

U.R.A. 169 du C.N.R.S.

**Séries divergentes et
procédés de resommation**

Journées X-UPS 1991

N° 00000

Juillet 1991

F-91128 Palaiseau Cedex
Tél. : ((33)) (1) 69 33 40 88 • Fax : ((33)) (1) 69 33 30 19
Internet : secret@orphee.polytechnique.fr

Sommaire

Préface	5
Séries Divergentes et Théories Asymptotiques JEAN-PIERRE RAMIS	7
Introduction	7
1 Petite histoire des séries divergentes	8
1.1 La sommation des séries divergentes : que peut-on rêver?	8
1.2 Euler : l'équation fonctionnelle de la fonction ζ et la "série d'Euler" .	15
1.3 Euler, Cauchy, Poincaré et la sommation au plus petit terme	17
1.4 Stokes et les caustiques ; le phénomène de Stokes	19
1.5 La sommation des séries convergentes en dehors de leur disque de convergence : Borel, Lindelöf, Hardy,	21
1.6 Borel et Stieltjes	27
1.7 Poincaré et la théorie asymptotique	28
2 Développements asymptotiques et sommabilité	29
2.1 Les développements asymptotiques Gevrey	29
2.3 La k -sommabilité	33
2.3 La multisommabilité	35
3 Séries divergentes et systèmes dynamiques	41
3.1 Solutions formelles des équations différentielles	41
3.2 Formes normales d'équations différentielles et de difféomorphis- mes .	42
3.3 Perturbations singulières, retard à la bifurcation et canards	46
3.4 Les équations aux q -différences	51
3.5 La multiplicité des procédés "naturels" de sommation, les "bran- ches" des fonctions et la dernière lettre d'Evariste Galois	54
Bibliographie	61

Séries formelles provenant de systèmes différentiels linéaires méromorphes	
MICHÈLE LODAY-RICHAUD	69
Introduction	69
Première partie	71
Système différentiel ou équation différentielle ?	71
Point ordinaire et point singulier	71
Polygone de Newton	71
Point singulier régulier et point singulier irrégulier	72
Etude locale au point ordinaire $x_0 = 0$	72
Etude locale au point singulier régulier $x_0 = 0$	72
Etude locale au point singulier irrégulier $x_0 = 0$	75
Forme normale	78
Forme préparée	78
Phénomène de Stokes	79
Deuxième partie	80
Transformée de Borel formelle d'une série $\hat{f} = \sum_{p \geq 0} f_p x^{p+1}$ sans terme constant	82
Transformée de Borel dans la direction θ d'une fonction f définie près de 0 sur un secteur de sommet 0 bissecté par θ et d'ouverture $\omega > \pi$. .	82
Transformée de Laplace dans la direction θ d'une fonction f définie sur la demi-droite d_θ issue de 0 et de direction θ	83
Opérateurs de ramification ρ_k et $\rho_{1/k}$, $k \in \mathbf{N}$	83
Opérateurs d'accélération $\rho_{(k,k');\theta}$	84
Quelques propriétés de la transformation de Borel	85
Quelques propriétés de la transformation de Laplace	85
Somme dans le cas d'un système de niveau unique $k = 1$	86
Somme dans le cas d'un système de niveau unique k quelconque	87
Somme dans le cas d'un système à deux niveaux k_1 et k_2 ($k_1 < k_2$) . .	89
Somme dans le cas d'un système à un nombre quelconque de niveaux .	91
Appendice	93
Références	98

Procédés formels et numériques de sommation de séries solutions d'équations différentielles	
JEAN THOMANN	101
1 Préliminaires	101
2 Somme d'une série convergente	102
3 Somme d'une série divergente	103
4 Un exemple particulier	105
5 Calculs effectifs.	107
5.1 Décomposition spectrale formelle	107
5.2 Prolongement numérique de la transformée de Borel	108
5.3 Séries de factorielles	109
5.4 Approximation rationnelle directe	111
5.5 Conclusion	112
Bibliographie	113
Séries divergentes de la Mécanique Céleste (problèmes planétaires)	
ALAIN CHENCINER	115
Introduction	115
1 Forme hamiltonienne des équations dans un repère héliocentrique ; approximation keplerienne	116
2 Variation des constantes	119
3 Mouvements séculaires dans l'approximation de Laplace	123
4 Elimination des longitudes moyennes	127
5 Elimination des longitudes des nœuds et des périhélie, séries de Lindstedt	131
6 Divergence des séries de Lindstedt	134

Préface

The series is divergent ; therefore we may
be able to do something with it.

O. Heaviside

Ce volume réunit les textes de presque toutes les conférences données lors des journées annuelles organisées par le Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique au mois de Mai 1991.

Le thème en était “les séries divergentes”. Il s’agissait de montrer aux professeurs de Classes Préparatoires un aspect peu connu et peu enseigné d’un domaine qu’ils connaissent : les séries (convergentes).

D’une part, il est apparu dès le dix-neuvième siècle que les informations algébriques qu’elles contiennent peuvent être transformées en informations analytiques. Dans certains cas elles peuvent donner de très bons procédés d’approximation. Le texte de J.P. Ramis dans ce volume donne un panorama historique très détaillé sur ces questions. Voir aussi le texte de J. Thomann sur les procédés d’approximation.

D’autre part, plusieurs phénomènes font apparaître de telles séries : elles apparaissent souvent comme solutions d’équations différentielles linéaires (voir le texte de M. Loday-Richaud) ou non linéaires (voir le texte de J.P. Ramis). Elles apparaissent aussi lorsqu’on perturbe de tels systèmes et sont alors exprimées comme séries du paramètre de perturbation. C’est le cas notamment pour les équations de la Mécanique Céleste (voir le texte d’A. Chenciner).

Nous tenons ici à remercier les conférenciers pour l’important travail qu’ils ont fourni et qui, nous l’espérons, a bénéficié et bénéficiera aux professeurs de Classes Préparatoires : d’abord pour les conférences de haute tenue qui ont permis de se faire une idée précise du sujet (notamment celle¹ de J. Laskar qui expliquait l’aspect “physique” de celle d’A. Chenciner) ; ensuite pour les textes écrits qu’ils ont fourni : ceux-ci sont à la fois des textes d’introduction (on peut même en tirer des exercices si l’on veut) et des textes d’introduction à divers aspects modernes de la recherche dans les domaines correspondants.

Nicole Berline et Claude Sabbah
Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique

¹La conférence de J. Laskar n’a pas été rédigée. Néanmoins, on pourra consulter avec profit l’article qu’il a publié dans la revue *La Recherche* (1991).

Séries Divergentes et Théories Asymptotiques

JEAN-PIERRE RAMIS

Break on through to the other side.

Jim Morrison.

...all prohibitions are made only to be broken, must be broken

A. S. Byatt, Possession.

Introduction

Ces deux exposés sont consacrés à un très vieux sujet et à quelques uns de ses nombreux développements récents. Dans une première partie nous dégagerons l'efficacité théorique et pratique de l'utilisation des séries divergentes sur quelques exemples historiques. La seconde partie sera consacrée aux fondements rigoureux de la théorie des séries divergentes, dont on dispose aujourd'hui grâce à des progrès très récents¹, et à ses relations avec la théorie des développements asymptotiques. Nous terminerons, dans la troisième partie, par quelques applications aux systèmes dynamiques algébriques (ou analytiques).

¹L'exposé de cette théorie est (depuis peu...) possible avec des outils mathématiques élémentaires et classiques. Les démonstrations restent souvent longues, techniques et délicates et nécessitent quelques instruments récents; il est impossible de les exposer ici.

1. Petite histoire des séries divergentes

Il ne s'agit pas de développer un historique complet de l'utilisation des séries divergentes en Mathématiques (ce travail reste à faire...), mais d'expliquer sur quelques exemples l'intérêt du sujet, de constater l'efficacité de cette utilisation, tout en dégagant quelques méthodes et en préparant les éclaircissements théoriques qui viendront en 2. J'ai choisi pour cela de décrire quelques étapes décisives : chez LEIBNIZ, EULER, CAUCHY, STOKES, STIELTJES, POINCARÉ, BOREL, HARDY. (Je reviendrai plus loin sur l'évolution récente.)

1.1. La sommation des séries divergentes : que peut-on rêver ?

Pour la rédaction de ce paragraphe j'ai utilisé la très agréable présentation de [Du].

Je commencerai par citer quelques phrases du mathématicien anglais J.E. LITTLEWOOD extraites de la préface au livre posthume de son ami G.H. HARDY *Divergent series* [H 1] :

The title holds curious echoes of the past, and of Hardy's past. Abel wrote in 1828 : "Divergent series are the invention of the devil and it is shameful to base on them any demonstration whatsoever". In the ensuing period of critical revision they were simply rejected. Then came a time when it was found that something after all could be done about them. This is now a matter of course, but in the early years of the century the subject, while in no way mystical or unrigorous, was regarded as sensational, and about the present title, now colourless there hung an aroma of paradox and audacity.

Si l'on manipule des séries convergentes et leurs sommes, c'est en général pour démontrer des égalités numériques ou fonctionnelles. Par exemple :

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$$

ou

$$\log 2 = -\log \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2 \cdot 2} + \frac{1}{2^3 \cdot 3} + \dots$$

Il est intéressant de disposer de plusieurs égalités de ce type : l'égalité ci-dessus est évidemment meilleure que la précédente pour un calcul numérique approché de $\log 2$ (la convergence est plus rapide). D'où l'intérêt d'étendre les manipulations aux séries divergentes et à leurs "sommes" éventuelles pour augmenter l'arsenal des identités disponibles. C'est dans cet esprit qu'ont travaillé les mathématiciens du XVIII-ème siècle et en particulier L. EULER. Il est clair que pour fonder un tel calcul la sommation des séries divergentes doit respecter certaines règles : en gros on doit pouvoir remplacer dans les calculs utilisant les opérations usuelles une série par sa somme sans contradiction.

Soit \mathcal{D} la \mathbf{C} -algèbre des séries numériques à termes complexes (convergentes ou non) : les opérations sont l'addition, la multiplication par les scalaires et le produit de Cauchy. On désigne par \mathcal{C} la sous-algèbre des séries **absolument** convergentes. On dispose d'un homomorphisme de \mathbf{C} -algèbres

$$S : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{C}$$

qui associe à une série convergente $\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sa somme $S(\sigma)$.

On veut définir un opérateur S^* de sommation pour “des” séries divergentes. Voici les premières règles qui paraissent raisonnables pour S^* (on peut donner les variantes sur les suites) :

(s₁) Règle de “régularité” : si σ converge $S(\sigma) = S^*(\sigma)$ (i.e. S^* prolonge S) ;

(s₂) Règle “d'invariance par translation” :

$$S^*\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) = a_0 + S^*\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)$$

(s₃) S^* est \mathbf{C} -linéaire ;

(s₄) S^* est un homomorphisme pour la multiplication.

Pratiquement, il est naturel de définir **des** procédés de sommation S_1^* s'appliquant à des ensembles \mathcal{D}_1 de séries : $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}$. On distinguera les cas où \mathcal{D}_1 est un sous-espace vectoriel de \mathcal{D} et où S_1^* satisfait les règles 1, 2, et 3, et ceux où \mathcal{D}_1 est une sous-algèbre de \mathcal{D} et où S_1^* satisfait les règles 1, 2, 3 et 4. Ce dernier cas, évidemment beaucoup plus utile pour générer des identités intéressantes, va se révéler le plus difficile à fonder théoriquement (la condition 4 n'est pas facile à assurer...).

Une idée naturelle est de remplacer “séries numériques” $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ par “séries formelles” $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et de tenter ensuite de “faire $x = 1$ ”.

On dispose alors d'un opérateur de sommation S défini sur la \mathbf{C} -algèbre différentielle² des séries convergentes $(\mathbf{C}\{x\}; x^2 d/dx)$, et à valeurs dans la \mathbf{C} -algèbre différentielle $(\mathcal{O}_0; x^2 d/dx)$ des germes de fonctions holomorphes à l'origine. Le problème est de définir des algèbres différentielles \mathcal{A}_1 de séries formelles divergentes : $\mathbf{C}\{x\} \subset \mathcal{A}_1 \subset \mathbf{C}[[x]]$ et des opérateurs $S_1^* : \mathcal{A}_1 \rightarrow ?$ vérifiant des règles “raisonnables” :

(S₁) Règle de “régularité” : S_1^* prolonge S ;

(S₂) S_1^* est un homomorphisme d'algèbres différentielles ;

² Une \mathbf{C} -algèbre différentielle est une \mathbf{C} -algèbre munie d'un endomorphisme \mathbf{C} -linéaire δ qui est une dérivation : $\delta(ab) = a\delta(b) + \delta(a)b$.

(S₃) Si J est l'opérateur "développement asymptotique" (voir plus loin § 1.7), JS_1^* est l'identité de \mathcal{A}_1 .

Il reste à décider où l'application

$$S_1^* : \mathcal{A}_1 \longrightarrow ?$$

prend ses valeurs. Cela ne peut être \mathcal{O}_0 : la condition 3 imposerait alors $\mathcal{A}_1 = \mathbf{C}\{x\}$. En fait nous verrons qu'il faut "polariser" en choisissant une direction d issue de l'origine. On prendra ensuite \mathcal{A}_d , la \mathbf{C} -algèbre différentielle des fonctions holomorphes sur des germes de secteurs bissectés par d (d'ouverture et rayons arbitrairement petits). Pour un direction d fixée on verra qu'il y a **deux** opérateurs "naturels" de sommation S_d^+ et S_d^- (sommations latérales). Pour des séries à termes réels on a envie de prendre pour ? les germes de fonctions analytiques réelles sur les germes de $\mathbf{R}^+ - \{0\}$ ou $\mathbf{R}^- - \{0\}$ à l'origine. Ce point de vue se rapproche de celui d'EULER. Nous verrons qu'il conduit à certaines difficultés.

Revenons aux séries numériques et considérons les deux exemples suivants :

$$\sigma_0 : 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

et

$$\sigma_1 : 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots$$

Supposons que ces séries appartiennent à un ensemble de séries \mathcal{D}_1 muni d'un opérateur de sommation S^* satisfaisant les conditions (s₂), et (s₃), et notons respectivement S_0 et S_1 les sommes de nos deux séries. On a $S_0 = 1 - S_0$, d'où $S_0 = 1/2$, et

$$S_1 = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots$$

$$S_1 = 0 + 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \dots,$$

d'où

$$2S_1 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots,$$

et $S_1 = 1/4$. Ainsi

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{2}$$

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots = \frac{1}{4}.$$

Il semble que LEIBNIZ ait été le premier à attribuer la valeur $1/2$ à la somme de $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$.

Toujours en considérant nos deux exemples on peut deviner deux procédés de sommation qui paraissent raisonnables et permettent de justifier le raisonnement purement formel que l'on vient de faire. Ces deux procédés qui donnent lieu à de larges généralisations sont la **sommation par moyennes** et la **sommation d'Abel**.

L'idée de la sommation par moyennes est d'essayer de construire une "mesure" positive dl de **masse totale un** sur des parties de \mathbf{N} et de définir la somme de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

par

$$\int s_n dl(n)$$

où s_n désigne la somme partielle

$$s_n = \sum_{p=0}^n a_p.$$

Le résultat doit être indépendant des premiers termes de la série. La "mesure" doit donc être nulle sur toute partie finie de \mathbf{N} , ce qui conduit à une contradiction si on la suppose σ -additive! Il faut donc être moins exigeant et remplacer la notion de mesure par celle de "densité" [FGA]. Si l est une telle densité on notera $l(E)$ la masse d'un sous-ensemble E de \mathbf{N} (si elle existe). La plus simple façon de construire une telle densité est d'utiliser la moyenne arithmétique de Cesaro :

On répartit la masse un sur les $n + 1$ points $0, 1, \dots, n$,³ et on "passe à la limite en n " :

Les moyennes

$$t_n = \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_n}{n + 1}$$

correspondant à la série $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ tendent vers $1/2$ quand $n \rightarrow +\infty$ (s_n prend alternativement les valeurs 1 ou 0).

Si on note E l'ensemble des nombres pairs, $l(E) = \lim \mu_n(E) = 1/2$.

Ce procédé ne somme pas la série $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots$. Il faut le faire opérer deux fois : on trouve bien alors $1/4$ pour somme.

Plus généralement on peut répartir, pour chaque entier n la masse un sur un sous-ensemble **fini** de \mathbf{N} et supposer que si E est fini, $l(E) = 0$.

Si on suppose de plus que μ_n est porté par $[1, n]$, cela revient à se donner une *matrice de Toeplitz régulière*, c'est à dire une matrice triangulaire infinie :

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ a_{10} & a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n0} & a_{n1} & \cdot & \cdot & \dots & a_{nn} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

³La mesure correspondante est $\mu_n = \frac{1}{n+1}(\delta_0 + \dots + \delta_n)$.

dont les coefficients sont des réels positifs, la somme des lignes étant constamment égale à un et les colonnes étant des suites convergeant vers zéro.

La matrice colonne des t_n s'obtient alors en multipliant A par la matrice colonne des sommes partielles s_n .

La composition de deux procédés de moyenne correspond évidemment au produit des matrices. Par exemple

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1/2 & 1/2 & 0 & \cdots \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \end{pmatrix}$$

correspond à la méthode de Cesaro et

$$C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 3/4 & 1/4 & 0 & \cdots \\ 11/18 & 5/18 & 2/18 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \end{pmatrix}$$

à son itération utilisée plus haut.

A la matrice de Toeplitz

$$T = \begin{pmatrix} C_0^0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 1/2 C_1^0 & 1/2 C_1^1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (1/2)^n C_n^0 & (1/2)^n C_n^1 & \cdot & \cdot & \cdots & (1/2)^n C_n^n & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

correspond la *transformation d'Euler*. Cette transformation se traduit au niveau des séries par la transformation

$$b_n = \frac{1}{2^{n+1}} (C_n^0 a_0 + C_n^1 a_1 + \cdots + C_n^n a_n),$$

qui s'interprète au niveau de séries formelles associées par une transformation homographique (admettant 1 pour point fixe) :

$$\hat{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$\hat{g}(y) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n y^n$$

$$\hat{g}(y) = \hat{f}\left(\frac{y/2}{1 - y/2}\right).$$

Cette transformation a été introduite par EULER comme **accélération de convergence**. Par exemple, appliquée à

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$$

elle donne

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots,$$

ce qui accélère le calcul de $\log 2$.

Au lieu d'utiliser des mesures μ_n paramétrées par $n \in \mathbf{N}$ et à support fini, on peut utiliser des mesures μ_t paramétrées par $t > 0$ et à support quelconque. Un exemple fondamental est la "densité de Borel" associée à la famille de mesures de Poisson

$$\mu_t = e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \delta_n.$$

Cette méthode, due à E. BOREL (1899) fournit pour somme de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

la limite (si elle existe)

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} S(t),$$

où

$$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{t^n}{n!}.$$

Nous reviendrons plus loin sur cette méthode qui est **fondamentale**. Si on l'applique à la "série de Leibniz"

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

on trouve encore

$$\lim e^{-t} \text{cht} = 1/2.$$

Après la description des méthodes de moyennes passons à celle des méthodes *abéliennes*. La plus simple est basée sur le théorème d'Abel :

Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est convergente, sa somme est donnée par

$$\lim_{x \rightarrow 1; x < 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

D'où l'idée, que l'on trouve chez EULER, de prendre dans certains cas de séries divergentes, comme **définition** de la somme de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

la limite

$$\lim_{x \rightarrow 1; x < 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

si elle existe.

Si l'on applique cette méthode à la série de Leibniz, on trouve

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 1; x < 1} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}$$

comme on s'y attendait...

Pour la série

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots$$

on trouve

$$1 - 2x + 3x^2 + \dots = \frac{1}{(1+x)^2}$$

dont la limite est 1/4.

Cette méthode se généralise de la façon suivante :

On pose $x = e^{-t}$. Alors $x^n = e^{-tn}$.

Soit $\{\lambda_n\}$ une suite strictement croissante de réels strictement positifs tendant vers $+\infty$ **donnée**. A la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

on associe (si elle existe pour tout $t > 0$ assez petit) la fonction

$$f_t(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-t\lambda_n},$$

et (toujours sous réserve d'existence) on **définit** la somme par

$$\lim_{t \rightarrow 0; t > 0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-t\lambda_n}.$$

Nous reviendrons plus loin sur les exemples suivants :

$\lambda_n = n \log n$ si $n > 0$, et $\lambda_0 = 0$ dû à LINDELÖF,

et

$\lambda_n = n \log n \log(\log n)$ si $n > 2$, et $\lambda_n = 0$, si $n = 0, 1, 2$, dû à HARDY [H 2] (1941).

1.2. Euler : l'équation fonctionnelle de la fonction ζ et la "série d'Euler"

On trouvera plus de détails sur les questions évoquées ci-dessous dans [H 1], [Bar].

Le mémoire [E 1] de L. EULER commence par

Le rapport que je me propose de développer ici regarde les sommes de ces deux séries infinies générales

$$1^m - 2^m + 3^m - 4^m + 5^m - 6^m + 7^m - 8^m + \dots,$$

$$\frac{1}{1^m} - \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} - \frac{1}{4^m} + \frac{1}{5^m} - \frac{1}{6^m} + \frac{1}{7^m} - \frac{1}{8^m} + \dots,$$

Le but d'EULER est d'étudier l'égalité

$$\frac{1^{s-1} - 2^{s-1} + 3^{s-1} - \dots}{\frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \dots} = -\frac{(s-1)!(2^s-1)}{(2^{s-1}-1)\pi^s} \cos\left(\frac{1}{2}s\pi\right).$$

Plus précisément il se propose de "vérifier" cette égalité pour tout s entier, et pour $s = 1/2$, $s = 3/2$.

