  $X(t)$  la courbe définie par  $P_t$  dans  $(\mathbb{C}^*)^2$ . Une famille de patchwork peut être vue comme polynôme  $P(z, w) = \sum_{(k, \ell) \in \Lambda} a_{k, \ell} t^{\nu(k, \ell)} z^k w^\ell$  à coefficients dans le corps  $\mathcal{K}$  des séries transfinies à coefficients complexes et exposants réels. Notons  $V_P$  la courbe définie par  $P$  dans  $(\mathcal{K}^*)^2$ .

Pour tout  $t > 0$ , considérons l'homothétie  $F_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $(x, y) \mapsto (-\frac{x}{\log t}, -\frac{y}{\log t})$ .

**Théorème 5.2 (G. Mikhalkin, [18], H. Rullgård, [26])**

*L'amibe  $\mathcal{A}_{\mathcal{K}}(V_P) \subset \mathbb{R}^2$  est la limite dans la métrique de Hausdorff sur les compacts des images  $F_t(\mathcal{A}(X(t)))$  des amibes  $\mathcal{A}(X(t))$  quand  $t$  tend vers 0.*

Le théorème de Kapranov et d'autres relations entre la géométrie non archimédienne et la géométrie tropicale sont présentés en détails dans le texte de B. Teissier (ce volume).

La déquantification de Maslov des nombres réels strictement positifs peut être vue comme ombre réelle d'une déformation de la structure complexe de  $(\mathbb{C}^*)^2$ , une déformation qui produit en particulier une déformation d'amibes de courbes complexes vers des courbes tropicales. Ces déformations jouent un rôle central dans la démonstration du théorème de correspondance de G. Mikhalkin et dans les applications énumératives de la géométrie tropicale présentées dans le texte d'E. Brugallé (voir aussi [16, 19, 20, 7, 8, 9]).

## 6. Exercices

(1) Trouver un polynôme tropical dont la courbe tropicale associée est une droite verticale de poids 1 dans  $\mathbb{R}^2$ .

(2) Trouver un polynôme tropical dont la courbe tropicale associée est la droite  $y = 3x + 1$  de poids 2 dans  $\mathbb{R}^2$ .

(3) La figure 11 représente une courbe tropicale dans  $\mathbb{R}^2$  et sa subdivision duale. Quel est le degré de cette courbe ?

(4) Dessiner la courbe tropicale dans  $\mathbb{R}^2$  définie par le polynôme tropical

$$p(x, y) = 1 \oplus (-1) \odot x \oplus (-5) \odot x \odot x \oplus 1 \odot x \odot y \oplus 1 \odot y \odot y.$$

(5) Soit  $d$  un entier strictement positif, et  $\Delta$  le triangle à sommets  $(0, 0)$ ,  $(d, 0)$  et  $(0, d)$ .

– Quel est le nombre maximal possible de sommets d'une courbe tropicale dans  $\mathbb{R}^2$  ayant  $\Delta$  pour polygone de Newton ?

– Quel est le nombre minimal possible de sommets d'une courbe tropicale dans  $\mathbb{R}^2$  ayant  $\Delta$  pour polygone de Newton ?

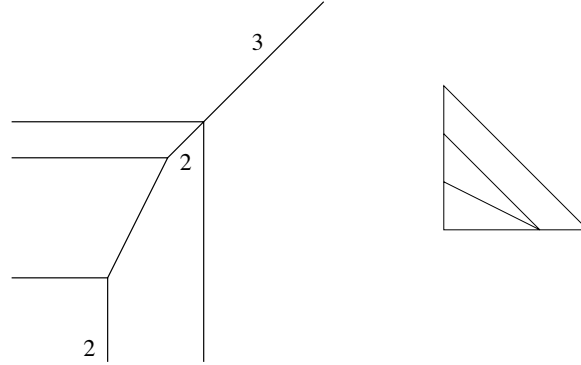


FIGURE 11

(6) Trouver un polygone convexe  $\Delta \subset \mathbb{R}^2$  à sommets entiers et deux polynômes tropicaux  $p_1$  et  $p_2$  ayant  $\Delta$  pour polygone de Newton tels que

- les courbes tropicales  $T_1$  et  $T_2$  définies dans  $\mathbb{R}^2$  par  $p_1$  et  $p_2$ , respectivement, coïncident en tant qu'ensembles (on ne tient pas compte du poids des arêtes des deux courbes tropicales en question),
- les subdivisions de  $\Delta$  duales aux subdivisions de  $\mathbb{R}^2$  définies par  $T_1$  et  $T_2$  ne coïncident pas.