Il a besoin pour cela de sommer les séries divergentes

$$1^m - 2^m + 3^m - 4^m + 5^m - 6^m + 7^m - 8^m + \dots$$

Il emploie la méthode d'Abel. Pour $m = 0$ et 1 on retrouve les deux séries étudiées plus haut et leurs sommes respectives ($1/2$ et $1/4$). Plus généralement il obtient (pour $k > 1$) :

$$1^{2k} - 2^{2k} + 3^{2k} - \dots = 0$$

$$1^{2k-1} - 2^{2k-1} + 3^{2k-1} - \dots = (-1)^{k-1} \frac{2^{2k} - 1}{2k} B_k.$$

La fonction ζ de Riemann est définie par

$$\zeta(s) = 1^{-s} + 2^{-s} + 3^{-s} + \dots$$

pour $\text{Ré } s > 0$.

On lui associe la fonction

$$\eta(s) = 1^{-s} - 2^{-s} + 3^{-s} - \dots$$

On a

$$\eta(s) = (1 - 2^{1-s})\zeta(s)$$

et la célèbre équation fonctionnelle de la fonction ζ due à B. RIEMANN s'écrit

$$(2^{s-1} - 1)\eta(1-s) = -(2^s - 1)\pi^{-s} \cos\left(\frac{1}{2}s\pi\right)\Gamma(s) \eta(s).$$

On reconnaît l'identité devinée par EULER 100 ans avant RIEMANN...

Notons qu'un calcul théoriquement fondé des sommes de séries divergentes utilisées fournit une **preuve rigoureuse** de la formule pour s entier. (EULER ne prétendait pas donner une telle démonstration...)

La façon dont EULER concevait la justification du calcul avec les séries divergentes est bien dégagée dans son étude de la "série d'Euler"

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n!$$

Cette justification était en grande partie "expérimentale" mais très soignée. On trouvera beaucoup de détails sur cet exemple dans [Bar]. On peut décrire en termes modernes l'idée générale d'EULER de la façon suivante : il s'agit, étant donnée la série de terme général a_n , de trouver un (ou des) *programme(s)* engendrant les a_n . Citons EULER (1749) :

Mais j'ai déjà remarqué dans une autre occasion qu'il faut donner au mot de somme une signification plus étendue et entendre par là une fraction ou une autre expression analytique, laquelle étant développée suivant les principes de l'analyse produise la même série dont on cherche la somme.

Il écrit ailleurs

...summa cujusque seriei est valor expressionis illius finitae, ex cujus evolutione illa series oritur.

EULER décrit (dans [E 2]) quatre procédés (heuristiques) pour sommer

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n!$$

Il vérifie par des calculs numériques l'accord entre ces diverses approches. Nous ne décrivons pas ces procédés (ceci est très bien fait dans [Bar]). Celui qui nous intéresse le plus pour la suite est basé sur le fait que la série formelle correspondante

$$\hat{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n! x^{n+1}$$

est une *solution formelle* de l'équation différentielle d'Euler

$$x^2 y' + y = x.$$

Parmi les autres méthodes il y a la transformation en la fraction continue convergente $(1/1+1/1+1/1+2/1+2/1+3/1+3/1+\dots)$ et l'itération de la transformation d'Euler suivie de la sommation au plus petit terme décrite ci-dessous. (Cette méthode est très bien expliquée dans le traité d'Analyse de LACROIX.) La méthode basée sur l'équation différentielle d'Euler, liée à la *sommation de Borel-Laplace*, va jouer un rôle fondamental dans la suite. (La sommation de Borel-Laplace est elle-même liée à la densité de Borel décrite plus haut [H 1]...)

Plus tard HARDY [H 2] a sommé la série d'Euler en utilisant le procédé abélien décrit plus haut :

$$\lim_{t \rightarrow 0; t > 0} \left(x - 1! x^2 + 2! x^3 + \sum_{n=3}^{+\infty} (-1)^n n! x^{n+1} e^{-tn \log n \log(\log n)} \right).$$

1.3. Euler, Cauchy, Poincaré et la sommation au plus petit terme

Au début du chapitre VIII du tome II des *Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste* [P] H. POINCARÉ écrit :

Il y a entre les géomètres et les astronomes une sorte de malentendu au sujet de la signification du mot convergence. Les géomètres, préoccupés de la parfaite rigueur et souvent trop indifférents à la longueur de calculs inextricables dont ils conçoivent la possibilité, sans songer à les entreprendre effectivement, disent qu'une série est convergente quand la somme des termes tend vers une limite déterminée, quand même les premiers termes diminueraient très lentement. Les astronomes, au contraire, ont coutume de dire qu'une série converge quand les vingt premiers termes, par exemple, diminuent très rapidement, quand même les termes suivants devraient croître indéfiniment. Ainsi, pour prendre un exemple simple, considérons les deux séries qui ont pour terme général $\frac{1000^n}{1.2.3...n}$ et $\frac{1.2.3...n}{1000^n}$.

Les géomètres diront que la première série converge, et même qu'elle converge rapidement,...; mais il regarderont la seconde comme divergente...

Les astronomes, au contraire, regarderont la première comme divergente,...; et la seconde comme convergente

Les deux règles sont légitimes : la première dans les recherches théoriques ; la seconde dans les applications numériques....

On peut ainsi parler de séries convergentes “au sens des géomètres” ou “au sens des astronomes”. Notons que pratiquement, dans les applications, on constate que, presque toujours, les séries convergentes “au sens des astronomes” ont un terme général qui croît très vite après avoir d'abord diminué. Ainsi, ce que POINCARÉ envisageait comme **possibilité** est en fait la règle. Il n'a pas tenu compte de ce phénomène, qu'il connaissait pourtant très bien, dans sa définition des développements asymptotiques. Les défauts majeurs de la théorie de POINCARÉ sont liés à cette remarque. Pour les surmonter il faut se tourner vers les travaux d'autres mathématiciens. La “série d'Euler” (voisine de celle citée par POINCARÉ), dont nous avons déjà parlé, $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n! x^{n+1}$ va nous permettre de commencer à comprendre ce qu'il faut faire. À la fin nous disposerons d'une théorie, la *théorie asymptotique exacte* où l'antinomie entre les deux notions de convergence distinguées par POINCARÉ disparaîtra.

L'analyse de la série d'Euler qui va suivre est classique (*cf.* par exemple OLVER [O]).

Soit

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t/x}}{1+t} dt.$$

On note

$$f_n(x) = x - 1! x^2 + 2! x^3 - \dots + (-1)^{n-1} (n-1)! x^n$$

et

$$R_n(x) = (-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{t^n e^{-t/x}}{1+t} dt.$$

On vérifie facilement que

$$f(x) = f_n(x) + R_n(x)$$

et que

$$|R_n(x)| < \int_0^{+\infty} t^n e^{-t/x} dt = n! x^{n+1}.$$

Ainsi le reste $R_n(x)$ est du même signe que le premier terme omis $(-1)^n n! x^n$ et majoré en valeur absolue par la valeur absolue de celui-ci. En raisonnant comme dans le cas d'une série alternée vérifiant le "critère spécial", on en déduit les encadrements :

$$f_{2p}(x) < f(x) < f_{2p+1}(x)$$

pour tout entier $p > 1$.

A $x > 0$ fixé cela ne permet pas (comme dans le cas d'une série vérifiant le critère spécial et dont le terme général tend vers zéro) d'obtenir un encadrement arbitrairement précis de $f(x)$ (ici le terme général tend rapidement vers $+\infty\dots$). Mais on obtient un encadrement **dont la qualité dépend de x** . On va voir plus précisément qu'elle est exponentiellement bonne quand x est "petit".

Il est clair qu'à $x > 0$ **fixé** la meilleure approximation de $f(x)$ par $f_n(x)$ est obtenue (par cette méthode) quand l'écart $|f_{2p+1}(x) - f_{2p}(x)| = (2p)! x^{2p}$ est le plus petit possible, c'est à dire quand le terme général de la série d'Euler

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n! x^{n+1}$$

est en valeur absolue **le plus petit possible**. On a donc intérêt à **arrêter** la sommation à l'indice correspondant : c'est la **sommation au plus petit terme**.

Ici le rapport de deux termes consécutifs est en valeur absolue nx . A $x > 0$ fixé et n variable, il est inférieur à un pour $x < n$ et supérieur à un pour $x > n$. Ainsi le terme général décroît jusqu'à $n = N \simeq \frac{1}{x}$, puis croît ensuite indéfiniment. Pour x "petit" on a une série "convergente au sens des astronomes".

La qualité de l'approximation est $N! x^N \simeq N! N^{-N}$. En utilisant la formule de Stirling

$$N! \sim \sqrt{2\pi N} N^N e^{-N},$$

on voit que l'approximation est de l'ordre de $\sqrt{2\pi N} e^{-N} \simeq \sqrt{2\pi/x} e^{-1/x}$, c'est à dire **exponentiellement bonne**.

Suivant un concept dégagé par H. POINCARÉ en 1886 (*cf.* ci-dessous §1.7), on dira que la série d'Euler

$$\widehat{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n! x^{n+1}$$

est le *développement asymptotique* de la fonction

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t/x}}{1+t} dt$$

à l'origine.

En pratique, dans de très nombreux cas où le développement asymptotique a des coefficients **réels de signes alternés**, l'erreur est de même signe que le premier terme omis et majorée en valeur absolue par la valeur absolue de celui-ci. L'analyse que nous venons de faire s'étend. On constate également que, très souvent, l'erreur est exponentiellement petite d'un certain ordre (de l'ordre de e^{-1/x^k} , pour un entier k convenable). C'est par exemple le cas pour la *série de Stirling*

$$\sum_{r=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{r-1} B_r}{2r(2r-1)z^{2r-1}}$$

comme l'a montré CAUCHY [C].

Il est plus étonnant de constater que l'essentiel du résultat précédent, c'est à dire le fait que **la sommation au plus petit terme fournit une précision exponentielle** (éventuellement d'un certain ordre k) s'applique pratiquement à des développements asymptotiques à termes complexes beaucoup plus généraux que les développements alternés. Ce fait constaté expérimentalement depuis plusieurs siècles et utilisé largement par les mathématiciens, physiciens et astronomes n'a reçu une explication satisfaisante que très récemment avec l'étude systématique des *développements asymptotiques Gevrey* (*cf.* ci-dessous §2.1). En pratique on constate que le plus petit terme est souvent obtenu pour $N \simeq a/x$ (ou $N \simeq a/x^k$), $a > 0$ dépendant du problème. Dans les problèmes délicats il peut être difficile de prévoir la place précise du plus petit terme (ou le plus petit terme ne convient plus) on prend alors un "pseudo plus petit terme", à $x \in \mathbf{C}$ fixé, en **choisissant** pour N la partie entière de $a/|x|^k$ (k et a étant donnés par la structure du problème étudié).

1.4. Stokes et les caustiques ; le phénomène de Stokes

Le physicien anglais STOKES connaissait bien (dès le début du XIX-ème siècle...) la distinction entre séries convergentes "au sens des géomètres" et "au sens des astronomes". Il disait des premières qu'elles étaient souvent d'abord divergentes puis convergentes et des secondes qu'elles étaient d'abord convergentes puis divergentes. De plus il avait observé un point essentiel dont nous avons parlé plus haut (qui semble avoir complètement échappé à POINCARÉ) : la "sommation au plus petit

terme” est en général “**exponentiellement précise**”. Ainsi les calculs numériques avec les séries divergentes sont paradoxalement beaucoup plus précis et rapides que ceux utilisant les séries convergentes ! STOKES a donné une très belle illustration de ce principe en calculant (avec des séries divergentes) les franges des caustiques en optique ondulatoire.

Les caustiques sont les enveloppes des rayons lumineux en optique géométrique. En optique ondulatoire on se place sur une petite transversale à la caustique et il s’agit de déterminer où sont les franges, c’est à dire où la fonction *intensité lumineuse* s’annule.

La théorie (due à l’astronome anglais AIRY) permet de montrer qu’avec des unités convenables l’intensité lumineuse sur la transversale est proportionnelle au carré de l’intégrale (d’Airy)

$$Ai(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{1}{3}t^3 + zt\right) dt$$

où z est le paramètre de déplacement sur la transversale et s’annule sur la caustique.

On disposait pour ce problème d’excellentes expérimentations physiques : MILLER avait mesuré la position des 25 premières franges avec pratiquement quatre décimales exactes. Il s’agissait de confronter les valeurs théoriques (*i.e.* les zéros de la fonction Ai) avec l’expérience. Le premier résultat est dû à AIRY : en utilisant formules de quadrature et tables de logarithmes à dix décimales il obtient une valeur correcte (avec quatre décimales) de la position de la première frange. Il fait ensuite la remarque que la “fonction d’Airy” Ai est solution de “l’équation différentielle d’Airy”

$$y'' - zy = 0.$$

Cela lui permet d’obtenir un développement en série convergent de $Ai(z)$ à l’origine (*i.e.* suivant les puissances croissantes de z) :

$$Ai(z) = 3^{-2/3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{3n}}{9^n n! \Gamma(n + \frac{2}{3})} - 3^{-4/3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{3n+1}}{9^n n! \Gamma(n + \frac{4}{3})}.$$

La fonction Ai est entière, *i.e.* le rayon de convergence de cette série est infini. Elle converge “au sens des géomètres” ! En utilisant cette série AIRY obtient la position de la deuxième frange. Les calculs sont laborieux : la série est bien convergente mais “d’abord divergente”... On est toujours loin des succès expérimentaux quand arrive STOKES. Ce dernier a l’idée tout à fait remarquable de chercher pour la fonction Ai un développement à l’infini au lieu de l’origine (*i.e.* en puissances croissantes de $1/z$). Il obtient ce développement en utilisant l’équation différentielle d’Airy. Notons que ce développement est un peu plus compliqué qu’une série et aussi qu’il fait intervenir non pas la variable z mais une **ramification** $z^{1/4}$ de celle-ci. Ce dernier fait va poser un problème à STOKES qu’il mettra de nombreuses années à

résoudre. (La solution sera la découverte du *phénomène de Stokes* qu'il fera à 3 heures du matin une nuit de mars 1857 [Sto 3]⁴). La fonction $Ai(z)$ admet pour développement asymptotique à l'infini l'expression

$$\frac{1}{\pi^{3/2}} z^{-1/4} e^{-2/3t^{3/2}} 3^{-2/3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(n + \frac{5}{6})\Gamma(n + \frac{1}{6})}{n!} (3/4)^n (-z)^{-3n/2}.$$

La série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(n + \frac{5}{6})\Gamma(n + \frac{1}{6})}{n!} (3/4)^n (-z)^{-3n/2}$$

est divergente (au sens des géomètres!) mais convergente au sens des astronomes dès que z n'est pas trop petit. Cela permet à Stokes de calculer **très facilement** la position de **toutes** les franges avec quatre décimales exactes, sauf pour la première où il n'a que trois décimales et perd par rapport à AIRY (z est trop petit...). L'accord avec l'expérience est complet, mais la théorie, extrêmement efficace numériquement, reste infondée théoriquement...

1.5. La sommation des séries convergentes en dehors de leur disque de convergence : Borel, Lindelöf, Hardy,...

Soit $\hat{f}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série **convergente** de rayon de convergence $R > 0$.

Soit $x_0 \in \mathbf{C}$ tel que $|x_0| > R$. On souhaite sommer la série divergente $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_0^n$.

On peut essayer d'utiliser pour cela le **prolongement analytique** de la somme f de \hat{f} en dehors du disque de convergence. Cela fournira un "bon" procédé de sommation au sens indiqué plus haut puisque le prolongement analytique respecte sommes, produits et dérivations et est injectif. Si l'on essaie de préciser cette méthode on rencontre immédiatement des problèmes d'existence (il n'y a peut-être pas de chemin continu γ joignant l'origine à x_0 et tel que l'on puisse prolonger analytiquement f le long de γ , et dans le pire des cas on ne peut même pas prolonger f en dehors de son disque de convergence) et d'unicité (des prolongements analytiques le long de chemins différents peuvent donner des prolongements différents). Dans cette partie nous nous limiterons aux seuls prolongements le long du segment $\gamma = [O, x_0]$ joignant l'origine à x_0 . En utilisant de tels prolongements on prolonge analytiquement la fonction f à un ouvert étoilé (par rapport à l'origine) maximal (contenant le disque de convergence) appelé "étoile de Mittag-Leffler" de \hat{f} . Nous

⁴London, March 19/57. When the cat's away the mice can play. You are the cat and I am the poor little mouse. I have been doing what I guess you won't let me do when we are married, sitting up till 3 o'clock in the morning fighting hard against a mathematical difficulty. Some years ago I attacked an integral of Airy's, and after a severe trial reduced it to a readily calculable form. But there was a difficulty about it which, though I tried till I almost made myself ill, I could not get over and at last I have to give it up and profess myself unable to master it. I took it up again a few days ago, and after a two or three days' fight, the last of which I sat up till 3, I at last mastered it...

noterons $\text{Et}(\widehat{f})$ ce domaine. Désignons par $(f, \text{Et}(\widehat{f}))$ le prolongement analytique de f (défini sur $\{|x| < R\}$) à $\text{Et}(\widehat{f})$. On vérifie immédiatement que (en un sens que l'on laisse préciser au lecteur), l'opérateur de "somme" :

$$\widehat{f} \rightarrow (f, \text{Et}(\widehat{f}))$$

est un homomorphisme injectif d'algèbres différentielles.

Ce qui précède fournit (dans certains cas) un bon procédé théorique de sommation de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_0^n$, mais on aimerait évidemment disposer d'un procédé "explicite" de calcul de la somme correspondante $f(x_0)$ (*i.e.* d'un ou plusieurs algorithmes de calcul de celle-ci, de préférence programmables sur machine et conduisant à un résultat raisonnablement précis en un temps raisonnable...). Je vais expliquer quelques uns de ces procédés (sans me préoccuper ici de leur efficacité numérique).

Il faut d'abord remarquer que le prolongement analytique lui-même (en revenant à la définition) fournit un algorithme de calcul explicite (que l'on peut exploiter sur ordinateur [CC]). On est ramené à un nombre fini d'étapes du type suivant :

La série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_1)^n$ est convergente, de rayon de convergence $R_1 > 0$. Soit alors x_2 avec $|x_2 - x_1| < R_1$. On a, au voisinage de x_2 :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_1)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (x - x_2)^n$$

et il s'agit de calculer les b_n en fonction des a_n . Il est clair que c'est possible, mais en utilisant des séries convergentes. (Il s'agit donc d'un procédé transcendant.)

Passons à d'autres méthodes. Il semble raisonnable d'utiliser les procédés abéliens de sommation dont nous avons parlé plus haut.

Soit $\Lambda = \{\lambda_n\}$ une suite strictement croissante de réels strictement positifs tendant vers $+\infty$ donnée. A la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

on associe (si elle existe pour $t > 0$ assez petit) la fonction

$$f_t(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-t\lambda_n}.$$

Il s'agit donc d'abord de choisir la suite $\{\lambda_n\}$ de telle sorte que la série définissant $f_t(x)$ converge. Compte tenu de la convergence de la série donnée $\widehat{f}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ on a des inégalités du type

$$|a_n| < CA^n,$$

pour $C > 0$ et $A > 0$ convenables ; on trouve immédiatement une suite simple Λ telle que la série définissant $f_t(x_0)$ converge pour tout $t > 0$ et tout $x_0 \in \mathbf{C}$:

$$\lambda_n = n \log n \text{ si } n > 0, \text{ et } \lambda_0 = 0 \text{ (LINDELÖF).}$$

Il y a des variantes de ce procédé :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x_0^n}{\Gamma(1 + \delta n)} \text{ (MITTAG-LEFFLER) ;}$$

$$\lim_{\zeta \rightarrow 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1 + \zeta n)}{\Gamma(1 + n)} a_n x_0^n \text{ (LEROY).}$$

On a les résultats suivants :

THÉORÈME (cf. [H 1] 4.11, p.p. 77-79). — Soit $\hat{f} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ une série convergente. Soit x_0 un point de l'étoile de Mittag-Leffler de \hat{f} . On note $f(x_0)$ la valeur en ce point du prolongement analytique de la somme (ordinaire) de \hat{f} . On a :

(i) soit $\lambda_n = n \log n$ si $n > 0$, et $\lambda_0 = 0$. Alors la limite

$$\lim_{t \rightarrow 0; t > 0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n e^{-t \lambda_n} \text{ existe et est égale à } f(x_0) ;$$

(ii) la limite

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x_0^n}{\Gamma(1 + \delta n)} \text{ existe et est égale à } f(x_0) ;$$

(iii) la limite

$$\lim_{\zeta \rightarrow 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1 + \zeta n)}{\Gamma(1 + n)} a_n x_0^n \text{ existe et est égale à } f(x_0).$$

En d'autres termes les procédés de LINDELÖF, MITTAG-LEFFLER, LEROY permettent de sommer la série convergente \hat{f} dans son étoile de Mittag-Leffler.

Il est clair que ces procédés sont adaptés à la croissance au plus géométrique des a_n . Ils ne s'appliquent pas par exemple à la série d'Euler $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n n! x^{n+1}$. Pour essayer de sommer une série divergente de ce type par une méthode abélienne, il faut choisir une suite Λ croissant "beaucoup plus vite". Le choix suivant (dû à G. H. HARDY [H 2] (1941)) est bien adapté à la série d'Euler et aux séries ayant un type analogue de croissance des coefficients (séries "Gevrey" : cf. § 2.1 ci-dessous⁵) :

$$\lambda_n = n \log n \log(\log n) \text{ si } n > 2, \text{ et } \lambda_n = 0, \text{ si } n = 0, 1, 2.$$

Avant de tester l'efficacité du procédé correspondant sur des séries divergentes, il est naturel de le tester sur les séries convergentes ! Le résultat suivant (dû à HARDY) permet de se rassurer :

THÉORÈME (cf. [H 2]). — Soit $\hat{f} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ une série convergente. Soit x_0 un point de l'étoile de Mittag-Leffler de \hat{f} . On note $f(x_0)$ la valeur en ce point du

⁵ Croissance du type $|a_n| < C(n!)^s A^n$; $C, A, s > 0$

prolongement analytique de la somme (ordinaire) de \hat{f} . Soit $\lambda_n = n \log n \log(\log n)$ si $n > 2$, et $\lambda_n = 0$, si $n = 0, 1, 2$. Alors la limite

$$\lim_{t \rightarrow 0; t > 0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n e^{-t\lambda_n}$$

existe et est égale à $f(x_0)$.

Nous verrons plus loin que ce procédé de sommation de HARDY (récemment redécouvert et généralisé par JURKAT) est très efficace : il somme les séries “multisommables” dans leur “étoile de Mittag-Leffler généralisée” [J].

Les deux théorèmes précédents sont démontrés d’abord pour le cas de la série géométrique $\hat{f}(x) = 1 + x + x^2 + \dots$ de somme $\frac{1}{1-x}$. On passe ensuite aisément au cas général en utilisant le théorème de Cauchy.

Nous verrons plus loin que beaucoup de solutions séries formelles d’équations fonctionnelles analytiques sont multisommables (c’est par exemple le cas des solutions d’équations différentielles analytiques). Malheureusement les solutions séries formelles d’équations aux q -différences analytiques (même linéaires) ne sont pas Gevrey mais seulement q -Gevrey (cf. 3.4 ci-dessous). (On a des estimations du type $|a_n| < Cq^{n^2}A^n$, avec $q > 1$, $A > 0$.) Ainsi ces séries ne sont pas multisommables. De plus il est clair que l’on ne peut pas leur appliquer le procédé de sommation de HARDY. On peut alors essayer de choisir une suite Λ croissant encore plus vite, par exemple : $\lambda_n = \mu n^2$ ou, plus généralement, $\lambda_n = \mu n^a$ ($\mu > 0$, $a > 1$). Les procédés de sommation abélienne correspondants ont été étudiés récemment par A. FRUCHARD [F2]. Malheureusement (et conformément à une mise en garde de G. H. HARDY à propos des sommations abéliennes définies par des suites Λ croissant “trop vite”) les procédés de sommation correspondants ne permettent plus de sommer une série convergente dans son étoile de Mittag-Leffler, mais seulement en général dans un domaine strictement plus petit. Cela se voit déjà sur la série géométrique : on n’obtient pas toute l’étoile (ici $\mathbf{C} - [1, +\infty)$) mais seulement le domaine image par la fonction exponentielle de la partie gauche de la bande $\{0 < \text{Im } z < 2\pi\}$ délimitée par les deux droites $\mathbf{R} e^{i\pi/2a}$ et $i + \mathbf{R} e^{-i\pi/2a}$. (On peut récupérer toute l’étoile de Mittag-Leffler en faisant tendre, à x_0 fixé dans l’étoile, le paramètre a vers 1).

Revenons maintenant à la méthode de sommation par “densité de Borel” (cf. 1.1) en l’appliquant à une série entière convergente $\hat{f}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$. Soit $x \in \mathbf{C}$, avec $|x| < R$.

Posons $S_n = \sum_{p=0}^n a_p x^p$. On a $S_{n+1} - S_n = a_{n+1} x^{n+1}$.

Soient, pour $t > 0$, $S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} S_n$ et $F(t) = e^{-t} S(t)$. On a

$$F'(t) = e^{-t}(S'(t) - S(t)) = e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} x^{n+1} \frac{t^n}{n!}.$$

D'où

$$F(t) = a_0 + \int_0^t F'(t) = a_0 + \int_0^t e^{-u} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} \frac{x^{n+1} u^n}{n!} du$$

$$F(t) = a_0 + \int_0^t e^{-u} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} \frac{(xu)^n}{n!} d(xu)$$

$$F(t) = a_0 + \int_0^{t\xi} e^{-\xi/x} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} \frac{\xi^n}{n!} d\xi$$

On en déduit aisément que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = a_0 + \int_0^{+\infty} e^{-\xi/x} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} \frac{\xi^n}{n!} d\xi$$

Pour faciliter la suite de l'exposition on suppose que $a_0 = 0$ (on revient aisément au cas général).

Compte tenu du calcul qui précède, on est conduit à introduire la série “transformée de Borel formelle” $\hat{\mathcal{B}}\hat{f} = \hat{\phi}$ de \hat{f} :

$$\hat{\phi}(\xi) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{\xi^{n-1}}{(n-1)!}.$$

La série $\hat{\phi}$ a un rayon de convergence infini. Sa somme ϕ est donc une **fonction entière**. On vérifie qu'elle a une **croissance exponentielle** au plus **d'ordre un**. On a

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = \mathcal{L}(\phi)(x) = \int_0^{+\infty} \phi(\xi) e^{-\xi/x} d\xi.$$

On retrouve ainsi la somme f de \hat{f} dans son disque de convergence comme “transformée de Laplace” de la fonction entière ϕ .

On peut plus généralement remplacer le “contour d'intégration” $\mathbf{R}^+ = [0, +\infty]$ dans l'intégrale de Laplace par n'importe quelle demi-droite d issue de l'origine. On obtient :

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = \mathcal{L}_d(\phi)(x) = \int_d \phi(\xi) e^{-\xi/x} d\xi.$$

Nous allons voir que l'on peut souvent exploiter ce formalisme pour obtenir aussi la somme de \hat{f} dans une partie de son étoile de Mittag-Leffler, en dehors du disque de convergence.

Pour $x \in \mathbf{C}$ nous appellerons “disque de Borel associé à x ” et noterons D_x le disque fermé de diamètre $[O, x]$. On a le

THÉORÈME ([Bo 1]). — Soit \hat{f} une série convergente. Si x_0 est un point de l'étoile de Mittag-Leffler de \hat{f} (différent de 0) tel que le disque de Borel D_{x_0} soit contenu dans l'étoile $\text{Et}(\hat{f})$, alors l'intégrale

$$\mathcal{L}_d(\phi)(x) = \int_d \phi(\xi) e^{-\xi/x} d\xi$$

(où ϕ est la somme de la transformée de Borel formelle de \hat{f} et d la demi-droite issue de l'origine contenant x_0) converge et est égale à $f(x_0)$.

Malheureusement le procédé de sommation par la méthode de Borel-Laplace ne permet pas en général de calculer $f(x_0)$ en tout point x_0 de l'étoile de Mittag-Leffler de \hat{f} , mais seulement dans une région ouverte convexe convenable incluse dans l'étoile et contenant le disque de convergence. Dans les cas les plus simples on obtient un polygone convexe (borné ou non). Par exemple pour la série géométrique on trouve le demi-plan $\{\text{Re } x < 1\}$.

Il est en fait facile de sommer \hat{f} dans toute son étoile de Mittag-Leffler en introduisant une variante à paramètre de la méthode de sommation de Borel-Laplace, la méthode de sommation de Borel-Laplace de niveau k :

Soit $k > 0$. On introduit l'opérateur de ramification en considérant les fonctions (définies sur la surface de Riemann du Logarithme) $\rho_k(f)(x) = f(x^{1/k})$.

On pose $\hat{\mathcal{B}}_k = (\rho_k)^{-1} \hat{\mathcal{B}} \rho_k$ et $\mathcal{L}_{k;d} = (\rho_k)^{-1} \mathcal{L}_{d^k} \rho_k$ (où la direction d^k correspond à d par la ramification ρ_k).

On désigne par D_k l'image du disque de Borel D par la représentation conforme $x \rightarrow x^{1/k}$; (si $0 < k < 1/2$, D_k est dessiné sur la surface de Riemann du Logarithme). Pour $k = 2$, par exemple, D_2 est limité par une demi lemniscate de Bernoulli. On dira que D_k est un k -disque de Borel. On note D_{k,x_0} le k -disque de Borel de "diamètre" $[O, x_0]$.

THÉORÈME ([Bo 1]). — Soit $k > 0$. Soit \hat{f} une série convergente. Si x_0 est un point de l'étoile de Mittag-Leffler de \hat{f} (différent de 0) tel que le k -disque de Borel D_{x_0} soit contenu dans l'étoile $\text{Et}(\hat{f})$, alors l'intégrale

$$\mathcal{L}_{k;d}(\phi)(x)$$

(où ϕ est la somme de la transformée de Borel formelle $\hat{\mathcal{B}}_k(\hat{f})$ de \hat{f} et d la demi-droite issue de l'origine contenant x_0) converge et est égale à $f(x_0)$.

Pour $1/2 < k$ l'angle à l'origine d'un k -disque de Borel est π/k . Plus k est grand plus les k -disques de Borel sont "effilés". On voit facilement que si x_0 est un point fixé de l'étoile $\text{Et}(\hat{f})$, il existe toujours un réel $k_0 > 0$ tel que, pour tout $k > k_0$ le k -disque de Borel D_{x_0} soit contenu dans l'étoile. On peut alors calculer $f(x_0)$ en utilisant la méthode intégrale de Borel-Laplace de n'importe quel niveau $k > k_0$.

Si l'on note S l'opérateur de sommation d'une série convergente dans son disque de convergence les méthodes de sommation que nous venons de décrire se symbolisent par les opérateurs de sommation (dans la direction d) :

$$S_d = \mathcal{L}_d S \hat{\mathcal{B}} \quad (\text{Borel-Laplace});$$

$$S_{k;d} = \mathcal{L}_{k;d} S \hat{\mathcal{B}}_k \quad (\text{Borel-Laplace de niveau } k).$$

1.6. Borel et Stieltjes

En 1886, dans [St] STIELTJES étudie la sommation de la série d'Euler pour les valeurs négatives de la variable. C'est beaucoup plus difficile que pour les valeurs positives, car il s'agit maintenant de sommer une série divergente à termes tous positifs. STIELTJES propose le résultat suivant :

$$a^{-1} + a^{-2} + 2! a^{-3} + 3! a^{-4} + \dots = 0,0455055614585\dots,$$

où $e^a = 10^{10}$ ($a \simeq 23,025851$), et montre que la qualité de l'approximation est exponentielle (de l'ordre de $e^{-a} \sqrt{2\pi/a}$, c'est à dire de 10^{-10}).

La méthode de STIELTJES a le mérite de fournir une somme **réelle** pour une série à termes réels. Ce n'est pas le cas de la méthode de sommation de Borel : l'axe réel négatif est une direction singulière pour celle-ci et on a donc deux opérateurs de sommation distincts $S_{\mathbf{R}-}^+$ et $S_{\mathbf{R}-}^-$. On vérifie que la somme de Stieltjes n'est rien d'autre que la moyenne arithmétique des deux sommes de Borel. Les sommes de Borel diffèrent de la somme de Stieltjes par un imaginaire pur de l'ordre de $10^{-10} i$. On a vu que les sommes de Borel fournissent des homomorphismes injectifs d'algèbres différentielles et se prêtent donc parfaitement au calcul avec des séries divergentes. On peut montrer qu'il en est de même de la somme de Stieltjes (et l'idée correspondante a été récemment considérablement généralisée par J. ECALLE sous le nom de "sommation de Borel-Laplace médiane" ; cf. aussi [Di] Ch. 1, E, p. 8⁶ et [MR 3], p. 358). Ce résultat est plus étonnant qu'il n'y paraît à première vue. Regardons en effet ce qui se passe avec la série convergente (développement à l'origine de $\sqrt{1+x}$) :

$$1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \dots$$

Si on veut sommer cette série en $x = -2$, soit

$$1 - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{5}{8} - \dots$$

l'un des moyens naturels est d'utiliser le prolongement analytique en évitant la singularité en $x = -1$. Mais il y a alors **deux** solutions naturelles correspondant aux deux "branches" de la fonction $\sqrt{1+x}$. On obtient $\pm i$. Il est clair qu'ici il n'y a **pas** de solution naturelle réelle. (Si $f(x)$ était une somme naturelle réelle pour $x < -1$, on aurait $f(x)^2 = 1+x < 0$, ce qui est impossible...)

Dans le premier cas, les deux sommes de Borel correspondent aussi en un certain sens (sur lequel nous reviendrons en 3.5) à deux "branches" d'une fonction (cette idée est déjà chez STOKES : *analogous to a change of sign in a radical* [Sto 2]), mais

⁶Half the discontinuity in form occurs on reaching the Stokes ray, and half on leaving it the other side.

le changement de branche (phénomène de Stokes) est naturellement dans un groupe à un paramètre. (L'automorphisme d'algèbre différentielle correspondant au phénomène de Stokes est l'exponentielle d'une dérivation qui commute à la dérivation de l'algèbre : cette dérivation est la *dérivation étrangère pointée* de J. ECALLE.) Cette situation n'existe plus pour le changement de branche usuel (algébrique) du deuxième cas (*cf.* 3.5 ci-dessous).

1.7. Poincaré et la théorie asymptotique

La théorie asymptotique classique est due à POINCARÉ. Ce dernier l'a élaborée avec l'idée de l'appliquer aux équations différentielles analytiques : sa principale motivation était de donner un sens à une solution série formelle divergente d'une telle équation différentielle, c'est à dire d'"incarner" une solution **formelle** en une **vraie solution**. Il faut noter que la définition de POINCARÉ que nous allons donner ci-dessous ne tient aucun compte de ses propres remarques sur le caractère d'abord "convergent" puis "divergent" des séries asymptotiques (qu'il appelle convergence au sens des astronomes) que l'on rencontre usuellement (et qui conduit à la "somme au plus petit terme"), voir ci-dessus. On sait aujourd'hui que ce caractère est en fait général pour les solutions formelles d'équations différentielles analytiques.

DÉFINITION. — *Soit V un secteur ouvert du plan complexe (ou de la surface de Riemann du Logarithme) de sommet 0. Soient f une fonction holomorphe sur V et $\hat{f} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \in \mathbf{C}[[x]]$. On dit que f est asymptotique à \hat{f} sur V si pour tout sous-secteur compact W de $V \cup \{0\}$ et tout entier $n \in \mathbf{N}$, il existe un réel $M_{W,n} > 0$ tel que*

$$|x|^{-n} \left| f(x) - \sum_{p=0}^{n-1} a_p x^p \right| < M_{W,n},$$

pour tout $x \in W$.

On note $f \sim \hat{f}$ ou $\hat{f} = J(f)$.

L'ensemble des fonctions holomorphes sur V admettant un développement asymptotique à l'origine (muni de $+, \cdot, x^2 d/dx$) est une \mathbf{C} -algèbre différentielle notée $A(V)$. On a une suite exacte d'algèbres différentielles :

$$0 \longrightarrow A^{<0}(V) \longrightarrow A(V) \xrightarrow{J} \mathbf{C}[[x]] \longrightarrow 0.$$

La surjectivité de l'application J est le théorème de Borel-Ritt : on peut "incarner" toute série formelle \hat{f} par une "vraie" fonction f holomorphe sur V . Malheureusement cette incarnation n'est **pas unique**, il y a un **choix** pour f (modulo l'espace "d'erreurs" $A^{<0}(V)$, qui est formé des fonctions holomorphes sur V infiniment plates à l'origine). En d'autres termes on ne dispose pas d'une application "naturelle" $\hat{f} \rightarrow f$, avec $J(f) = \hat{f}$, on n'a pas de théorie de sommation au sens défini plus haut. C'est là l'un des défauts majeurs de la théorie de POINCARÉ (*the central deficiency of Poincaré's specification* [Di], *the lack of uniqueness of the function represented by an asymptotic expansion contrasts with the sum of a convergent series* [O]).

Pour appliquer la théorie de POINCARÉ aux équations différentielles analytiques, il faut partir d'une solution série formelle \hat{f} d'une équation analytique

$$G(x, y, \dots, y^{(n)}) = 0$$

($G(x, Y_0, \dots, Y_n)$ est une fonction analytique de $n+2$ variables et $G(x, \hat{f}, \dots, \hat{f}^{(n)}) = 0$) et "incarner" \hat{f} par une vraie solution f ($G(x, f, \dots, f^{(n)}) = 0$). L'ensemble "d'erreurs" (incertitudes sur f) possibles est alors considérablement réduit (pour une équation linéaire il est évidemment de dimension finie alors que $A^{<0}(V)$ est de dimension infinie), mais il n'est malheureusement pas trivial en général. Faute d'unicité on a en tout cas un résultat très satisfaisant d'existence. C'est le "théorème fondamental des développements asymptotiques" :

THÉORÈME. — Soient $G(x, Y, \dots, Y_n)$ une fonction analytique de $n+2$ variables et $\hat{f} \in \mathbb{C}[[x]]$ une solution série formelle de l'équation différentielle :

$$(1) \quad G(x, y, \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (\text{i.e. } G(x, \hat{f}, \dots, \hat{f}^{(n)}) = 0).$$

Alors il existe un réel $k > 0$ tel que pour tout secteur ouvert V de sommet l'origine, d'ouverture $< \pi/k$, de rayon assez petit, il existe une fonction f solution de l'équation différentielle (1), asymptotique sur V à \hat{f} .

Sous cette forme (i.e. sans aucune hypothèse restrictive) ce résultat est assez récent et dû à RAMIS et SIBUYA [RS]. Entre les premiers cas particuliers établis par POINCARÉ et [RS] de nombreux auteurs ont apporté progressivement des améliorations.

Nous allons brièvement indiquer ci-dessous comment il est possible de surmonter les défauts de la théorie asymptotique de POINCARÉ pour parvenir à une "**théorie asymptotique exacte**". Les étapes sont : les développements asymptotiques Gevrey, la k -sommabilité, la multisommabilité⁷.

2. Développements asymptotiques et sommabilité

2.1. Les développements asymptotiques Gevrey

Commençons par quelques remarques sur des phénomènes que l'on rencontre systématiquement en utilisant "pratiquement" des développements asymptotiques et qui ne sont pas pris en compte par la théorie de Poincaré :

(a) On constate que la plupart des séries formelles $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ que l'on rencontre explicitement satisfont à une condition du type

$$|a_n| < C (n!)^{1/k} A^n,$$

⁷De nombreux courants de recherche actuels vont dans le même sens : Théories de la résurgence et de l'accélération d'ECALLE [E 1, 2, 3], travaux de l'école Russe : IL'YASHENKO..., Hyperasymptotics [BH],...

où $C, A, k > 0$ sont des réels convenables ; on peut par exemple ouvrir une des “bibles” de fonctions spéciales” [AS], [MOS], [Lu] et vérifier expérimentalement cette observation ;

(b) On constate que, en pratique, l’incertitude qui porte sur une fonction f cherchée, de développement asymptotique connu⁸ n’est pas seulement une fonction holomorphe infiniment plate sur un secteur, mais plus précisément une fonction holomorphe à **décroissance exponentielle** (d’un certain ordre $k > 0$) :

$$|f(x)| < C e^{-a/x^k},$$

pour des réels convenables $C, a > 0$;

(c) Quand x varie le rang du plus petit terme est en général proche du rang $N =$ Partie entière de b/x^k (pour $b, k > 0$ convenablement choisis : par exemple $k = 1, b = 1$ pour la série d’Euler). Cela conduit à définir une “quasi-sommation au plus petit terme” : on prend pour “somme” de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ le nombre $\sum_{n=0}^N a_n x^n$, avec $N =$ Partie entière de b/x^k ; b et k étant “bien choisis”. On observe expérimentalement que si ce choix est bon le procédé est numériquement très efficace.

Il existe une modification simple de la théorie asymptotique de Poincaré qui explique parfaitement ces trois observations. C’est la théorie asymptotique Gevrey⁹.

DÉFINITION. — Soit $k > 0$ un réel. Soit V un secteur ouvert du plan complexe (ou de la surface de Riemann du Logarithme) de sommet 0. Soient f une fonction holomorphe sur V et $\hat{f} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \in \mathbf{C}[[x]]$. On dit que f est asymptotique Gevrey d’ordre $s = 1/k$ à \hat{f} sur V si pour tout sous-secteur compact W de $V \cup \{0\}$ et tout entier $n \in \mathbf{N}$, il existe des réels $C_W, A_W > 0$ tels que

$$|x|^{-n} \left| f(x) - \sum_{p=0}^{n-1} a_p x^p \right| < C (n!)^{1/k} A^n,$$

pour tout $x \in W$.

L’ensemble des fonctions holomorphes sur V admettant un développement asymptotique Gevrey d’ordre $s = 1/k > 0$ à l’origine (muni de $+, \cdot, x^2 d/dx$) est une \mathbf{C} -algèbre différentielle notée $A_{1/k}(V)$.

⁸Incertaince qui peut venir d’une marge d’erreur ou du fait qu’il y a plusieurs solutions “naturelles” au problème (ambiguïtés).

⁹On montre l’équivalence entre les trois propriétés (a), (b), (c) convenablement formulées. J’ai remarqué l’équivalence entre (a) et (b) en 1978 ; celle entre (a) et (c) m’a été signalée un peu plus tard par B. MALGRANGE.

Si V est un secteur ouvert d'ouverture $< \pi/k$ ("petit secteur") on a une suite exacte d'algèbres différentielles :

$$0 \longrightarrow A^{<-k}(V) \longrightarrow A_{1/k}(V) \xrightarrow{J} \mathbf{C}[[x]]_{1/k} \longrightarrow 0.$$

La surjectivité de l'application J est le théorème de Borel-Ritt-Gevrey (que l'on prouve en utilisant une "transformation de Laplace incomplète").

On a l'analogie du théorème fondamental des développements asymptotiques, le **Théorème fondamental des développements asymptotiques Gevrey** [RS 1] :

THÉORÈME. — Soient $G(x, Y, \dots, Y_n)$ une fonction analytique de $n+2$ variables et $\hat{f} \in \mathbf{C}[[x]]_{1/k}$ une solution série formelle Gevrey d'ordre $1/k$ de l'équation différentielle :

$$(1) \quad G(x, y, \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (\text{i.e. } G(x, \hat{f}, \dots, \hat{f}^{(n)}) = 0).$$

Alors il existe un réel $k' > 0$ tel que pour tout secteur ouvert V de sommet l'origine, d'ouverture $< \inf(\pi/k, \pi/k')$, de rayon assez petit, il existe une fonction f solution de l'équation différentielle (1), asymptotique sur V à \hat{f} au sens Gevrey d'ordre $1/k$.

Ce théorème prend tout son intérêt si l'on tient compte du théorème de MAILLET [M] :

THÉORÈME. — Soient $G(x, Y, \dots, Y_n)$ une fonction analytique de $n+2$ variables et $\hat{f} \in \mathbf{C}[[x]]$ une solution série formelle de l'équation différentielle :

$$(1) \quad G(x, y, \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (\text{i.e. } G(x, \hat{f}, \dots, \hat{f}^{(n)}) = 0).$$

Alors il existe un réel $k > 0$ tel que la série formelle \hat{f} soit Gevrey d'ordre $1/k$.