(7) Considérons une courbe tropicale  $T$  dans  $\mathbb{R}^2$  telle que  $T$  ait le triangle à sommets  $(0,0)$ ,  $(1,0)$ ,  $(0,2)$  comme polygone de Newton. La courbe  $T$  peut-elle être réductible ?

(8) Soit  $\Delta$  le carré à sommets  $(0,0)$ ,  $(1,0)$ ,  $(1,1)$  et  $(0,1)$  dans  $\mathbb{R}^2$ .

– Montrer que, par trois points en position générale dans  $\mathbb{R}^2$ , on peut tracer exactement une courbe tropicale de polygone de Newton  $\Delta$ . Essayer d'expliciter dans ce cas l'expression 'en position générale'.

– Combien de courbes tropicales réductibles de polygone de Newton  $\Delta$  passent par deux points en position générale dans  $\mathbb{R}^2$ ? (Ici, la position générale signifie que les points choisis ne sont pas sur la même droite horizontale ou sur la même droite verticale.)

(9) Soit  $\mathcal{K}$  le corps des séries transfinies  $b(t) = \sum_{r \in S} b_r t^r$  à coefficients complexes et exposants réels (ici  $S \subset \mathbb{R}$  est un ensemble bien

ordonné). Considérons la courbe  $V \subset (\mathcal{K}^*)^2$  définie par le polynôme  $1 + z + w + tzw$ . Trouver l'amibe non archimédienne  $\text{Log}_{\mathcal{K}}(V)$ .

(10) Soit  $K$  le corps des séries de Puiseux à coefficients complexes muni de sa valuation habituelle. Soit  $V$  une courbe dans  $(K^*)^2$  définie par un polynôme de degré 2.

– Le point  $(\sqrt{2}, 1)$  peut-il appartenir à l'amibe  $\mathcal{A}_K(V)$  de  $V$  ?

– Soit  $\overline{\mathcal{A}_K(V)}$  l'adhérence (dans  $\mathbb{R}^2$ ) de l'amibe  $\mathcal{A}_K(V)$  de  $V$ .

Le point  $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$  peut-il appartenir à  $\overline{\mathcal{A}_K(V)}$  ?

– L'ensemble  $\overline{\mathcal{A}_K(V)}$  peut-il contenir un sous-ensemble homéomorphe à un cercle ?

– Trouver un polynôme  $P$  de degré 3 à deux variables et à coefficients dans  $K$  tel que l'adhérence  $\overline{\mathcal{A}_K(W)}$  de l'amibe  $\mathcal{A}_K(W) \subset \mathbb{R}^2$  de la courbe  $W$  définie par  $P$  dans  $(K^*)^2$  ait un sous-ensemble homéomorphe à un cercle.

### Références

- [1] G.M. BERGMAN – « The logarithmic limit-set of an algebraic variety », *Trans. Amer. Math. Soc.* **157** (1971), p. 459–469.
- [2] D.N. BERNSTEIN – « The number of roots of a system of equations », *Funct. Anal. Appl.* **9** (1975), no. 3, p. 183–185.
- [3] H. BUSEMANN – *Convex surfaces*, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, vol. 6, Interscience Publishers, Inc., New York, 1958.
- [4] M. FORSBERG, M. PASSARE & A. TSIKH – « Laurent determinants and arrangements of hyperplane amoebas », *Adv. Math.* **151** (2000), no. 1, p. 45–70.
- [5] I.M. GEL'FAND, M.M. KAPRANOV & A.V. ZELEVINSKY – *Discriminants, resultants, and multidimensional determinants*, Mathematics : Theory & Applications, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1994.
- [6] I. ITENBERG – « Amibes de variétés algébriques et dénombrement de courbes (d'après G. Mikhalkin) », in *Sém. Bourbaki (Vol. 2002/03)*, Astérisque, vol. 294, Société Mathématique de France, Paris, 2004, Exp. n° 921, p. 335–361.
- [7] I. ITENBERG, V. KHARLAMOV & E. SHUSTIN – « Welschinger invariant and enumeration of real rational curves », *Int. Math. Res. Not.* (2003), no. 49, p. 2639–2653.
- [8] ———, « Logarithmic equivalence of the Welschinger and the Gromov-Witten invariants », *Uspekhi Mat. Nauk* **59** (2004), no. 6(360), p. 85–110.

- [9] I. ITENBERG, G. MIKHALKIN & E. SHUSTIN – *Tropical algebraic geometry*, Oberwolfach Seminars, vol. 35, Birkhäuser Verlag, Basel, 2007.
- [10] M. KAPRANOV – « Amoebas over non-Archimedean fields », Prépublication, 2000.
- [11] A. KHOVANSKII & K. KAVEH – « Convex bodies and algebraic equations on affine varieties », Prépublication [arXiv:0804.4095](https://arxiv.org/abs/0804.4095), 2008.
- [12] M. KONTSEVICH & Y. SOIBELMAN – « Homological mirror symmetry and torus fibrations », in *Symplectic geometry and mirror symmetry (Seoul, 2000)*, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2001, p. 203–263.
- [13] G.L. LITVINOV & V.P. MASLOV – « The correspondence principle for idempotent calculus and some computer applications », in *Idempotency (Bristol, 1994)*, Publ. Newton Inst., vol. 11, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998, p. 420–443.
- [14] G.L. LITVINOV, V.P. MASLOV & A.N. SOBOLEVSKIĬ – « Idempotent mathematics and interval analysis », *Vychisl. Tekhnol.* **6** (2001), no. 6, p. 47–70, [arXiv:math.SC/9911126](https://arxiv.org/abs/math/9911126).
- [15] G. MIKHALKIN – « Real algebraic curves, the moment map and amoebas », *Ann. of Math. (2)* **151** (2000), no. 1, p. 309–326.
- [16] ———, « Counting curves via lattice paths in polygons », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **336** (2003), no. 8, p. 629–634.
- [17] ———, « Amoebas of algebraic varieties and tropical geometry », in *Different faces of geometry*, Int. Math. Ser. (N. Y.), vol. 3, Kluwer/Plenum, New York, 2004, p. 257–300.
- [18] ———, « Decomposition into pairs-of-pants for complex algebraic hypersurfaces », *Topology* **43** (2004), no. 5, p. 1035–1065.
- [19] ———, « Enumerative tropical algebraic geometry in  $\mathbb{R}^2$  », *J. Amer. Math. Soc.* **18** (2005), no. 2, p. 313–377 (electronic).
- [20] ———, « Tropical geometry and its applications », in *International Congress of Mathematicians. Vol. II*, Eur. Math. Soc., Zürich, 2006, p. 827–852.
- [21] G. MIKHALKIN & H. RULLGÅRD – « Amoebas of maximal area », *Int. Math. Res. Not.* (2001), no. 9, p. 441–451.
- [22] M. PASSARE & H. RULLGÅRD – « Amoebas, Monge-Ampère measures, and triangulations of the Newton polytope », *Duke Math. J.* **121** (2004), no. 3, p. 481–507.
- [23] J.-J. RISLER – « Construction d’hypersurfaces réelles (d’après Viro) », in *Sem. Bourbaki (Vol. 1992/93)*, Astérisque, vol. 216, Société Mathématique de France, Paris, 1993, Exp. n° 763, p. 69–86.
- [24] L. RONKIN – « On zeros of almost periodic functions generated by functions holomorphic in a multicircular domain », in *Complex analysis in modern mathematics (Russian)*, FAZIS, Moscow, 2001, p. 239–251.
- [25] H. RULLGÅRD – « Stratification des espaces de polynômes de Laurent et la structure de leurs amibes », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **331** (2000), no. 5, p. 355–358.



- [26] ———, « Polynomial amoebas and convexity », Prépublication, Université de Stockholm, 2001.
- [27] B. STURMFELS – *Solving systems of polynomial equations*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 97, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [28] B. TEISSIER – « Du théorème de l'index de Hodge aux inégalités isopérimétriques », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* **288** (1979), no. 4, p. A287–A289.
- [29] O. VIRO – « Gluing of algebraic hypersurfaces, smoothing of singularities and construction of curves », in *Proc. Leningrad Int. Topological Conf. (Leningrad, 1982)*, Nauka, Leningrad, 1983, (en russe), p. 149–197.
- [30] ———, « Gluing of plane real algebraic curves and constructions of curves of degrees 6 and 7 », in *Topology (Proceedings, Leningrad 1982)*, Lecture Notes in Math., vol. 1060, Springer, Berlin, 1984, p. 187–200.
- [31] ———, « Dequantization of real algebraic geometry on logarithmic paper », in *European Congress of Mathematics, Vol. I (Barcelona, 2000)*, Progress in Math., vol. 201, Birkhäuser, Basel, 2001, p. 135–146.
- [32] R.J. WALKER – *Algebraic Curves*, Princeton Mathematical Series, vol. 13, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1950.

---

I. ITENBERG, IRMA, Université Louis Pasteur, 7, rue René Descartes,  
67084 Strasbourg Cedex, France  
*E-mail* : [itenberg@math.u-strasbg.fr](mailto:itenberg@math.u-strasbg.fr)  
*Url* : <http://www-irma.u-strasbg.fr/~itenberg/>