MAILLET a démontré ce théorème en utilisant des estimations directes. Le résultat est en général loin d'être optimal (le réel k n'est pas le plus petit possible). Nous reviendrons plus loin sur cette question (cf. 3.1 ci-dessous).

Pour préparer la suite (et expliquer les relations entre les observations (a) et (b) ci-dessus) je vais traduire plus "géométriquement" le concept de série Gevrey en introduisant la notion de "quasi-fonction k -précise". (Dans la littérature en référence on utilise en fait un peu de cohomologie des faisceaux, mais je souhaite ici communiquer les idées fondamentales en restant à un niveau technique élémentaire.)

On considère un secteur ouvert V de \mathbf{C} (qui peut être un disque épointé D^*) ou de la surface de Riemann du Logarithme. On va utiliser des recouvrements $\{V_i\}_{i \in I}$ de V . Tous ces recouvrements seront supposés finis, les V_i ayant le même rayon que V , et les intersections 3 à 3 étant vides. On supposera aussi $I = [1, m]$ et on numérottera les V_i dans le sens des aiguilles d'une montre. On notera $V_{i,i+1} = V_i \cap V_{i+1}$ (si $V = D^*$ "m+1=0"). On considèrera des "0-cochaînes holomorphes" ; ce sont des suites $\{f_i\}$, avec f_i holomorphe sur V_i et les "1-cobords" associés (1-cochaînes) : ce sont les suites $\{h_i\}$, avec $h_i = f_{i+1} - f_i$.

Soit $k > 0$. Par définition une quasi-fonction k -précise sur le secteur V est la donnée d'une 0-cochaîne holomorphe $\{f_i\}$ associée à un recouvrement $\{V_i\}_{i \in I}$, les $h_i = f_{i+1} - f_i$ étant à décroissance exponentielle d'ordre k sur $V_{i,i+1}$. De plus on "identifie" deux telles données $(\{f_i\}; \{V_i\}_{i \in I})$ et $(\{g_j\}; \{W_j\}_{j \in J})$ si chaque fois que l'intersection $V_i \cap W_j$ est non vide, $f_i - g_j$ est à décroissance exponentielle d'ordre k sur cette intersection.

En d'autres termes la notion de quasi-fonction k -précise formalise la notion de fonction holomorphe "connue à précision exponentielle d'ordre k près".

Une quasi-fonction k -précise est dite bornée si les f_i le sont.

En recouvrant un disque épointé D^* par des secteurs d'ouverture $< \pi/k$ et en utilisant le théorème de Borel-Ritt-Gevrey, on peut associer à toute série Gevrey $\hat{f} \in \mathbf{C}[[x]]_{1/k}$ une quasi-fonction k -précise **unique** (modulo l'identification faite) : sa quasi-somme (analogue à la fonction somme d'une série convergente) ; si $\{f_i\}$ représente la quasi-somme de \hat{f} , $f_i \sim \hat{f}$ sur V_i au sens Gevrey d'ordre $1/k$. Tout comme une fonction holomorphe bornée dans un disque épointé D^* est somme d'une série convergente (principe des singularités inexistantes de Riemann), une quasi-fonction k -précise bornée dans un disque épointé D^* est quasi-somme d'une série Gevrey d'ordre $1/k$.

Ce résultat (qui comme le résultat usuel est prouvé en utilisant l'intégrale de Cauchy [Ra 1], [Si 1,2], [Si 3] Theorem 3.2) est **essentiel**. Grace à lui nous disposons d'une méthode "cohomologique" pour prouver qu'une série est Gevrey : cela se vérifie sur des "corrections infiniment plates" dont il s'agit d'étudier la décroissance exponentielle. Cette méthode s'est révélée plus puissante que les méthodes usuelles (estimation directe des coefficients, théorèmes des fonctions implicites,...). Elle permet entre autres une linéarisation des problèmes. (*cf.* 3.)

Les bases de la théorie asymptotique Gevrey et de la théorie de la k -sommabilité (*cf.* 2.3, ci-dessous), que j'ai retrouvées et développées à partir de 1978, datent en fait du début de ce siècle et sont dues au mathématicien anglais G. WATSON [Wat 2, 3]. Il ne semble pas que WATSON ait eu beaucoup de succès avec ces travaux et ses idées ont été bien oubliées¹⁰. On trouve encore aujourd'hui des échos des dures

¹⁰Il faut toutefois signaler que ces travaux ont motivé la théorie des classes de fonctions quasi-analytiques de Denjoy-Carleman [Ca] (via [Ne]), qui réapparaît dans les dernières recherches de J. ECALLE sur la sommabilité des séries divergentes : "fonctions cohésives".

critiques qu'a du subir WATSON dans deux des plus fameux (et des meilleurs...) livres sur les théories asymptotiques [Di], [O] : DINGLE écrit à propos des "développements asymptotiques Gevrey" et de la sommabilité associée introduits par WATSON :

At the cost of considerable complication the central deficiency of Poincaré's specification can be removed...

Enough has been said to exemplify the involved nature of this definition... Confirmation along these lines of a complete asymptotic expansions demands too much advance and advanced knowledge... to make the idea deceptively straightforward as it appears at root, a workable basis of definition except for simple asymptotic expansions derived by elementary means...

OLVER est encore plus dur [O], p. 543 :

Unfortunately a satisfactory definition of complete validity is unavailable. Another drawback to Watson's theory is the need for properties of the remainder term which are likely to be available only when a realistic bound for the remainder term is known. The theory is then largely unnecessary.

Nous espérons que la suite de ces notes convaincra le lecteur de la totale inexactitude de ces jugements. (L'erreur d'appréciation est très surprenante dans le cas de DINGLE qui a parfaitement compris l'importance des erreurs exponentiellement petites en théorie asymptotique et est donc passé très près du bon point de vue!)

2.3. La k -sommabilité

Soit $k > 0$. Si V est un secteur ouvert d'ouverture $< \pi/k$ ("petit secteur") on a vu que l'on a une suite exacte d'algèbres différentielles :

$$0 \longrightarrow A^{<-k}(V) \longrightarrow A_{1/k}(V) \xrightarrow{J} \mathbf{C}[[x]]_{1/k} \longrightarrow 0.$$

La situation est très différente si V est un secteur ouvert d'ouverture $> \pi/k$ ("grand secteur"). On a alors une suite exacte d'algèbres différentielles :

$$0 \longrightarrow A_{1/k}(V) \xrightarrow{J} \mathbf{C}[[x]]_{1/k} \longrightarrow 0.$$

Dans ce cas l'application J n'est plus surjective. Elle est par contre injective, d'après un résultat de WATSON [Wat 2] :

THÉORÈME. — *Soient un réel $k > 0$ et un secteur ouvert V , de sommet l'origine, d'ouverture $> \pi/k$. Soit f une fonction holomorphe sur V , à décroissance exponentielle d'ordre k sur V . Alors f est identiquement nulle.*

Ce théorème est une conséquence du théorème de Phragmén-Lindelöf (qui est une variante du principe du maximum).

Ainsi, sur un "grand secteur", pour la somme d'une série formelle Gevrey, on perd l'existence, mais on gagne l'**unicité**. Cela conduit à la notion suivante de sommabilité :

THÉORÈME. — Soient un réel $k > 0$ et une direction d fixés. Une série formelle \hat{f} est dite k -sommable dans la direction d , s'il existe une fonction f holomorphe sur un secteur V , de bissectrice d , d'ouverture $> \pi/k$, asymptote à \hat{f} au sens Gevrey d'ordre $1/k$ sur V .

Dans ces conditions la fonction f est unique (au secteur de définition V près), d'après le théorème de Watson. On dira que f est la **somme** de \hat{f} dans la direction d au sens de la k -sommabilité. On note $f = S_{k;d} \hat{f}$, et on désigne par $\mathbf{C}\{x\}_{1/k;d}$ l'ensemble des séries k -sommables dans la direction d . On vérifie immédiatement que $\mathbf{C}\{x\}_{1/k;d}$ est une sous-algèbre différentielle de $\mathbf{C}[[x]]_{1/k}$, et que l'application

$$S_{k;d} : \mathbf{C}\{x\}_{1/k;d} \rightarrow A_d$$

est un homomorphisme injectif d'algèbres différentielles. (On a noté A_d l'algèbre des germes de fonctions holomorphes sur des secteurs ouverts bissectés par d , d'ouverture et rayons arbitraires.)

Cette définition de la k -sommabilité est agréable (et fort utile; par exemple pour **vérifier** la k -sommabilité d'une série solution formelle d'une équation fonctionnelle analytique), mais elle ne permet pas de **calculer** explicitement la somme. On utilise pour cela une définition équivalente (l'équivalence est facile) :

DÉFINITION. — Soient un réel $k > 0$ et une direction d fixés. Une série formelle \hat{f} est dite k -sommable dans la direction d , si sa transformée de Borel formelle de niveau k : $\hat{\phi} = \hat{\mathcal{B}}_k \hat{f}$ est convergente et si sa somme (usuelle) $\phi = S \hat{\phi}$ se prolonge analytiquement en une fonction (toujours notée) ϕ holomorphe et à croissance exponentielle d'ordre au plus k sur un secteur ouvert bissecté par d .

Dans ces conditions on dit que

$$f(x) = k \int_d \phi(\xi) e^{-\xi^k/x^k} \xi^{k-1} d\xi = \mathcal{L}_{k;d} \hat{f}(x)$$

est la somme de \hat{f} dans la direction k , au sens de la k -sommabilité.

L'opérateur

$$\hat{\mathcal{B}}_k : \mathbf{C}[[x]] \rightarrow \mathbf{C}[[x]]$$

a été défini en 1.5. On notera que l'opérateur de Laplace de niveau k : $\mathcal{L}_{k;d}$, introduit dans cette définition, a un domaine de définition plus **large** que l'opérateur de même nom introduit en 1.5. On a

$$S_{k;d} = \mathcal{L}_{k;d} \cdot_d S \hat{\mathcal{B}}_k.$$

Pour $k = 1$ on retrouve un procédé de sommation dû à E. BOREL (sommation de Borel : en fait le procédé original de BOREL est un peu plus général).

On peut aussi sommer une série k -sommable dans la direction d en utilisant une méthode abélienne, la sommation de HARDY-JURKAT (qui n'utilise pas explicitement le paramètre k) :

THÉORÈME. — Soit $k > 0$. Soit d une direction issue de l'origine. Soit $\hat{f} \in \mathbf{C}[[x]] = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série formelle k -sommable dans la direction d . Sa somme f dans la direction d se prolonge analytiquement le long d'un intervalle ouvert maximal γ_d porté par d en une fonction toujours notée f . Alors, si x_0 est un point de γ_d :

$$\lim_{t \rightarrow 0; t > 0} \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \sum_{n=3}^{+\infty} a_n x^n e^{-tn \log n \log(\log n)} \right) \text{ existe et est égale à } f(x_0).$$

On démontre ce résultat dû à JURKAT [J] (notre énoncé est légèrement plus précis que celui de [J]), en se ramenant (en utilisant des résultats de l'auteur de ces notes) au cas où les coefficients a_n de la série k -sommable $\sum a_n x^n$ sont les "moments" d'une fonction ϕ définie sur $[0, a] \subset \mathbf{R}^+$ à décroissance exponentielle d'ordre k à l'origine¹¹ : $a_n = \int_0^a \phi(t) t^{-(n+1)} dt$.

Pour préparer l'étude de la multisommabilité on va reformuler la notion de série k -sommable de façon un peu plus "géométrique" en utilisant la notion de quasi-fonction :

Soient $k > 1/2$ et $\hat{f} \in \mathbf{C}[[x]]_{1/k}$. Par définition une k -suite associée à \hat{f} , dans la direction d , est une suite (f_1, f_2) , où f_2 est la quasi-fonction k -précise quasi-somme de \hat{f} et où f_1 est une fonction holomorphe sur un secteur V de \mathbf{C} , de bissectrice d et d'ouverture $> \pi/k$; f_1 étant égal comme quasi-fonction k -précise à la restriction de f_2 à V .

D'après le théorème de Watson, si une telle k -suite existe elle est unique. On vérifie immédiatement qu'une telle k -suite existe si et seulement si \hat{f} est k -sommable dans la direction d ; de plus f_1 est alors la somme de \hat{f} , dans la direction d , au sens de la k -sommabilité.

2.3. La multisommabilité

Après la découverte par Emile BOREL de la Borel-sommabilité, rapidement généralisée en " k -sommabilité" par LEROY [Le] et NEVANLINNA [Ne], de nombreux mathématiciens ont cherché à montrer que les solutions séries formelles des équations différentielles algébriques sont toujours k -sommables. C'était déjà le problème étudié par MAILLET dans [M] en 1903. Malheureusement, comme je l'ai annoncé en 1979 dans [Ra 2], ceci est faux, pour une raison au fond assez évidente, et il est étonnant que cette remarque n'ait pas été faite antérieurement. Intuitivement, si $k \neq k'$, les procédés de k -sommabilité et k' -sommabilité sont "assez loin l'un de

¹¹Dans le cas où $k = 1$ et où la fonction ϕ est à valeurs réelles positives la somme de Borel peut être calculée en transformant la série de puissances $\sum a_n x^n$ en une **fraction continue** convergente (LAGUERRE, STIELTJES, BOREL [Bo 1] Chap. 2, PADÉ...).

l'autre" et ne sont guère comparables : si $k < k'$, les estimations asymptotiques exigées pour la k' -sommabilité sont **plus** strictes ; par contre l'ouverture du secteur exigée (supérieure à π/k') est plus petite (on est **moins** strict sur l'ouverture du secteur). Cette intuition est confirmée par le théorème ("taubérien") suivant [Ra 7] :

THÉORÈME. — Soient k et k' deux réels, avec $k' > k > 0$. Alors

$$\mathbf{C}[[x]]_{1/k} \cap \mathbf{C}[[x]]_{1/k'} = \mathbf{C}\{x\}.$$

Pour construire le contre-exemple cherché, on est alors conduit à considérer la somme \hat{f} d'une solution formelle \hat{f}_1 k_1 -sommable d'un opérateur différentiel linéaire algébrique D_1 et d'une solution formelle \hat{f}_2 k_2 -sommable d'un opérateur différentiel linéaire algébrique D_2 . Cette somme est solution d'un opérateur différentiel linéaire algébrique D .

L'exemple le plus simple consiste à prendre pour \hat{f}_1 la série d'Euler, et pour \hat{f}_2 la série d'Euler où l'on a remplacé x par x^2 . Ainsi \hat{f}_1 est 1-sommable, \hat{f}_2 est 2-sommable, mais

$$\hat{f} = \hat{f}_1 + \hat{f}_2$$

$$\hat{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n! x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n! x^{2n+2}$$

n'est k -sommable pour **aucun** réel $k > 0$. De plus \hat{f} est solution des équations différentielles linéaires algébriques suivantes [RS] (3.75, 7.6) : $Dy = 0$, avec

$$D = \left(\frac{d}{dx} \right)^5 \left(x^5(2-x) \frac{d^2}{dx^2} - x^2(2x^3 - 5x^2 - 4) \frac{d}{dx} + 2(x^2 - x + 2) \right)$$

et

$$\begin{aligned} x^5(2-x)y'' - x^2(2x^3 - 5x^2 - 4)y' + 2(x^2 - x + 2)y &= \\ &= -3x^4 + 10x^3 + 2x^2 + 4x. \end{aligned}$$

Si l'on veut un procédé de sommation apte à sommer les solutions formelles des équations différentielles algébriques (même seulement linéaires), on voit qu'il semble raisonnable de chercher un procédé permettant de sommer les **sommes** finies de séries k -sommables (dans une même direction d fixée) pour des k **différents**. On peut évidemment penser que si $\hat{f} = \hat{f}_1 + \hat{f}_2$, on peut définir la somme de \hat{f} comme somme de celles de \hat{f}_1 et \hat{f}_2 . Mais il apparait immédiatement une difficulté : il faut montrer que la somme de \hat{f} ainsi obtenue est indépendante de la décomposition (*i.e.* du choix de \hat{f}_1 et \hat{f}_2). De plus nous voulons travailler avec une algèbre et il faudra donc étudier la décomposition en somme d'un produit. Enfin si l'on veut appliquer tout cela aux équations différentielles (linéaires ou non), il faudra étudier

la décomposition en somme de séries k -sommables (dans une même direction) d'une solution série formelle d'une telle équation. Après de nombreuses années et grâce aux efforts de plusieurs mathématiciens toutes ces questions ont reçu des réponses satisfaisantes. La façon la plus simple de définir la "multisommabilité" est d'utiliser le

THÉORÈME. — Soit d une direction issue de l'origine. La somme

$$\sum_{k>1/2} \mathbf{C}\{x\}_{1/k;d}$$

de sous-espaces vectoriels complexes de $\mathbf{C}[[x]]$ est une sous-algèbre différentielle de $(\mathbf{C}[[x]], x^2d/dx)$. De plus, il existe un homomorphisme injectif d'algèbres différentielles unique

$$S_d : \sum_{k>1/2} \mathbf{C}\{x\}_{1/k;d} \longrightarrow A_d$$

tel que la restriction de S_d à chaque espace $\mathbf{C}\{x\}_{1/k;d}$ ($k > 1/2$) coïncide avec l'opérateur de k -sommation dans la direction d :

$$S_{k;d} : \mathbf{C}\{x\}_{1/k;d} \longrightarrow A_d.$$

En remplaçant dans l'énoncé du théorème la variable x par une ramification variable $x^{1/m}$ ($m \in \mathbf{N}^*$), on obtient un homomorphisme injectif d'algèbres différentielles (toujours noté $S_{k;d}$)

$$S_{k;d} : \bigcup_{m \in \mathbf{N}^*} \sum_{k>1/2} \mathbf{C}\{x^{1/m}\}_{1/k;d} \rightarrow A_d.$$

On note

$$\mathbf{C}\{x\}_{.,d} = \bigcup_{m \in \mathbf{N}^*} \sum_{k>1/2} \mathbf{C}\{x^{1/m}\}_{1/k;d} \cap \mathbf{C}[[x]];$$

$\mathbf{C}\{x\}_{.,d}$ est une sous-algèbre différentielle de $\bigcup_{m \in \mathbf{N}^*} \sum_{k>1/2} \mathbf{C}\{x^{1/m}\}_{1/k;d}$, contenant l'algèbre $\mathbf{C}\{x\}_{1/k;d}$, pour tout $k > 0$ (car $\mathbf{C}\{x^{1/m}\}_{1/k;d} \cap \mathbf{C}[[x]] = \mathbf{C}\{x\}_{1/mk;d}$, et on obtient un homomorphisme injectif d'algèbres différentielles

$$S_{k;d} : \mathbf{C}\{x\}_{.,d} \rightarrow A_d.$$

dont la restriction à chaque algèbre $\mathbf{C}\{x\}_{1/k;d}$ ($k > 0$) coïncide avec l'opérateur de k -sommation dans la direction d .

On dit qu'une série formelle $\hat{f} \in \mathbf{C}\{x\}_{.,d}$ est **multisommable dans la direction** d .

Soient k_1, \dots, k_r des réels, avec $k_1 > \dots > k_r > 0$ et d une direction issue de l'origine. Si $\hat{f} \in \sum_{i=1}^r \mathbf{C}\{x\}_{1/k_i;d}$, on dit que \hat{f} est (k_1, \dots, k_r) -sommable dans la direction d , et on note $\hat{f} \in \mathbf{C}\{x\}_{1/k_1, \dots, 1/k_r; d}$.

Il existe deux preuves assez différentes du théorème que nous venons d'énoncer. La première utilise la théorie de l'accélération de Jean ECALLE [E 4], et généralise l'approche par formule intégrale et prolongement analytique (Borel-Laplace) de la k -sommabilité. Elle est détaillée dans [MR 3]. La seconde, due à B. MALGRANGE et J.P. RAMIS [Ma R], plus "géométrique", utilise essentiellement la notion de **correction exponentiellement petite**. En gros on procède ainsi :

On **définit** la notion de multisommabilité de la façon suivante :

Soient k_1, \dots, k_r des réels, avec $k_1 > \dots > k_r > 0$ et une direction d issue de l'origine. Soit $\hat{f} \in \mathbf{C}[[x]]_{1/k_r}$. Soient V_1, \dots, V_r des secteurs ouverts de même rayon et de même bissectrice d , emboîtés : $V_1 \subset \dots \subset V_r$. On suppose $\text{ouv}V_i > \pi/k_i$. Une (k_1, \dots, k_r) -suite associée à \hat{f} est la donnée d'une suite $(f_1, \dots, f_r, f_{r+1})$, où f_1 est une fonction holomorphe sur le secteur V_1 , f_{r+1} est la quasi-fonction k_r -précise définie par \hat{f} , et f_2, \dots, f_r sont des quasi-fonctions respectivement k_1, \dots, k_{r-1} -précises définies respectivement sur les secteurs V_2, \dots, V_{r-1} ; la restriction de f_{i+1} à V_i coïncidant avec la quasi-fonction k_i -précise associée à la quasi-fonction k_{i-1} -précise f_i , pour $i = 1, \dots, r$ (par convention $k_0 = +\infty$).

Le théorème "de quasi-analyticité relative" que nous énoncerons plus loin permet de voir que, s'il existe une (k_1, \dots, k_r) -suite associée à \hat{f} , elle est **unique**. Dans ces conditions on dira que \hat{f} est multisommable dans la direction d et que f_1 est sa **somme** dans la direction d . Il est alors facile de vérifier que $\hat{f} \rightarrow f_1$ est un homomorphisme injectif d'algèbres différentielles (f_1 admet \hat{f} pour développement asymptotique à l'origine). En travaillant un peu plus on obtient les propriétés de décomposition en sommes de séries k -sommables décrites plus haut.

THÉORÈME. — Soient $k' > k > 0$. Soit V un secteur ouvert du plan complexe (ou de la surface de Riemann du Logarithme) de sommet l'origine, d'ouverture $> \pi/k$. Soit f une quasi-fonction sur V , k' -précise et à décroissance exponentielle d'ordre k sur V (i.e. f est représentée par une 0-cochaîne $\{f_i\}$, avec f_i à décroissance exponentielle d'ordre k sur V_i et $f_{i,i+1}$ à décroissance exponentielle d'ordre k' sur $V_{i,i+1}$). Alors f est une quasi-fonction k' -précise nulle sur V (i.e. les f_i sont à décroissance exponentielle d'ordre k' sur V_i).

Ce théorème est dû à B. MALGRANGE [Ma 1]. Il généralise le théorème de WATSON énoncé en 2.3 (l'énoncé est similaire, les quasi-fonctions remplaçant les fonctions).

Le théorème de quasi-analyticité relative de MALGRANGE est équivalent à un théorème "Taubérien" de MARTINET et RAMIS [MR 2], Chap. 2, Proposition 4.3 :

THÉORÈME. — Soient $0 < k' < k$, $\kappa = kk'/(k - k')$, et d une direction issue de l'origine. Si la série formelle $\hat{f} \in \mathbf{C}[[x]]_{1/k}$ est k' -sommable dans la direction d , alors elle est k -sommable dans toute direction du secteur de bissectrice d et d'ouverture π/κ .

Une forme très voisine de ce théorème avait déjà été obtenue par G.H. HARDY (avec $k'/k = 2$) [H 3] et son élève GOOD [Goo].

G.H. HARDY ([H 1], 6.1, p. 121) écrivait à propos de la nature des “théorèmes Taubériens” :

“There is another limit, of a less obvious kind, to the effectiveness of these methods, and of all that have proved useful. Every method will fail to sum series which diverge too rapidly; and it will also fail to sum divergent series whose divergence is too slow¹². The theorems which embody this principle belong to the class which... are called “Tauberian”. They assert that if a series is summable (P), and satisfies some further condition K_P (which will vary with the method P, but will in any case imply a certain slowness of possible divergence), then it is convergent.”

Ce principe a été en un certain sens généralisé plus tard, suivant des idées de HARDY et LITTLEWOOD. Citons GOOD ([G], p. 145), qui compare deux méthodes de sommabilité f et g :

“Quite often then we have

The Hardy-Littlewood principle of summability : if f is more widely applicable than g , and if g is applicable and f effective, then g is effective.

Le théorème Taubérien énoncé plus haut illustre bien ce dernier principe.

L'inconvénient de l'approche de la multisommabilité que nous venons d'esquisser est qu'elle ne fournit pas de procédé explicite commode pour calculer la somme. Pour obtenir un tel procédé on peut utiliser l'accélération, que nous ne décrivons pas ici (on pourra se reporter à l'article introductif [LR 2]). On peut aussi employer une méthode d'itération de transformées de Laplace (de niveaux différents) due à BALSER [Ba 2]. On procède ainsi :

Soient $k_1 > \dots > k_r > 0$. On définit des réels strictement positifs $\kappa_1, \dots, \kappa_r$: $1/\kappa_i = 1/k_i - 1/k_{i-1}$ ($i = 2, \dots, r$) et $1/\kappa_1 = 1/k_1$. On a alors

$$\frac{1}{k_i} = \frac{1}{\kappa_1} + \dots + \frac{1}{\kappa_i},$$

pour $i = 1, \dots, r$.

Désignons par \cdot_d le prolongement analytique le long de la direction d .

THÉORÈME. — *Soit d une direction issue de l'origine. Soient $k_1 > \dots > k_r > 0$ et $\kappa_1, \dots, \kappa_r$ comme ci-dessus. Pour $\hat{f} \in \mathbf{C}[[x]]$ les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) \hat{f} est (k_1, \dots, k_r) -sommable dans la direction d ;
- (ii) $\hat{\mathcal{B}}_{\kappa_r} \dots \hat{\mathcal{B}}_{\kappa_1} \hat{f}$ est une série convergente et, pour tout $i = r, \dots, 2$, la fonction

$$\cdot_d \mathcal{L}_{\kappa_i} \cdot_d \dots \mathcal{L}_{\kappa_r} \cdot_d S \hat{\mathcal{B}}_{\kappa_r} \dots \hat{\mathcal{B}}_{\kappa_1} \hat{f}$$

¹²C'est HARDY qui souligne.

est holomorphe et à croissance exponentielle d'ordre κ_{i-1} dans un secteur convenable bissecté par d .

Si ces conditions sont réalisées

$$\mathcal{L}_{\kappa_1} \cdot_d \dots \mathcal{L}_{\kappa_r} \cdot_d S \widehat{\mathcal{B}}_{\kappa_r} \cdots \widehat{\mathcal{B}}_{\kappa_1} \widehat{f}$$

existe et est la somme (au sens de la multisommabilité) de \widehat{f} dans la direction d .

Cette méthode est susceptible d'application numérique [Th 2]. Une autre méthode de sommation explicite d'une série multisommable (élégante, mais peu exploitable numériquement...) est donnée par le résultat suivant, dû à JURKAT [J]¹³ :

THÉORÈME. — Soit d une direction issue de l'origine. Soit $\widehat{f} \in \mathbf{C}[[x]] = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série formelle multisommable dans la direction d . Sa somme f dans la direction d se prolonge analytiquement le long d'un intervalle ouvert maximal γ_d porté par d en une fonction toujours notée f . Alors, si x_0 est un point de γ_d :

$$\lim_{t \rightarrow 0; t > 0} \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \sum_{n=3}^{+\infty} a_n x^n e^{-tn \log n \log(\log n)} \right) \text{ existe et est égale à } f(x_0).$$

En d'autres termes la multisommabilité implique la sommabilité par la méthode abélienne de Hardy-Jurkat.

On remarque que la mise en œuvre des procédés “explicités” de sommation basés sur la multisommabilité (sommation par accélération ou itération de transformées de Laplace) nécessite la connaissance des “niveaux critiques” k_1, \dots, k_r . Par contre la sommation par la méthode abélienne de Hardy-Jurkat ne nécessite pas cette connaissance : cette dernière méthode est “plus puissante” (elle somme plus de séries divergentes). (On a rencontré une situation analogue en sommant une série convergente dans son étoile de Mittag-Leffler : tandis que la méthode abélienne de LINDELÖF permet de sommer dans toute l'étoile, la méthode $(\widehat{\mathcal{B}}_k, \mathcal{L}_k)$ de Borel-Laplace exige de choisir le paramètre k en fonction du point de l'étoile où l'on veut sommer.) On paye cette puissance par l'inefficacité numérique.

Ceci est une illustration d'un phénomène général découvert par HARDY et LITTLEWOOD : plus une méthode de sommation est puissante, moins elle est “fine”. Citons à nouveau HARDY [H 3]; p. 153 :

Littlewood and I have often emphasized a general principle which it is difficult to formulate precisely, but which may be indicated roughly as follows : the delicacy of a method of summation tends to be inversely proportional to its power.

¹³Le résultat prouvé par JURKAT est en fait un peu moins précis. Il faut reprendre sa démonstration et utiliser [Ma R].

3. Séries divergentes et systèmes dynamiques

3.1. Solutions formelles des équations différentielles

Je ne parlerai pas particulièrement ici du cas **linéaire**. (On se reportera à l'exposé [LR] de M. LODAY-RICHAUD à ces journées, et à [Th 1] et [Th 2] pour les aspects numériques.)

Je vais maintenant revenir sur la théorème de Maillet énoncé en 2.1. Le but de MAILLET était en fait de sommer les solutions séries formelles d'équations différentielles algébriques. Il pensait que l'on pouvait y parvenir en utilisant la " k -sommabilité" et la propriété "Gevrey" qu'il a établie était une condition nécessaire pour cela. Nous avons vu qu'en fait ce programme n'était pas raisonnable tel quel et qu'il était nécessaire de recourir à la multisommabilité. Nous allons voir maintenant que c'est suffisant : toute série formelle solution d'une équation différentielle analytique (linéaire ou non) est multisommable dans toutes les directions sauf peut-être un nombre fini.

On commence par améliorer les estimations Gevrey dans le théorème de Maillet. Le cas le plus simple est le cas linéaire par lequel nous allons commencer.

Nous dirons qu'une série formelle \hat{f} est Gevrey d'ordre **exactement** $1/k$ si elle est d'ordre $1/k$ et s'il n'existe pas de réel $k' > k$ tel qu'elle soit d'ordre $1/k'$.

A tout germe à l'origine d'équation différentielle linéaire analytique

$$Dy = a_n y^{(n)} + \dots + a_0 y = 0$$

on associe un polygone de Newton $N(D)$ [Ra 1]. On a le résultat suivant :

THÉORÈME. — *Soit $Dy = 0$ un germe d'équation différentielle analytique à l'origine du plan complexe. Alors si $\hat{f} \in \mathbf{C}[[x]]$ est une solution formelle de cette équation, \hat{f} est convergente ou Gevrey d'ordre exactement $1/k$, k étant l'une des pentes strictement positives du polygone de Newton $N(D)$ de D .*

Ce résultat est dû à O. PERRON dans le cas d'une équation différentielle linéaire algébrique et à moi-même dans le cas analytique [Pe], [Ra 1, 5]. (Dans le cas linéaire analytique les estimations de MAILLET avaient été améliorées par GINGOLD [Gi].)

Passons au cas non linéaire. Considérons l'équation différentielle analytique

$$(1) \quad G(x, y, \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Supposons que cette équation admette une solution formelle $\hat{f} \in \mathbf{C}[[x]]$. Au couple (G, \hat{f}) on associe un polygone de Newton $N(G, \hat{f})$ ("polygone de Newton de G le long de \hat{f} "). On peut obtenir des estimations précise dans le théorème de Maillet :

THÉORÈME. — Soient $G(x, Y, \dots, Y_n)$ une fonction analytique de $n+2$ variables et $\hat{f} \in \mathbf{C}[[x]]$ une solution série formelle de l'équation différentielle :

$$(1) \quad G(x, y, \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Alors \hat{f} est convergente ou Gevrey d'ordre exactement $1/k$, k étant l'une des pentes strictement positives du polygone de Newton $N(G, \hat{f})$.

B. MALGRANGE a d'abord montré qu'une solution formelle est toujours Gevrey d'ordre $1/k'$, k' étant la plus petite pente de $N(G, \hat{f})$ [Ma 3]. Le résultat ci-dessus est dû à Y. SIBUYA, qui l'a prouvé par voie cohomologique (*i.e.* en estimant, par linéarisation, la 1-cochaîne des erreurs exponentielles associée à la quasi-fonction définie par \hat{f}) [Si 1].

Les résultats ci-dessus s'améliorent en des résultats de multisommabilité.

Soient $k_1 > \dots > k_r > 0$ des nombres réels. Nous dirons que $\hat{f} \in \mathbf{C}[[x]]$ est (k_1, \dots, k_r) -sommable si elle l'est dans toutes les directions sauf peut-être un nombre fini.

THÉORÈME. — Soient $G(x, Y, \dots, Y_n)$ une fonction analytique de $n+2$ variables et $\hat{f} \in \mathbf{C}[[x]]$ une solution série formelle de l'équation différentielle :

$$(1) \quad G(x, y, \dots, y^{(n)}) = 0.$$

On désigne par $k_1 > \dots > k_r > 0$ les pentes strictement positives du polygone de Newton $N(G, \hat{f})$. Alors \hat{f} est (k_1, \dots, k_r) -sommable.

Dans le cas linéaire une première démonstration de ce résultat est due à l'auteur de ces notes [Ra 2], [MR 3]; on trouve d'autres démonstrations dans [BBRS] et [Ma R]. Dans le cas non-linéaire le résultat vient d'être prouvé par BRAAKSMA en utilisant une approche de J. ECALLE, une preuve due à RAMIS et SIBUYA, dans le style de [RS 1], est en cours de rédaction.

3.2. Formes normales d'équations différentielles et de difféomorphismes

Considérons d'abord le cas des difféomorphismes holomorphes locaux à l'origine du plan complexe. Un tel difféomorphisme

$$f : (\mathbf{C}, 0) \rightarrow (\mathbf{C}, 0)$$

est défini par une série convergente

$$f(x) = \lambda x + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n \in x\mathbf{C}\{x\},$$

avec $\lambda \in \mathbf{C}^*$.

Pour $|\lambda| \neq 1$, POINCARÉ a démontré qu'un tel difféomorphisme est **analytiquement conjugué** à son application linéaire tangente $f_0 : x \rightarrow \lambda x$ à l'origine. En d'autres termes il existe un changement de coordonnées analytique $x = \psi(t)$ ($\psi'(0) \neq 0$) tel que $f = \psi \circ f_0 \circ \psi^{-1}$ ou $f \circ \psi = \psi \circ f_0$. Si $\lambda \neq 1$, on dit que λ est dans le domaine de Poincaré. Sinon il est dans le domaine de Siegel. Si λ est une racine de l'unité, on dit que l'on a un difféomorphisme résonnant. Si $\lambda = 1$ et si λ n'est pas une racine de l'unité, on montre que f est formellement linéarisable (il existe un changement de variables formel $\hat{\psi}$ conjuguant f à f_0), mais n'est pas toujours analytiquement linéarisable ($\hat{\psi}$ ne converge pas nécessairement). Nous ne parlerons pas plus ici de ce cas difficile dont l'étude met en jeu des problèmes d'approximation de réels par des rationnels. Le cas qui relève de notre étude est le cas résonnant. Dans ce dernier cas f n'est plus en général formellement linéarisable et le premier problème qui se pose est le problème de **classification formelle** des difféomorphismes analytiques résonnants. Pour simplifier l'exposé nous nous limiterons à partir de maintenant aux difféomorphismes f tangents à l'identité :

$$f(x) = x + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n \in x\mathbf{C}\{x\}.$$

Chaque classe d'équivalence formelle (*i.e.* modulo changement de variables formel) est représentée par une "forme normale" (convergente) dont le choix est arbitraire (on cherche la forme "la plus simple possible"). Il est commode de choisir pour formes normales l'ensemble paramétré par $(\beta, k, \lambda) \in \mathbf{C} \times \mathbf{N}^* \times \mathbf{C}$ des $f_{\beta, k, \lambda} = \exp(X_{\beta, k, \lambda})$, où $X_{\beta, k, \lambda}$ est le champ de vecteurs

$$X_{\beta, k, \lambda} = \beta \frac{x^k}{1 + \lambda x^k}.$$

On se ramène aisément au cas où $\beta = 2i\pi$ et on note $X_{2i\pi, k, \lambda} = X_{k, \lambda}$. Toujours pour simplifier l'exposition nous nous limiterons au cas où la forme normale est $f_{1,0}(x) = \frac{x}{1-2i\pi x}$ ($X_{1,0} = 2i\pi x^2 d/dx$). Par le changement de coordonnées homographique $x = 1/z$ sur la sphère de Riemann, la forme normale $f_{1,0}$ est conjuguée à la translation $T(z) = z - 2i\pi$. On remarque que la fonction $e^{1/x}$ est constante sur les orbites de $f_{1,0}$. Elle permet d'identifier l'espace des orbites de $f_{1,0}$ ("orbitfoil") à la sphère de Riemann privée de 0 et ∞ , c'est à dire à \mathbf{C}^* (topologiquement c'est un cylindre $S^1 \times \mathbf{R}$). On notera dorénavant $f_{1,0} = f_0$. On a

$$f_0(x) = x - 2i\pi x^2 - 4\pi^2 x^3 + \dots$$

Tout difféomorphisme local holomorphe de la forme

$$f(x) = x - 2i\pi x^2 - 4\pi^2 x^3 + O(x^4)$$

est **formellement** conjugué à f_0 (mais pas analytiquement en général). Plus précisément il existe alors un difféomorphisme formel tangent à l'identité **unique** $\hat{\psi}$ tel que $f \circ \hat{\psi} = \hat{\psi} \circ f_0$. Ce difféomorphisme est "en général" divergent mais le point

important est qu'il est 1-sommable dans toutes les directions sauf les demi-axes réels \mathbf{R}^+ et \mathbf{R}^- . Les sommes ψ_d de $\hat{\psi}$, dans différentes directions d , se recollent quand d varie sans rencontrer un demi-axe réel. On obtient donc finalement **deux** sommes ψ^+ et ψ^- de $\hat{\psi}$ (par en-dessus et par en-dessous) définies respectivement dans des "secteurs" d'ouverture 3π . L'intersection de ces "secteurs" est formée de deux "secteurs" d'ouverture π respectivement contenus dans $\text{Ré } x > 0$ et $\text{Ré } x < 0$. Sur chacun de ces deux secteurs il y a **deux** déterminations pour la somme, donc un **phénomène de Stokes**.

Nous nous proposons maintenant de classifier les difféomorphismes locaux holomorphes formellement conjugués à f_0 , modulo équivalence analytique (deux tels difféomorphismes sont équivalents s'ils sont analytiquement conjugués). Le phénomène surprenant est que l'espace quotient est "énorme" : il est de dimension infinie. Essentiellement il est paramétré par les couples $(\varphi_0, \varphi_\infty)$ où φ_0 et φ_∞ sont des difféomorphismes locaux de la sphère de Riemann tangents à l'identité, respectivement en 0 et ∞ , et par ailleurs **complètement arbitraires**.

En fait un difféomorphisme holomorphe local f formellement conjugué à f_0 est essentiellement classifié par son espace des orbites. Ce dernier se décrit aisément en utilisant le phénomène de Stokes :

Cet espace est une "courbe complexe non séparée" obtenue ainsi :

Chaque somme ψ^+ et ψ^- de $\hat{\psi}$ conjuguant f et f_0 permet d'identifier un sous-ensemble de l'espace des orbites de f à l'espace des orbites de f_0 , c'est à dire au "cylindre" $\mathbf{C}^* = P^1(\mathbf{C}) - \{0, \infty\}$. Si l'on compare ces deux identifications en utilisant les deux phénomènes de Stokes (dans les directions \mathbf{R}^+ et \mathbf{R}^-), on obtient deux copies de la sphère de Riemann $P^1(\mathbf{C})$ recollées en 0 et ∞ par des difféomorphismes analytiques tangents à l'identité φ_0 et φ_∞ . On démontre (théorème "de synthèse") qu'ils peuvent être choisis arbitrairement.

Les résultats qui précèdent sont dus à T. KIMURA, J. ECALLE [E 2], B. MALGRANGE [Ma 4], VORONIN.

Après avoir classifié les difféomorphismes résonnants, on peut se poser le problème analogue pour les germes, à l'origine $(0,0)$ de \mathbf{C}^2 , d'équations différentielles analytiques de la forme $\omega = Pdy + Qdx = 0$ (P et $Q \in \mathbf{C}\{x, y\}$). Le 1-jet à l'origine de ω est de la forme $J^1 \omega = \lambda dy + \mu dx$. Si $\lambda, \mu \in \mathbf{C}^*$ et si $\frac{\lambda}{\mu} \in \mathbf{C} - \mathbf{R}$, on est dans le domaine de Poincaré et ω est analytiquement conjuguée à $J^1 \omega$. Sinon la discussion est plus compliquée. Comme dans le cas des difféomorphismes nous nous intéresserons seulement aux cas résonnants. Ce sont les cas où λ ou μ est nul, l'autre ne l'étant pas (cas dégénéré) et les cas où $\lambda, \mu \neq 0$ et $\frac{\lambda}{\mu} \in \mathbf{Q}^-$ (cas non dégénéré). Géométriquement (et par référence au cas réel), dans le cas dégénéré on a un **nœud-col** et dans l'autre un **col résonnant**.

Un nœud-col s'écrit

$$x^{k+1} dy + \lambda y dx + \dots = 0,$$

avec $k \in \mathbf{N}^*$ et $\lambda \in \mathbf{C}$, et un col résonnant s'écrit

$$pdy + qdx + \dots = 0$$

avec $p, q \in \mathbf{N}^*$.

Comme dans le cas des difféomorphismes résonnants, les formes normales formelles sont paramétrées par un nombre fini de paramètres et les changements de coordonnées ramenant une équation résonnante à sa forme normale font intervenir des séries Gevrey. On prouve que ces séries sont k -sommables. Les équations différentielles résonnantes sont, à forme normale formelle fixée, essentiellement classifiées analytiquement par leur "espace de feuilles". Cet espace est décrit en utilisant le phénomène de Stokes.

En fait la classification des équations est liée à celle des difféomorphismes via l'holonomie. Un nœud-col admet toujours une feuille analytique lisse pour solution à l'origine (variété forte). Un col résonnant admet toujours deux telles solutions (transverses). Bien sûr il faut enlever l'origine : ces solutions sont donc au voisinage de l'origine des disques époinés. On dessine une transversale complexe à l'un de ces disques époinés, puis un lacet simple, d'origine celle de la transversale, dans le disque époiné. En relevant le lacet on obtient une permutation des feuilles qui se voit comme un difféomorphisme sur la transversale : c'est le difféomorphisme d'holonomie. Dans le cas d'un col résonnant la classification des équations s'identifie à celle de leurs holonomies. Dans le cas d'un nœud-col on n'obtient pas toutes les holonomies. Prenons par exemple la forme normale formelle de nœud-col

$$\omega_0 = x^2 dy + y dx = 0.$$

Son holonomie est $f_0(x) = \frac{x}{1-2i\pi x}$.

Les nœuds-cols analytiques formellement conjugués à $\omega_0 = 0$ sont essentiellement classifiés par les paires de difféomorphismes locaux (analytiques et tangents à l'identité) $(\varphi_0, \varphi_\infty)$, en 0 et ∞ , de la sphère de Riemann, où $(\varphi_0$ est arbitraire, mais où φ_∞ est une **translation**).

Ces résultats sont dus à J. MARTINET et J. P. RAMIS [MR 1, 4, 5], [Ma 4]. Ils jouent un rôle fondamental dans la réponse à certaines des conjectures de R. THOM sur les feuilletages holomorphes [Mou], et dans la résolution récente du "problème de Dulac" (finitude du nombre de cycles limites pour une équation différentielle algébrique $Pdy + Qdx = 0$ dans le plan réel).¹⁴

¹⁴Le problème de Dulac est un sous-problème de la deuxième partie du 16-ème problème de Hilbert.

3.3. Perturbations singulières, retard à la bifurcation et canards

La théorie des développements asymptotiques Gevrey est, nous l'avons vu, très efficace pour étudier les singularités essentielles des équations différentielles. Il s'agit là de singularités de la **variable**. Cette théorie est également utilisable pour l'étude de certains problèmes faisant intervenir une singularités sur le **paramètre** : les problèmes de **perturbations singulières**.

Voici dans cette direction un résultat essentiel, dû à Y. SIBUYA :

THÉORÈME. — *Soit $n \in \mathbf{N}^*$ un entier fixé. On considère une équation différentielle de la forme*

$$(1) \quad \varepsilon^\sigma \frac{dy}{dx} = F(x, \varepsilon, y) = f(x, \varepsilon) + A(x, \varepsilon)y + \sum_{|p| \geq 2} f_p(x, \varepsilon)y^p,$$

où $\sigma \in \mathbf{N}^*$, $\varepsilon, x \in \mathbf{C}$, $y \in \mathbf{C}^n$, f, F et les f_p prennent leurs valeurs dans \mathbf{C}^n , A prend ses valeurs dans $\text{End}(n, \mathbf{C})$. On suppose que F est analytique en (x, ε, y) au voisinage de $(0, 0, 0)$, que $f(0, 0) = 0$ et que la matrice $A(0, 0)$ est inversible. Alors

(i) l'équation (1) admet une solution formelle unique de la forme

$$y = \hat{f}(x) = \sum_{n \geq 0} a_n(x) \varepsilon^n,$$

où les a_n sont des fonctions holomorphes dans un même disque D du plan des x ;

(ii) quitte à réduire le disque D , les a_n vérifient des estimations Gevrey d'ordre $1/\sigma$:

$$\|a_n\| \leq C n!^{1/\sigma} A^n,$$

pour $C, A > 0$ convenables ($\|a_n\| = \sup_{x \in D} \|a_n(x)\|$).

Y. SIBUYA a donné une preuve cohomologique de ce résultat dans [Si 2]. (Il prouve en fait un résultat plus précis en construisant une 0-cochaîne f_i de solutions de (1), les f_i étant holomorphes en (x, ε) , sur le produit de D et d'un secteur en ε , et asymptotiques Gevrey d'ordre $1/\sigma$ en ε , uniformément en x sur D , à \hat{f} .) Dans le cas où $n = 1$ M. CANALIS-DURAND a donné une preuve du théorème par estimations directes [CD 2]. Par ailleurs SCHÄFFKE a obtenu récemment une nouvelle preuve en se ramenant à une forme précisée du théorème de Maillet [Sc].

Suivant une idée de J. MARTINET [Mar],2, nous allons appliquer le résultat ci-dessus au problème du **retard à la bifurcation**. Il sera commode de se placer dans le cadre de l'Analyse Non Standard¹⁵.

¹⁵On lira facilement ce qui suit au niveau heuristique. En fait ce discours est parfaitement rigoureux. Il est écrit avec le point de vue de NELSON sur l'A.N.S. [DR], et la quantité d'A.N.S. nécessaire est...infinitésimale!

Une idée de base (due à J. MARTINET [Mar],1) est de modéliser l'environnement classique de l'analyse numérique : une machine à calculer (pouvant être un mathématicien muni de papier et d'un crayon) *fournit une précision limitée dans le calcul numérique d'une fonction, et dispose d'une capacité limitée à maîtriser les grands nombres ; un nombre trop petit est déclaré nul, et un nombre trop grand est considéré comme infini* (overflow). On modélise cette situation par la donnée une fois pour toutes d'un nombre réel $\varepsilon' > 0$ infiniment petit : on ne “verra pas” pas un nombre complexe α de l'ordre de ε' (*i.e.* tel que α/ε' soit limité (non infiniment grand) ; par ailleurs un nombre α ne sera “affiché” que s'il est en module infiniment petit devant $1/\varepsilon'$ (*i.e.* si $\alpha\varepsilon'$ est infiniment petit).

On peut alors recopier notre description antérieure des quasi-fonctions en remplaçant les corrections exponentiellement petites par des corrections de l'ordre de ε' . On obtient un “dictionnaire” entre les deux points de vue dans une région (dans le plan (non standard) de la variable complexe ε) où la fonction e^{-a/ε^k} (avec a standard, ou limité) est de l'ordre de ε' .

L'origine du phénomène de retard à la bifurcation est le phénomène de compression-explosion exponentielle des trajectoires. La situation la plus simple où l'on observe ce phénomène est la suivante :

Soit

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x} = \mu x \\ \dot{\mu} = \varepsilon \end{cases}$$

où $\varepsilon > 0$ est un réel infiniment petit fixé et μ, x des variables réelles.

A μ non nul fixé, on considère l'équation différentielle

$$(1_\mu) \quad \dot{x} = \mu x$$

Le point $x = 0$ est un point stationnaire stable pour $\mu < 0$ et instable pour $\mu > 0$. Quand μ varie la stabilité change donc pour $\mu = 0$. Considérons maintenant la solution de (1) définie par les conditions initiales $x = x_0$ et $\mu = \mu_0 < 0$. Une intégration triviale montre que cette solution est

$$x = x_0 e^{\frac{\mu^2 - \mu_0^2}{2\varepsilon}}.$$

Elle est infiniment petite (exponentiellement en ε) pour $\mu \in]\mu_0, -\mu_0[$. Elle “descend presque verticalement” de (μ_0, x_0) à $(\mu_0, 0)$, longe “exponentiellement près” l'axe réel jusqu'à $(-\mu_0, 0)$, puis remonte “presque verticalement”. On a une “entrée” en $(\mu_0, 0)$ et une “sortie” en $(-\mu_0, 0)$ (à peu près...).

On considère maintenant un système (en dimension $p + 1$) :

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \dot{x} = F(x, \lambda) \\ \frac{d\lambda}{dt} &= \dot{\lambda} = \varepsilon \end{aligned}$$

où $\varepsilon > 0$ est un nombre complexe infiniment petit fixé (ou un “petit paramètre”, au choix), x une variable dans \mathbf{C}^p , λ une variable complexe, F une fonction holomorphe à valeurs dans \mathbf{C}^p .

De (2) on déduit l'équation différentielle :

$$(3) \quad \varepsilon \frac{dx}{d\lambda} = F(x, \lambda).$$

Faisant $\varepsilon = 0$ on obtient la “courbe lente” $F(x, \lambda) = 0$. On suppose que cette courbe \mathcal{C}_0 est le graphe d'une fonction analytique $x = c_0(\lambda)$.

On fait maintenant les hypothèses suivantes :

- (i) La matrice $\frac{\partial F}{\partial x}(0, 0)$ est inversible ;
- (ii) La courbe lente \mathcal{C}_0 est transverse au champ

$$(2') \quad F(x, \lambda) \frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \lambda}.$$

Si la courbe lente est invariante par le champ, on est dans une situation très voisine de celle décrite avant. Il y a compression-explosion exponentielle. Le cas où la condition (ii) est vérifiée est plus délicat. On va montrer qu'il y a toujours compression-explosion exponentielle (dans un voisinage appréciable convenable de l'origine) en se “ramenant au cas précédent” en utilisant une quasi-courbe exponentiellement précise (quasi) invariante par le champ (2').

Cette quasi-courbe est le “graphe” d'une quasi-fonction (quasi) solution de (3), que l'on obtient de la façon suivante :

D'après le théorème de Sibuya énoncé plus haut, l'équation (3) admet une solution formelle (formelle en ε , analytique en λ) :

$$\hat{g}(\lambda, \varepsilon) = c_0(\lambda) + \sum_{n=1} c_n(\lambda) \varepsilon^n.$$

De plus les c_n sont tous holomorphes bornés sur un même disque D de rayon $r > 0$ (standard) du plan des λ , et satisfont des inégalités Gevrey d'ordre 1 :

$$\|c_n\| \leq C n! A^n,$$

pour $C, A > 0$ convenables ($\|c_n\| = \sup_{x \in D} \|c_n(x)\|$).

La quasi-somme de cette série (obtenue par exemple par une transformation de Laplace incomplète) est 1-précise et est quasi-solution (*i.e.* solution à des corrections

exponentielles d'ordre un près, du type $e^{-a/\varepsilon}$ (a positif limité). (En fait on peut trouver un représentant $\{g_i\}$ de la quasi solution où les g_i sont des solutions exactes de (3).)

On conclut aisément (par exemple par un argument de “loupe exponentielle” [BCDD]).

Les premiers résultats mathématiques sur le problème du retard à la bifurcation sont dus à NEISHSTADT. Sa méthode est une variante de la “quasi-sommation au plus petit terme” décrite plus haut : on fait un (grand) nombre N de changements de variables ($N =$ partie entière de $1/\varepsilon$). Il existe aussi une approche très géométrique de problème due à J. L. CALLOT (1991).

Au lieu de faire dériver lentement un champ de vecteurs comme dans le problème que nous venons d'étudier, on peut faire dériver lentement une application d'itération :

Soit toujours $\varepsilon > 0$ un réel infiniment petit. On considère

$$(4) \quad \begin{aligned} F_\varepsilon : \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, \lambda) &\longmapsto (f(x, \lambda), \lambda + \varepsilon). \end{aligned}$$

On suppose l'existence d'une courbe de points fixes analytique $c_0(\lambda)$.

Par exemple on peut faire dériver lentement l'application de Feigenbaum :

$$f(x, \lambda) = \lambda x(1 - x)$$

(qui fournit un exemple de chaos). On observe un retard à la bifurcation pour les “doublements de périodes”.

L'analyse de cette situation a été faite par A. FRUCHARD [F 1] et C. BAESENS [Bae]. La méthode de [F 1] suit les mêmes lignes que celle de NEISHSTADT ; celle de [Bae] est une variante de l'argument de J. MARTINET pour les champs :

Une courbe invariante pour (4) est le graphe d'une fonction $\lambda \mapsto U(\lambda, \varepsilon)$, avec $F(U(\lambda, \varepsilon), \lambda) = U(\lambda + \varepsilon, \varepsilon)$. Il existe (si $\partial_x F(\lambda, c_0(\lambda)) \neq 1$) une unique courbe invariante formelle :

$$\hat{U}(\lambda, \varepsilon) = c_0(\lambda) + \sum_{n1} c_n(\lambda) \varepsilon^n.$$

où les c_n sont holomorphes bornés sur un même disque. Cette série est en général divergente mais Gevrey 1 [Bae]. On conclut comme pour les champs (on a une quasi-courbe quasi-invariante).

Nous allons voir maintenant que si l'on supprime la condition d'inversibilité (i) dans l'analyse de J. MARTINET, il peut se passer des phénomènes très intéressants : l'apparition de “canards”. Nous allons pour cela discuter l'équation de Van der Pol (sur laquelle le phénomène canard a été découvert [BCDD]) du point de vue Gevrey. Nous suivons ici (après un rappel du point de vue original sur les canards) un travail récent de M. CANALIS-DURAND [CD 1, 2].

On considère une forme singulièrement perturbée de l'équation de Van der Pol (1920) avec $\varepsilon > 0$ réel, infiniment petit :

$$(4) \quad \varepsilon \ddot{x} + (x^2 - 1)\dot{x} + x = 0.$$

On passe au “plan de Liénard”, en posant $u = \varepsilon \dot{x} + x^3/3 - x$. On obtient

$$(5) \quad \begin{cases} \varepsilon \dot{x} = u - x^3/3 + x \\ \dot{u} = -x \end{cases}$$

Le champ de vecteurs $(\frac{u-x^3/3+x}{\varepsilon}, -x)$ est “lent-rapide” : sa composante horizontale est infiniment grande sauf sur la courbe lente (la cubique $u = \frac{x^3}{3} - x$) où elle s'annule. La partie de la cubique entre les points $B(-1, 2/3)$ et $A(1, -2/3)$ est **répulsive**, le reste est **attractif**.

On montre que le système (5) a un cycle limite. Ce cycle est “lent-rapide”. Il est infiniment proche du cycle standard formé par deux arcs de la courbe lente (terminant en A et B) et deux segments horizontaux (partant de A et B), que l'on appelle son “ombre”. Par ailleurs le système a un point stationnaire $(0, 0)$. Ce point est **instable**.

Considérons maintenant l'équation de Van der Pol avec second membre :

$$(4) \quad \varepsilon \ddot{x} + (x^2 - 1)\dot{x} + x = a$$

où a est un paramètre réel.

Faisons varier le paramètre a entre 0 et 2 et observons la situation dans le plan de Liénard. Le point stationnaire $S(a)$ se déplace sur la cubique lente : on a $S(0) = (0, 0)$ et $S(1) = A$. Pour $0 < a < 1$ ce point est instable, pour $a > 1$ il est stable, mais le cycle limite a disparu : $a = 1$ est une **bifurcation de Hopf**. Le problème est de comprendre comment peut se passer cette bifurcation compte tenu du caractère lent-rapide du champ. En observant la variation de l'ombre du cycle limite au moment de sa disparition, on constate que pour certaines valeurs particulières cette ombre est obligée de longer un moment la partie répulsive de la courbe lente (entre A et B). Par définition ces valeurs du paramètre a correspondantes sont des “valeurs à canard” et les cycles correspondants sont des “canards” (avec ou sans tête selon que B est ou non dans leur ombre).

Pour avoir une valeur à canard il est évidemment nécessaire que a soit < 1 et infiniment proche de 1, mais on aimerait en savoir plus. On montre alors que toutes les valeurs à canard a_* ont un **même** “développement en ε -ombre”

$$1 + \sum_{n1} c_n \varepsilon^n.$$

Cela conduit à penser que “les canards ont la vie brève”. En fait cette vie est exponentiellement courte : si a_1 et a_2 sont des valeurs à canard, on a $|a_1 - a_2| < e^{-b/\varepsilon}$ (pour b limité convenable).

Expérimentalement on constate que :

Pour $\varepsilon = 1/20$ on observe les canards à peu près entre 0,9934909 et 0,9934915.

Pour $\varepsilon = 1/100$ on observe les canards à peu près entre 0,9987404512 et 0,9987404513, c'est à dire sur une plage de 10^{-10} ... Il est donc très difficile d'attraper les canards, même si l'on connaît leur développement en ε -ombre.

Tout cela m'a conduit, vers 1980, à conjecturer que le développement en ε -ombre des valeurs à canard pour l'équation de Van der Pol est Gevrey 1. Outre les questions théoriques une réponse positive à cette conjecture avait pour moi l'intérêt de fournir une méthode numérique pour chasser le canard : si la série est Gevrey, en la "sommant" par une transformation de Laplace incomplète (ou une quasi-sommation au plus petit terme), on obtient une valeur définie à une correction exponentiellement petite en ε près. L'erreur est donc du même ordre de grandeur que la durée d'existence de la valeur à canard cherchée. Cette conjecture (avec son application numérique) a d'abord été vérifiée expérimentalement, puis elle a été prouvée récemment par M. CANALIS-DURAND [CD 1, 2] (en utilisant entre autres l'amélioration du calcul par récurrence des coefficients c_n due à [ZS]).

M. CANALIS-DURAND montre aussi que le développement en ε -ombre de la trajectoire canard elle-même est aussi Gevrey 1 et reprouve ainsi l'existence des canards (par transformation de Laplace incomplète). Sa théorie s'applique à une famille de systèmes plus généraux que l'équation de Van der Pol (contenant des systèmes "classiques" : Brusselator...).

3.4. Les équations aux q -différences

On appelle équation linéaire algébrique aux différences (finies) dans le champ complexe une équation fonctionnelle de la forme

$$a_n(x)f(x+n) + \cdots + a_1(x)f(x+1) + a_0(x)f(x) = 0,$$

où les a_i sont des polynômes (à coefficients complexes) et f une fonction inconnue. Par exemple

$$f(x+1) - xf(x) = 0$$

est une équation aux différences admettant la fonction $f(x) = \Gamma(x)$ pour solution.

Ainsi on passe d'une équation différentielle à une équation aux différences en remplaçant l'automorphisme infinitésimal d/dx par l'automorphisme de translation $x \rightarrow x+1$. Celle-ci est une homographie de la sphère de Riemann admettant ∞ pour seul point fixe. On peut utiliser une homographie plus "générique" admettant deux points fixes distincts, par exemple $x \rightarrow qx$, avec q complexe non nul, qui admet pour points fixes 0 et ∞ . On obtient alors la notion d'équation aux q -différences (linéaire algébrique) :

$$a_n(x)f(q^n x) + \cdots + a_1(x)f(qx) + a_0(x)f(x) = 0.$$

On montre que les solutions séries formelles des équations aux différences analytiques, même non-linéaires, sont Gevrey : on a l'analogie du théorème de Maillet [GL]. Par contre la situation est très différente pour les équations aux q -différences. Dans ce cas on n'a plus en général d'estimations Gevrey, mais seulement des estimations " q -Gevrey" (selon la terminologie récemment introduite par J. P. BEZIVIN). Nous nous limiterons dans ce qui suit au cas où $|q| \neq 1$. Quitte à remplacer q par q^{-1} , on peut supposer $|q| > 1$.

Soit $\hat{f}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série formelle. On dit que \hat{f} est q -Gevrey de type s , si

$$|a_n| < C |q|^{s \frac{n(n+1)}{2}} A^n,$$

pour $C, A, s > 0$ convenables. On dit que le type s est optimal s'il n'existe pas d'estimation du même genre avec $s' < s$.

A tout opérateur linéaire algébrique aux q -différences T on associe un "polygone de Newton" $N(T)$, par analogie avec le cas des opérateurs différentiels. On a le résultat suivant dû à J. P. BEZIVIN :

THÉORÈME. — Soit

$$(1) \quad T(f) = a_n(x)f(q^n x) + \cdots + a_1(x)f(qx) + a_0(x)f(x) = 0$$

une équation linéaire algébrique aux q -différences, avec $|q| > 1$. Alors il existe un nombre fini de nombre réels positifs $s_1 < \cdots < s_r$ donnés par les pentes du polygone de Newton $N(T)$, tels que toute solution série formelle \hat{f} de (1) ait la propriété suivante :

\hat{f} est convergente ou est q -Gevrey de type optimal l'un des s_i .

Il existe des équations linéaires algébriques aux q -différences du second ordre dont les solutions séries formelles divergent (ADAMS). Il y a donc des solutions divergentes d'équations aux q -différences qui **n'admettent pas d'estimations Gevrey**. En voici un exemple simple :

On définit un opérateur σ_q par $\sigma_q f(x) = f(qx)$.

On note

$$\hat{\Omega}(x, q) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n q^{n(n+1)/2} x^{n+1}.$$

On a

$$x\sigma_q (q^{n(n+1)/2} x^{n+1}) = q^{(n+1)(n+2)/2} x^{n+2},$$

d'où

$$(1) \quad (x\sigma_q + 1) \hat{\Omega}(x, q) = \sigma_q \hat{\Omega}(x, q) + \hat{\Omega}(x, q) = x.$$

L'opérateur $x\sigma_q$ est l'analogue de l'opérateur différentiel x^2d/dx , l'équation (1) est la q -analogue de l'équation d'Euler

$$(x^2 \frac{d}{dx} + 1)y = x^2 y' + y = x,$$

et la série $\widehat{\Omega}(x, q)$ est la q -analogue de la série d'Euler

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n n! x^{n+1}.$$

Pour $q < 1$, la série $\widehat{\Omega}(x, q)$ est liée à la fonction θ_1 de Jacobi.

De

$$(\sigma_q - q)(x\sigma_q + 1) = qx\sigma_q^2 - x\sigma_q + q - 1$$

on déduit que la série $\widehat{\Omega}(x, q)$ est solution de l'équation aux q -différences du second ordre

$$(qx\sigma_q^2 - x\sigma_q + q - 1)f(x) = qxf(q^2x) - xf(qx) + (q - 1)f(x) = 0.$$

Du point de vue de la sommabilité le cas des équations aux différences est délicat : les solutions formelles ne sont pas en général multisommables [E 3]. Pour les équations aux q -différences il faut reprendre la théorie en remplaçant "développements asymptotiques Gevrey" par "développements asymptotiques q -Gevrey" (la décroissance exponentielle est alors remplacée par des estimations du type

$$|f(x)| < e^{-\mu(\frac{\log x}{\log q})^2}.$$

Il y a aussi des " q -analogues" des transformations de Borel et Laplace, et de la k -sommabilité : les nombres $n!$ sont les *moments* de la fonction e^{-u} :

$$\Gamma(n + 1) = n! = \int_0^{+\infty} u^n e^{-u} du.$$

On calcule les moments de la fonction $q^{-v(v+1)/2}$ (pour q réel, $q > 1$) :

$$\mu_n = \int_0^{+\infty} u^n q^{-v(v+1)/2} du,$$

avec $v = \frac{\log u}{\log q}$ ($u = q^v$).

On trouve :

$$\mu_n = \sqrt{2\pi \log q} q^{-1/8} q^{n(n+1)/2}$$

Remplaçant u par ξ/x , on obtient :

$$\Gamma(n + 1) x^{n+1} = n! x^{n+1} = \int_0^{+\infty} \xi^n e^{-\xi/x} d\xi$$

$$\Gamma(n + 1) x^{n+1} = n! x^{n+1} = \mathcal{L}(\xi^n)(x),$$

où \mathcal{L} est la transformation de Laplace, et

$$\sqrt{2\pi \log q} q^{-1/8} q^{n(n+1)/2} x^{n+1} = \int_0^{+\infty} \xi^n q^{-w(w+1)/2} d\xi,$$

$$\text{avec } w = \frac{\log \xi - \log x}{\log q} = \frac{\log \xi/x}{\log q};$$

$$\mu_n x^{n+1} = \sqrt{2\pi \log q} q^{-1/8} q^{n(n+1)/2} x^{n+1}.$$

On obtient

$$q^{n(n+1)/2} = \frac{q^{1/8}}{\sqrt{2\pi \log q}} \int_0^{+\infty} \xi^n q^{-v(v+1)/2} d\xi.$$

Il est donc naturel de définir une transformation q -Laplace par :

$${}_q\mathcal{L} \phi(x) = \frac{q^{1/8}}{\sqrt{2\pi \log q}} \int_0^{+\infty} \phi(\xi) q^{-w(w+1)/2} d\xi,$$

avec $w = \frac{\log \xi - \log x}{\log q}$. On a

$$q^{n(n+1)/2} x^{n+1} = {}_q\mathcal{L}(\xi^n)(x).$$

Tous ces problèmes sont en cours d'étude. (Je conjecture aussi la q -variante du théorème de Maillet dans le cas non-linéaire.)

3.5. La multiplicité des procédés “naturels” de sommation, les “branches” des fonctions et la dernière lettre d'Evariste Galois

Dans ce qui précède on a vu se dégager la possibilité d'attribuer une somme “naturelle” à une série divergente et d'améliorer radicalement la théorie asymptotique de Poincaré en la remplaçant par une théorie exacte. On a ainsi rempli le programme esquissé par E. BOREL [Bo 2] :

Non seulement les séries divergentes peuvent rendre de grands services au point de vue formel (ce dont personne n'a jamais douté) et au point de vue du calcul approximatif (séries asymptotiques), mais encore elles peuvent dans certains cas être calculées exactement. Une série divergente numérique peut avoir une valeur déterminée.

Mais si l'on y regarde de plus près la situation paraît moins idyllique. En effet dans certains cas on a vu apparaître non pas **une** mais **plusieurs** sommes naturelles différentes. D. DUMONT cite dans l'introduction de son livre [Du] le texte d'E. BOREL ci-dessus et qualifie son attitude d'optimiste, comparée à celle de G.H. HARDY dans [H 1] :

Different methods may sum the same series to different sums....

Mon point de vue est que le phénomène de multiplicité des “sommés naturelles” est

- 1) Moins surprenant qu’il n’y paraît.
- 2) Un avantage considérable plutôt qu’un inconvénient.

E. BOREL¹⁶ et G.H. HARDY¹⁷ avaient très bien compris ce qui est à mon avis l’une des raisons fondamentales du phénomène : la **multiplicité des prolongements analytiques**.

Ils ont de plus tout les deux insisté sur le fait qu’une bonne théorie de la sommation devrait reposer sur l’étude du prolongement analytique :

G. H. HARDY appelle le procédé de sommation par prolongement analytique que nous avons évoqué en 1.5 *ℳ-method* :

...then we call s the \mathfrak{S} sum of Σa_n . The value of s may naturally depend on the region chosen.

Il écrit aussi (à propos des idées d’EULER sur la sommation dont nous avons parlé plus haut en 1.1) :

It is impossible to state Euler’s principle accurately without clear ideas about functions of a complex variable and analytic continuation.

Le phénomène fondamental apparaît déjà quand on étudie le prolongement analytique d’une série **convergente** en dehors de son disque de convergence. Pour le voir revenons à l’exemple déjà étudié en 1.6 :

$$\hat{f}(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1)(\frac{1}{2} - 2)}{3!}x^3 + \dots$$

Pour $|x| < 1$ la somme de \hat{f} est

$$f(x) = \sqrt{1+x}.$$

Si l’on veut sommer la série

$$1 + \frac{1}{2}(-2) + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1)}{2!}(-2)^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1)(\frac{1}{2} - 2)}{3!}(-2)^3 + \dots$$

on peut utiliser indifféremment le prolongement analytique le long d’une demi-droite issue de l’origine et d’argument $\pi - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ “petit”) suivi d’un arc “descendant” vers -2 ou le prolongement analytique le long d’une demi-droite issue de l’origine et d’argument $\pi + \varepsilon$ suivi d’un arc “montant” vers -2 : il y a un choix de “branche” ou ambiguïté ; dans le premier cas on trouve i , dans le second $-i$. A la comparaison des deux procédés de sommation correspond pour la série \hat{f} la transformation $f \rightarrow -f$ (action de la monodromie autour de la singularité -1 portée par la “direction singulière” \mathbf{R}^- d’argument π).

¹⁶ Il importe ici de faire une remarque essentielle ; dans le cas où la fonction analytique $\phi(z)$ n’est pas uniforme la théorie précédente conduit à associer à la série divergente $\phi(z_0)$ plusieurs valeurs différentes ou même une infinité [Bo 1], Ch. 4, 6.3, p. 153.

¹⁷ If $\sum a_n x^n$ is convergent for small x , and defines a function $f(x)$ of the complex variable x , one-valued and regular in an open and connected region containing the origin and the point $x = 1$; and $f(x) = s$; then we call s the \mathfrak{S} -sum of $\sum a_n$. The value of s may naturally depend on the region chosen.

Le phénomène de Stokes découvert par STOKES dans l'étude de l'équation d'Airy (*cf.* 1.4) est tout à fait analogue au phénomène de changement de branche que nous venons de décrire (et cette analogie se trouve déjà dans le mémoire de STOKES¹⁸ comme nous l'avons signalé plus haut). De ce point de vue le phénomène de Stokes peut se décrire ainsi :

Soit $\hat{f}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série formelle sommable (ou plus généralement multisommable) dans toute direction voisine de la direction α sauf dans la direction (singulière) α . En appliquant à la série \hat{f} les opérateurs de sommation "latérale" S_α^- et S_α^+ , on obtient deux sommes **distinctes** f_α^- et f_α^+ . Là aussi il y a un choix de "branche" ou ambiguïté. En travaillant dans une algèbre différentielle convenable on définit l'**automorphisme de Stokes** (associé à la direction singulière α) :

$$St_\alpha = (S_\alpha^+)^{-1} S_\alpha^-$$

Dans un formalisme convenable (*cf.* [MR 2], [MR 3]) cet automorphisme (d'algèbre différentielle) s'interprète comme une "monodromie" autour d'une "singularité infiniment proche de l'origine" portée par la direction singulière α .

La description du phénomène de Stokes donnée par STOKES pour les solutions formelles à l'infini de l'équation d'Airy est très voisine de celle que nous venons de détailler. En gros sa démarche est la suivante : il construit une base \mathcal{B} de solutions de l'équation d'Airy en utilisant les développements **converge**nts à l'**origine** (ascending series). Ensuite il resomme dans diverses directions les solutions formelles à l'**infini** (descending series) par un procédé numérique **exponentiellement précis** (variante de la sommation au plus petit terme). Cette méthode est assez précise pour lui permettre d'exprimer les sommes des solutions formelles à l'infini dans la base \mathcal{B} par des "constantes arbitraires" (*arbitrary constants*); on dit aujourd'hui formules de connection. C'est alors que surgit un problème : les développements à l'origine sont des fonctions entières (l'origine est un point régulier) et par suite la monodromie autour de l'origine est **triviale** tandis que les développements divergents à l'infini sont en \sqrt{x} et leur "monodromie" (monodromie formelle) est non triviale, d'où apparemment une contradiction avec l'analyse que nous venons de faire. C'est cette contradiction qui a laissé STOKES perplexe pendant de longues années avant qu'il trouve la clef du mystère (*cf.* la lettre à sa fiancée citée plus haut) :

...inasmuch as the descending series contain radicals which do not appear in the ascending series, we may see, a priori that the arbitrary constants must be discontinuous.

¹⁸ *Divergent series are usually divided into two classes, according as the terms are regularly positive, or alternately positive and negative..., series of the former kind appear as singularities of the general case of divergent series proceeding according to powers of an imaginary variable, as indeterminate forms in passing through which a discontinuity of analytical expression takes place analogous to a change of sign of a radical [Sto 2], p. 78.*

Ainsi l'ambiguïté que nous avons décrite apparaît comme discontinuité dans les constantes de connection quand on **traverse une ligne singulière** : pour une ligne singulière la précision de la méthode de sommation numérique de STOKES est insuffisante pour le calcul des constantes arbitraires (on en perd une... : il s'agit en effet de calculer avec précision une solution exponentiellement récessive et il faut disposer pour cela d'une précision exponentielle suffisante ; le long d'une ligne singulière la solution récessive est trop petite pour être vue numériquement par la méthode employée!). Pour reprendre l'analyse de DINGLE [Di], Ch. 1, p. 7 :

The Stokes rays for an asymptotic series are determined by those phases for which the series (including its multiplier) attains peak exponential dominance over its associated function.

(La discontinuité des constantes arbitraires apparaît au moment de la dominance maximale d'un symbole exponentiellement dominant sur un symbole exponentiellement récessif.)

Le point de vue que nous venons de développer diffère notablement de l'approche "traditionnelle" du phénomène de Stokes¹⁹. Selon cette approche le phénomène consiste en un **échange de dominance** entre deux exponentielles ; il se voit donc le long des lignes "oscillantes" ou **lignes de Stokes**. Au contraire dans notre description (et celle de STOKES lui-même) le phénomène se produit sur les lignes singulières (appelées parfois lignes "anti-Stokes"). L'origine de cette différence est dans l'opposition entre la vision traditionnelle des séries divergentes comme séries asymptotiques et la conception des séries divergentes comme "codant" des solutions exactes. Dans un cas on met l'accent sur l'asymptotique au sens de Poincaré (et on ne perçoit pas la nature fondamentale du phénomène...), dans l'autre on utilise l'asymptotique **exacte** (cf. aussi [CNP]).

Revenons à la comparaison entre un "changement de branches algébriques" et un "changement de branches par phénomène de Stokes". S'il y a une profonde analogie entre ces deux phénomènes (il s'agit dans les deux cas de "transformations galoisiennes" : automorphismes d'algèbres différentielles), il y a aussi des différences radicales. Par exemple la matrice du changement de branche pour $(\sqrt{1+x}, \sqrt{1+x^3})$ est

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

¹⁹Seul Dingle semble s'écarter de cette approche et perpétuer les idées originales de Stokes. Il appelle d'ailleurs lignes de Stokes ce que les autres auteurs appellent lignes anti-Stokes (nos lignes singulières). Cela va dans le sens de l'une de ses idées centrales : la recherche d'une théorie asymptotique exacte. Ses "complete asymptotic expansions" préfigurent les "développements transasymptotiques".

tandis que celle du phénomène de Stokes St_π pour l'équation d'Euler (*resp.* celles de l'équation d'Airy) est (sont) de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec β complexe non nul.

La seconde matrice est **unipotente**. Cela est lié au fait que le phénomène de Stokes n'est pas décelable asymptotiquement quand on franchit une ligne singulière : après le passage les développements asymptotiques des solutions n'ont pas changé (ce qui n'est pas du tout le cas dans le cas des branches algébriques). On démontre que (essentiellement pour la même raison) les opérateurs de Stokes sont toujours unipotents. Ceci a une conséquence fondamentale : les opérateurs de Stokes St_α ont des **générateurs infinitésimaux** (logarithmes) notés $\dot{\Delta}_\alpha$:

$$St_\alpha = e^{\dot{\Delta}_\alpha}.$$

Ceci permet une étude "**infinitésimale**" du phénomène de Stokes. Ce point de vue a été découvert et étudié systématiquement par Jean ECALLE : "Fonctions résurgentes", "Calcul différentiel étranger" (l'opérateur $\dot{\Delta}_\alpha$ est une dérivation galoisienne, *i.e.* une dérivation commutant à la dérivation ordinaire, nommée dérivation étrangère pointée), "Accélération" [E 1], [E 2], [E 3], [E 4], [Ca], [CNP].

La veille du duel dans lequel il devait trouver la mort, Evariste GALOIS écrivait, dans sa dernière lettre, adressée à son ami Auguste CHEVALLIER [G1] :

Tu sais, mon cher Auguste, que ces sujets ne sont pas les seuls que j'ai explorés. Mes principales méditations depuis quelque temps étaient dirigées sur l'application à l'analyse transcendante de la théorie de l'ambiguïté. Il s'agissait de voir a priori dans une relation entre quantités ou fonctions transcendantes quels échanges on pouvait faire, quelles quantités on pouvait substituer aux quantités données sans que la relation pût cesser d'avoir lieu. Cela fait reconnaître tout de suite l'impossibilité de beaucoup d'expressions que l'on pourrait chercher. Mais je n'ai pas le temps et mes idées ne sont pas encore bien développées sur ce terrain qui est immense. ...

La signification de ce texte semble être restée longtemps assez mystérieuse. Mais il me semble possible aujourd'hui de l'éclaircir en grande partie.

Dans sa préface aux *Œuvres Complètes* de GALOIS [G3], Jean DIEUDONNÉ écrit [G3] :

...mais il y a lieu de penser qu'il devait être très proche de l'idée de la "surface de Riemann" attachée à une fonction algébrique et qu'une telle idée devait être fondamentale dans ses recherches sur ce qu'il appelle la "théorie de l'ambiguïté"....

Ceci éclaire un peu la question, mais si l'on relit soigneusement le texte de GALOIS il paraît évident que l'idée de surface de Riemann ne devait concerner qu'**une partie** de sa "théorie de l'ambiguïté". Je pense qu'Émile PICARD et surtout Jules DRACH ont deviné dans quelle direction allaient vraiment les dernières recherches de GALOIS.

Emile PICARD écrivait dans sa préface aux œuvres complètes de GALOIS [G2] :
...il...aurait édifié, dans ses parties essentielles, la théorie des fonctions algébriques d'une variable telle que nous la connaissons aujourd'hui. Les méditations de Galois portèrent encore plus loin ; il termine sa lettre en parlant de l'application à l'analyse transcendante de la théorie de l'ambiguïté. On devine à peu près ce qu'il entend par là, et sur ce terrain qui, comme il le dit est immense, il reste encore aujourd'hui bien des découvertes à faire....

Il nous reste évidemment à deviner ce que veut dire PICARD ! Si l'on pense qu'Émile PICARD est l'un des fondateurs de la théorie de Galois différentielle (théorie de Picard-Vessiot), il semble assez raisonnable de penser qu'il avait la conviction que GALOIS avait quelque idée de cette théorie. En tout c'était la conviction de Jules DRACH qui écrivait à la fin de sa thèse :

Nous serions heureux si notre travail pouvait appeler l'attention sur les quelques lignes qui terminent la lettre de Galois, et s'il pouvait être regardé comme une première tentative d'éclaircissement de la pensée qu'elles expriment :...

De mon côté lisant voici quelques années la lettre de Galois il m'a immédiatement paru évident²⁰ que les idées de GALOIS sur la théorie de l'ambiguïté préfiguraient la théorie de Galois différentielle et même dans une certaine mesure la lecture que j'ai donnée récemment de cette théorie : il est impossible de savoir si GALOIS avait quelque idée du phénomène de Stokes et de sa nature Galoisienne, que j'ai mise en évidence dans [Ra 3]. (L'étude des fragments de calcul trouvés dans ses papiers [G3] ne permet pas de conclure.) Par contre, comme Jules DRACH, je suis certain qu'Evariste GALOIS avait compris la nature "Galoisienne" de certaines transformations en analyse complexe (ambiguïtés...), comme par exemple le "recalibrage" des exponentielles (dont le "prototype" est le remplacement dans toutes les formules de $e^{1/x}$ par $\lambda e^{1/x}$; λ étant un nombre complexe non nul fixé).

La théorie de Galois différentielle joue, pour les équations différentielles, le même rôle que, pour les équations algébriques, la théorie de Galois classique. Pour une bonne compréhension du sujet le mieux est de revenir à l'idée originale de GALOIS que celui-ci exprimait d'une façon particulièrement limpide [G 2, 3] :

Proposition I 3b. Théorème. Soit une équation donnée, dont a, b, c, \dots sont les m racines. Il y aura toujours un groupe de permutations des lettres a, b, c, \dots qui jouira de la propriété suivante :

1° que toute fonction des racines, invariante par les substitutions de ce groupe, soit rationnellement connue ;

2° réciproquement, que toute fonction des racines, déterminée rationnellement, soit invariante par ces substitutions.

²⁰Lors de cette lecture je ne connaissais ni le texte de Drach, que j'ai découvert par hasard quelques semaines plus tard à la suite d'une demande de référence de N. Kamran, ni celui de Picard qui m'a été signalé par D. Bennequin après l'exposé de mon interprétation de la dernière lettre de Galois dans mon séminaire à Strasbourg...

La théorie de Galois différentielle a été découverte par PICARD et VESSIOT [Pi], [Ve]. Le lecteur intéressé pourra consulter l'excellente introduction [Ka], et pour en savoir plus sur les relations entre séries divergentes et théorie de Galois différentielle [MR 2], [Ra 6], et les articles plus techniques [Ra 4], [Mi]. Nous nous contenterons ici de quelques indications, en nous limitant au cas linéaire. Soit (K, ∂) un corps différentiel de caractéristique nulle. Soit $C = \{c \in K / \partial c = 0\}$ son corps des constantes. (Par exemple $(\mathbf{C}(x), d/dx)$, $(\mathbf{C}\{x\}, x^2 d/dx)$, $(\mathbf{C}\{\{x\}\}, x^2 d/dx)$ ont \mathbf{C} pour corps des constantes.)

Soit $D = a_n(d/dx)^n + \dots + a_1 d/dx + a_0$ un opérateur différentiel à coefficients dans K . Une extension de Picard-Vessiot associée à D est un sur-corps différentiel L de K engendré différentiellement sur K par un système fondamental de solutions de D , le corps des constantes C restant le même. Si C est algébriquement clos une telle extension existe et est unique (à isomorphisme près). Par définition le groupe de Galois différentiel de D sur K est le groupe $Gal_K(D) = Aut_K L$ des K -automorphismes de corps différentiel de L . Un élément σ de $Gal_K(D)$ le C -espace vectoriel des solutions de D dans L . On en déduit (en fixant une base de cet espace) une représentation de $Gal_K(D)$ dans $GL(n; C)$. Le sous-groupe obtenu de $GL(n; C)$ est **algébrique** (*i.e.* défini par des polynômes à n^2 variables.)

Les groupes de Galois différentiels peuvent se calculer à partir de la connaissance de la monodromie (formelle ou non), du “recalibrage” des exponentielles évoqué plus haut et du phénomène de Stokes.

Citons, pour terminer, dans cette direction, un résultat assez frappant obtenu par C. MITSCHI en utilisant la sommation de séries divergentes [Mi]²¹. On considère la fonction

$$K(t) = \int_0^{+\infty} x^{-1/2} e^{-x^7 - tx} dx.$$

Cette fonction est la transformée de Laplace de la fonction $x^{-1/2} e^{-x^7}$.

La fonction K vérifie une équation différentielle linéaire algébrique d'ordre 7

$$D_K K = 7K^{(7)} + tK' + \frac{1}{2}K = 0.$$

Si dans cette équation différentielle on fait le changement de variable $z = (t/7)^7$ (ramification), la transformée U de K vérifie l'équation différentielle hypergéométrique confluente généralisée

$$D_{7,1} U = 0$$

avec

$$D_{7,1} = z\left(\partial + \frac{1}{14}\right) + \prod_{r=0}^6 \left(\partial - \frac{r}{7}\right)$$

²¹Peu de temps avant le même résultat avait été obtenu par voie algébrique par N. KATZ [Kat 2,3]

($\partial = zd/dz$).

On montre que le groupe de Galois différentiel de $D_{7,1}$ est²²

$$\text{Gal}_{\mathbf{C}(x)}(D_{7,1}) = G_2 \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}.$$

La monodromie de D_K est évidemment triviale, on en déduit que le groupe de Galois différentiel de D_K est

$$\text{Gal}_{\mathbf{C}(x)} D_K = G_2.$$

La relation entre la “fonction spéciale” K et le groupe exceptionnel G_2 est semblable à celle entre les fonctions d’Airy A ou B et le groupe $SL(2; \mathbf{C})$ [MR 2].

A la fin de cette rédaction, il me reste à signaler que je n’ai pu parler de toutes les applications des séries divergentes ; même si on se limite aux cas où interviennent des estimations Gevrey et/ou des corrections exponentiellement petites. (Parmi les omissions notables je citerai les beaux travaux récents sur l’équation stationnaire de Schrödinger dans une perspective semi-classique “exacte” [Vo], [CNP 1], et la preuve due à SCHÄFFKE et VOLKMER de la non existence d’ovales isocordes à deux “centres”...). D’autres domaines des Mathématiques ou de la Physique (invariants adiabatiques, théorie quantique des champs (instantons, renormalons, séries de perturbations,...), étude “thermodynamique” du “problème du voyageur de commerce”, solitons,...) relèvent clairement de cette dernière problématique sans qu’il y ait pour l’instant beaucoup de résultats théoriques précis. Il reste énormément de travail !

Bibliographie

[AS] M. ABRAMOWITZ, I. STEGUN, *Handbook of Mathematical Functions*. National Bureau of Standard, U.S.A. (1964).

[Ai] AIRY, *On the intensity of light in the neighbourhood of a Caustic*, Camb. Phil. Trans., Vol. VI, 379.

[Bae] C. BAESENS, *Courbes invariantes d’une application lente rapide analytique et retard à la bifurcation de doublement de période*, preprint CEN Saclay, France (1991).

[Ba 1] W. BALSER, *A different characterization of multisummable power series*, preprint Universität Ulm, (1990).

[Ba 2] W. BALSER, *Summation of formal power series through iterated Laplace transform*, Universität Ulm, preliminary version (1991).

²²Le groupe G_2 (ou plutôt sa représentation en dimension 7) est un sous-groupe algébrique de dimension complexe 14 du groupe spécial orthogonal $SO(7; \mathbf{C})$. La version réelle de ce groupe a de belles propriétés : c’est le groupe des automorphismes de l’algèbre des octaves de Cayley, et topologiquement c’est un fibré de base la sphère S^6 dont les fibres sont des fibrés de base S^5 et de fibre S^3 [Pos].

- [BBRS] W. BALSER, B.L.J. BRAAKSMA, J.P. RAMIS, and Y. SIBUYA, *Multisummability of formal power series solutions of linear ordinary differential equations*, preprint Institute for Mathematics and its applications, University of Minnesota, Minneapolis, IMA 717 (1990), to appear in *Asymptotic Analysis* (1991).
- [Bar] E.J. BARBEAU, *Euler subdues a very obstreperous series*, *Amer. Math. Monthly* 86 (1979), p. 356-372.
- [BCDD] E. BENOIT, J.L. CALLOT, F. DIENER, M. DIENER, *Chasse au canard*, *Collectanea Mathematica*, 32,45-75. 1-3 (1981), p. 37-119.
- [BH] M. V. BERRY, C. J. HOWLS, *Hyperasymptotics for integrals with saddles*, preprint H. H. Wills Physics Laboratory, Bristol (1991).
- [Be] J.P. BEZIVIN, *Sur les équations fonctionnelles aux q -différences*, preprint Paris VI (1990).
- [Bo 1] E. BOREL, *Leçons sur les Séries Divergentes*, Deuxième édition (1928), Gauthier-Villars, Paris.
- [Bo 2] E. BOREL, *Mémoire sur les Séries Divergentes*, *Ann. Sc. Ecole Norm. Sup.*, Paris (3), 16 (1899).
- [Br 1] B.L.J. BRAAKSMA, *Multisummability and Stokes multipliers of linear meromorphic differential equations*, *J. Differential Equations* 92 (1991), p. 45-75.
- [Br 2] B.L.J. BRAAKSMA, *Multisummability of formal power series solutions of non-linear meromorphic differential equations*, preprint University of Groningen (1991).
- [CD 1] M. CANALIS-DURAND, *Caractère Gevrey des solutions canard de l'équation de Van der Pol*, *C.R. Acad. Sc. Paris* 311, Série I, 1 (1990), p. 27-30.
- [CD 2] M. CANALIS-DURAND, *Caractère Gevrey des solutions canard de l'équation de Van der Pol*, preprint Université de Nice-Sophia Antipolis, 264 (1990).
- [Can] B. CANDELPERGHER, *Une introduction à la résurgence*, *Gazette des Mathématiciens (Soc. Math. France)*, 49 (1989).
- [CNP 1] B. CANDELPERGHER, J.C. NOSMAS, F. PHAM, *Premiers pas en calcul étranger*, preprint Université de Nice (1991).
- [CNP 2] B. CANDELPERGHER, J.C. NOSMAS, F. PHAM, *Approche de la résurgence*, Livre à paraître.
- [Ca] T. CARLEMAN, *Les Fonctions Quasi-Analytiques*, Gauthier-Villars, Paris (1926).
- [C] A. L. CAUCHY, *Comptes Rendus Acad. Sc. Paris* 23 (1846), p. 251-255.
- [CC] D.V. CHUDNOVSKY, G.V. CHUDNOVSKY, *Computer assisted number theory*, Springer Lecture Notes in Math, 1240, 1987, p. 1-68.
- [DR] F. DIENER, G. REEB, *Analyse Non Standard*, Hermann, Paris (1989).
- [Di] R.B. DINGLE, *Asymptotic Expansions : their Derivation and Interpretation*, Academic Press (1973).

- [Du] D. DUMONT, *Les séries divergentes*, livre en cours de rédaction, version provisoire d'août 1987.
- [D M] A. DUVAL, C. MITSCHI, *Matrices de Stokes et groupes de Galois des équations hypergéométriques confluentes généralisées*, Pacific Journal of Mathematics, vol. 138, 1 (1989), p. 25–56.
- [E 1] J. ECALLE, *Les Fonctions Résurgentes*, t. I, Publications Mathématiques d'Orsay (1981).
- [E 2] J. ECALLE, *Les Fonctions Résurgentes*, t. II, Publications Mathématiques d'Orsay (1981).
- [E 3] J. ECALLE, *Les Fonctions Résurgentes*, t. III, Publications Mathématiques d'Orsay (1985).
- [E 4] J. ECALLE, *Introduction à l'accélération et à ses applications*, book submitted to Travaux en Cours (1992).
- [E 1] L. EULER, *Remarques sur un beau rapport entre les séries des puissances tant directes que réciproques*, Commentatio 352 indicis ENESTROEMANI, Mémoires de l'académie des sciences de Berlin, 17, 1761 (1768), p. 83-106.
- [E 2] L. EULER, *de seriebus divergentibus*, Leonardi Euleri Opera Omnia.14, Teubner, Leipzig-Berlin (1925), p. 601-602. Traduction anglaise par E.J. Barbeau et P.J. Leah, Historia Mathematica, 3 (1976), p. 141-160.
- [F 1] A. FRUCHARD, *Thèse*, Université Paris 7 (1991).
- [F 2] A. FRUCHARD, *Prolongement analytique et systèmes discrets*, Preprint Strasbourg (1991).
- [FGA] A. FUCHS, R. GIULIANO-ANTONINI, *Théorie générale des densités*, Ann. Acad. Lincei (1991).
- [G 1] E. GALOIS, *Lettre à Auguste Chevallier*, dans *Ecrits et mémoires mathématiques d'Evariste Galois*, Gauthier-Villars, Paris (1962).
- [G 2] E. GALOIS, *Œuvres Mathématiques d'Evariste Galois*, Gauthier-Villars, Paris (1897).
- [G 3] E. GALOIS, *Ecrits et mémoires mathématiques d'Evariste Galois*, Gauthiers-Villars, Paris (1962).
- [GL] R. GÉRARD, D.A. LUTZ, *Maillet Type Theorems for Algebraic Difference Equations*, Kumamoto J. Math., 3 (1990), p. 11-26.
- [Ge] M. GEVREY, *La nature analytique des solutions des équations aux dérivées partielles*, Ann. Sc. Ecole Norm. Sup. (3), 25 (1918), p. 129-190.
- [Gi] H. GINGOLD, *A necessary condition for a power series to be a formal solution of a singular linear differential equation of order k* , J. Math. Anal. Appl. 52 (1975), p. 546-552.
- [Goo] I. J. GOOD, *Some relations between certain methods of summation of infinite*

- series*, Journal of the London Mathematical Society (1941), p. 144-165.
- [H 1] G. H. HARDY, *Divergent Series*, Clarendon Press, Oxford (1949).
- [H 2] G. H. HARDY, *Note on a divergent series*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 37 (1941), p. 1-8.
- [H 3] G. H. HARDY, *On the summability of series by Borel's and Mittag-Leffler's methods*, Journal of the London Mathematical Society 9, (1934), p. 153-157.
- [II'YEY] Y. IL'YASHENKO, P. M. ELIZAROV, Y. YAKOVENKO, *The Stokes Effect in Non Linear Analysis*, Livre en préparation, A.M.S..
- [J] W. JURKAT, *Summability of asymptotic series*, preprint Universität Ulm, (1990).
- [Ka] I. KAPLANSKY, *An Introduction to Differential Algebra*, Hermann, Paris (1957).
- [Kat 1] N.M. KATZ, *On the calculation of some differential Galois Groups*, Inventiones Math. 87 (1987).
- [Kat 2] N.M. KATZ, *Exponential sums and differential equations*, book to appear (preprint 1989).
- [Kat 3] N.M. KATZ, *Exponential sums over finite fields and differential equations over the complex numbers : some interactions*, A.M.S. Winter meeting, 1989.
- [Le] E. LEROY, *Sur les séries divergentes et les fonctions définies par un développement de Taylor*, Ann. Fac. Université de Toulouse (1900), p. 317-430.
- [LR 1] M. LODAY-RICHAUD, *Sommation des séries provenant de systèmes différentiels linéaires*, ce volume.
- [LR 2] M. LODAY-RICHAUD, *Introduction à la multisommabilité*, Gazette des Mathématiciens, Soc. Math. de France (avril 1990).
- [Lu] Y.L. LUKE, *The special functions and their approximations*, vol. 1, Academic Press (1969).
- [MOS] W. MAGNUS, F. OBERHETTINGER, R.P. SONI, *Formulas and Theorems for the special functions of Mathematical Physics*, Springer-Verlag Berlin (1966).
- [M] E. MAILLET, *Sur les séries divergentes et les équations différentielles*, Ann. Ec. Norm. Sup. Paris (1903), p. 487-518.
- [Ma 1] B. MALGRANGE, *Equations différentielles à coefficients polynomiaux*, Progress in Math., Birkhäuser (1991).
- [Ma 2] B. MALGRANGE, *Equations différentielles linéaires et transformation de Fourier : une introduction*, Conférences à l'IMPA, Rio de Janeiro (1988).
- [Ma 3] B. MALGRANGE, *Sur le théorème de Maillet*, Asymptotic Analysis 2 (1989), p. 1-4.
- [Ma 4] B. MALGRANGE, *Travaux d'Ecalte et de Martinet-Ramis sur les systèmes dynamiques*, Sémin. Bourbaki 1981-82, exp. 582, Astérisque 92-93 (1982).

- [Ma R] B. MALGRANGE, J.P. RAMIS, *Fonctions Multisommables*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble 42, 1 (1992).
- [Mar] J. MARTINET, *Les derniers manuscrits de Jean Martinet*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble 42, 31(1992).
- [MR 1] J. MARTINET, J.P. RAMIS, *Problèmes de modules pour des équations différentielles non linéaires du premier ordre*, Publications Math. de l'I.H.E.S. 55 (1982), p. 64-164.
- [MR 2] J. MARTINET, J.P. RAMIS, *Théorie de Galois Différentielle et Resommation*, Computer Algebra and Differential equations (E. Tournier ed.), Academic Press (1989), p. 117-214.
- [MR 3] J. MARTINET, J.P. RAMIS, *Elementary acceleration and multisummability*, preprint I.R.M.A. Strasbourg, 428/P-241 (1990), Ann. Inst. Henri Poincaré, Physique Théorique, 54, 4 (1991), p.331-401
- [MR 4] J. MARTINET, J.P. RAMIS, *Classification analytique des équations différentielles non linéaires résonnantes du premier ordre*, Annales Scient. Ecole Normale Supérieure, 16 (1983), p. 571-621.
- [MR 5] J. MARTINET, J.P. RAMIS, *Analytic Classification of Resonant Saddles and Foci*, Singularities and Dynamical Systems, North-Holland Math. Studies, 103 (1985), p. 109-135.
- [Mi] C. MITSCHI, *Differential Galois groups and G-functions*, Proceedings CADE 2, 1990, Academic Press (1991).
- [Mou] R. MOUSSU, *Les conjectures de R. Thom sur les singularités de feuilletages holomorphes*, preprint Dijon.
- [Ne] NEVANLINNA, *Zur Theorie der Asymptotischen Potenzreihen*, Ann. Acad. Scient. Fennicae, ser. A, From XII (1919), p. 1-81.
- [O] F.W.J. OLVER, *Asymptotics and Special Functions*, Academic Press (1974).
- [Pe] O. PERRON, *Über lineare Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten*, Acta Math. 34 (1910), p. 139-163.
- [Pi] E. PICARD, *Analogies entre la Théorie des équations différentielles linéaires et la théorie des équations algébriques*, Gauthier-Villars, Paris (1936).
- [P] H. POINCARÉ, *Sur les groupes des équations linéaires*, Acta. math. 5 (1884), p. 240-278.
- [Pos] M. POSTNIKOV, *Leçons de Géométrie, Groupes et Algèbres de Lie*, éditions MIR, Moscou (1982), traduction française (1985).
- [Ra 1] J.P. RAMIS, *Développement de Gevrey*, Astérisque 59-60 (1978), p. 173-204.
- [Ra 2] J.P. RAMIS, *Les séries k-sommables et leurs applications*, Analysis, Microlocal Calculus and Relativistic Quantum Theory, Proceedings "Les Houches" 1979, Springer Lecture Notes in Physics 126 (1980), p. 178-199.

- [Ra 3] J.P. RAMIS, *Phénomène de Stokes et filtration Gevrey sur le groupe de Picard-Vessiot*, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 301 (1985), p. 165–167.
- [Ra 4] J.P. RAMIS, *Phénomène de Stokes et resommation*, C.R. Acad. Sc. Paris, T. 301 (1985), pp 99–102.
- [Ra 5] J.P. RAMIS, *Théorèmes d'indices Gevrey pour les équations différentielles ordinaires*, Memoirs of the American Mathematical Society 296 (1984), pp 1–95.
- [Ra 6] J.P. RAMIS, *A short introduction to differential Galois theory*, New Trends in Non Linear Control Theory, J. Descusse, M. Fliess, A. Isidori, D. Leborgne Eds., Springer Lecture Notes in Control and Information Sciences 122, (1989), p.143-159.
- [Ra 7] J.P. RAMIS, *Filtration Gevrey sur le groupe de Picard-Vessiot d'une équation différentielle irrégulière*, Preprint Instituto de Matematica Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 45 (1985), p.1-38.
- [RS 1] J.P. RAMIS, Y. SIBUYA, *Hukuhara's domains and fundamental existence and uniqueness theorems for asymptotic solutions of Gevrey type*, Asymptotics 2 (1989), p. 39–94.
- [RS 2] J.P. RAMIS, Y. SIBUYA, *Asymptotic expansions with Gevrey estimates and cohomological methods*, Livre en préparation.
- [Sc] R. SCHÄFFKE, *On a Theorem of Y. Sibuya*, letter to Y. Sibuya (1991).
- [Si 1] Y. SIBUYA, *Linear Differential Equations in the Complex Domain : Problems of Analytic Continuation*, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 82, A.M.S. (1990)
- [Si 2] Y. SIBUYA, *Gevrey property of formal solutions in a parameter*, preprint School of Mathematics, University of Minnesota, Minneapolis (1989)
- [Si 3] Y. SIBUYA, *Gevrey asymptotics and Stokes multipliers*, Proceedings CADE 2, 1990, Academic Press (1991).
- [Sti 1] STIELTJES, *Recherches sur quelques séries semi-convergentes*, Annales Sc. Ecole Norm. Sup. Paris (3), 3 (1886), p. 201-258.
- [Sti 2] STIELTJES, *Recherches sur les fractions continues*, Annales Fac. Sc. Université de Toulouse, t. VIII, IX (1894, 1895), p. 1-122, 1-47.
- [Sto 1] G.G. STOKES, *On the numerical calculation of a class of Definite Integrals and Infinite Series*, Trans. of the Cambridge Phil. Soc., vol. IX (1857).
- [Sto 2] G.G. STOKES, *On the discontinuity of arbitrary constants which appear in divergent developments*, Trans. of the Cambridge Phil. Soc., vol. X (1857), p. 106–128.
- [Sto 3] G.G. STOKES, *Early letters to Lady Stokes, London, March 17, 1857*, Memoirs and Scientific correspondance, vol. 1, Cambridge University Press, (1907), p. 62.
- [Th 1] J. THOMANN, *Resommation des séries formelles solutions d'équations différentielles linéaires ordinaires du second ordre dans le champ complexe au voisinage*

de singularités irrégulières, Numer. Math. 58 (1991), p.503-535.

[Th 2] J. THOMANN, *Problèmes algorithmiques posés par la resommation*, Journées GRECO de Calcul Formel (1990).

[Tou 1] J.C. TOUGERON, *An introduction to the theory of Gevrey expansions and to the Borel-Laplace transform with some applications*, preprint University of Toronto, Canada (1990).

[Tou 2] J.C. TOUGERON, *Sur les ensembles analytiques-réels définis par des équations Gevrey au bord*, manuscrit, Rennes (1990).

[Tour] E. TOURNIER, *Solutions formelles d'équations différentielles. Le logiciel de calcul formel : DESIR. Etude théorique et réalisation*, Thèse, Grenoble (1987).

[V] VESSIOT, *Sur les équations différentielles linéaires*, Thèse, Ann. de l'Ecole Normale Supérieure (1891).

[Vo] A. VOROS, *The return of the quartic oscillator (the complex WKB method)*, Ann. Inst. H. Poincaré 29,3 (1983).

[Wa] W. WASOW, *Asymptotic Expansions for ordinary Differential Equations*, Interscience Publishers New-York (1965), Reprint Dover Publ., New-York (1987).

[Wat 1] G. N. WATSON, *The transformation of an asymptotic series into a convergent series of inverse factorials*, Circ. Math. Palermo Rend., 34 (1912), p. 41-88.

[Wat 2] G.N. WATSON, *A theory of Asymptotic Series*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, ser. A, vol. CCXI (1911), p. 279-313.

[Wat 3] G.N. WATSON, *The characteristics of Asymptotic Series*, Quarterly Journal of Mathematics, vol. XLIII (1912), p. 65-77.

[ZS] A.K. ZVONKIN, M.A. SHUBIN, *Non Standard Analysis and singular perturbations of ordinary differential equations*, Russian Math. Surveys, 39, 2 (1984), p. 69-131.

I.R.M.A.

7, rue René Descartes

67084 STRASBOURG CEDEX

FRANCE

Séries formelles provenant de systèmes différentiels linéaires méromorphes

MICHÈLE LODAY-RICHAUD

Introduction

L'étude qui suit est une étude locale au voisinage d'un point x_0 de \mathbf{C} que, sauf précision contraire, nous placerons toujours à l'origine ($x_0 = 0$). Les systèmes différentiels considérés sont de la forme

$$[A] \quad \frac{dY}{dx} = A(x)Y$$

où $\frac{d}{dx}$ est la dérivation usuelle par rapport à la variable complexe x , où $A(x) = [a_{(j,\ell)}(x)]_{1 \leq j, \ell \leq n}$ est une matrice $n \times n$ à coefficients méromorphes en $x_0 = 0$ et où

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

est le vecteur inconnu. Ainsi le vecteur dérivée de Y s'écrit

$$\frac{dY}{dx} = \begin{bmatrix} \frac{dy_1}{dx} \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dx} \end{bmatrix}$$

Les équations différentielles considérées sont des équations différentielles linéaires analytiques en $x_0 = 0$ c'est-à-dire de la forme

$$(D) \quad a_n(x) \frac{d^n}{dx^n} y + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} y + \cdots + a_0(x) y = 0$$

où les coefficients $a_j(x)$ sont analytiques en 0 et où $d^j y / dx^j$ désigne la dérivée $j^{\text{ème}}$ de l'inconnue y . Quitte à diviser ces équations par une puissance convenable de x nous supposons en outre que les coefficients a_j ne s'annulent pas simultanément en 0.

Dans une première partie nous décrivons les solutions formelles en $x_0 = 0$ des systèmes différentiels. Celles-ci sont calculables par des algorithmes explicites qui reposent de façon essentielle sur la notion de polygone de Newton. Le polygone de Newton d'un *système* étant difficile à définir nous passerons ici par l'intermédiaire de polygones de Newton d'*équations différentielles* associées au système étudié. Bien que disposant d'algorithmes, les calculs sont en général longs et difficiles à mener jusqu'à leur terme. Ils contiennent entre autres la résolution d'équations algébriques quelconques. Ceci n'exclut pas le traitement à la main d'exemples "simples" mais justifie de l'utilisation d'un système de calcul formel ; les codes DESIR et DESIR2 bientôt opérationnels feront de tels calculs. Nous indiquons l'origine de chacun des facteurs des solutions formelles et succinctement comment les calculer. Nous indiquons en outre dans quels cas ces solutions contiennent des séries convergentes (cas où 0 est un point ordinaire ou singulier régulier) et dans quel cas elles peuvent contenir des séries divergentes (cas où 0 est un point singulier irrégulier).

La deuxième partie traite de la sommation de celles des séries obtenues qui sont divergentes. Une série sommable sur tout un voisinage de 0 est une série convergente par définition. Il s'agit donc de sommer ces séries divergentes sur des secteurs de sommet 0. La position de ces secteurs est à peu près indifférente mais leur ouverture est importante : sur des secteurs trop petits une telle série divergente admet une infinité de sommes possibles ; sur des secteurs trop gros elle n'en n'admet aucune. Et dans les cas compliqués dits à plusieurs niveaux il n'y a pas de bonne taille intermédiaire assurant l'existence d'une somme unique. Il faut faire intervenir d'autres critères de choix que nous n'aborderons pas ici. Disons simplement que d'une part, toutes les sommes possibles sont faciles à décrire à partir de l'une d'elles et que d'autre part le consensus sur le choix à faire est actuellement général. Nous indiquons les outils, transformations de Borel et de Laplace, ramification, accélération d'Ecalte et les formules intégrales construites avec ces outils qui définissent "les" sommes de ces séries divergentes.

Enfin en appendice, nous démontrons dans un cas simple mais significatif, dit cas de niveau un, que les formules proposées donnent bien des sommes des séries divergentes associées au système différentiel. La démonstration proposée suit la méthode d'Ecalte ([Ec85]) qui repose sur des arguments de perturbation et de séries majorantes. Elle a l'avantage d'être courte tout en n'utilisant que des résultats élémentaires sur les systèmes différentiels et le produit de convolution. Une autre démonstration due à Martinet et Ramis repose sur des arguments de type asymptotique. Mentionnons enfin que l'existence de ces sommes mais sans formules de définition a été établie préalablement par Ramis par des arguments cohomologiques ([Ra85]).

Première partie

Système différentiel ou équation différentielle ?

L'étude des systèmes différentiels linéaires à coefficients méromorphes est équivalente à celle des équations différentielles linéaires analytiques. Nous choisissons de travailler avec des systèmes plutôt qu'avec des équations parce que l'écriture matricielle se prête mieux à la description des espaces de solutions.

Rappelons qu'on passe facilement d'une équation à son système compagnon

$$[A_D] \quad \frac{dY}{dx} = A_D Y \quad \text{avec} \quad A_D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & \cdots & -\frac{a_{n-2}}{a_n} & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix}$$

en prenant pour inconnue

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad y_1 = y, \quad y_2 = \frac{dy_1}{dx}, \dots, \quad y_n = \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}$$

Réciproquement, on peut passer d'un système à une équation en ramenant le système à la forme compagnon. Et ceci peut se faire par un changement linéaire d'inconnue $Y = PZ$ à coefficients méromorphes (il s'agit des coefficients de la matrice P). Ce changement est algorithmique mais si lourd qu'il reste plus théorique que pratique.

Nous notons (A_j) l'équation différentielle associée au système $[A]$ par élimination de toutes les inconnues sauf la $j^{\text{ème}}$ y_j .

Point ordinaire et point singulier

Le point $x_0 = 0$ est un *point singulier* d'un système $[A] : \frac{dY}{dx} = A(x)Y$ si c'est un pôle de l'un au moins des coefficients de la matrice A . Dans le cas d'une équation $(D) : a_n(x) \frac{d^n}{dx^n} y + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} y + \cdots + a_0(x)y = 0$ le point $x_0 = 0$ est un point singulier si c'est un zéro du coefficient $a_n(x)$. Lorsque $x_0 = 0$ n'est pas singulier on dit qu'il est *ordinaire*.

Polygone de Newton

Le polygone de Newton d'une équation (D) est facile à construire et il est l'outil essentiel pour le calcul des solutions formelles. Dans le cas d'un système $[A]$ on utilise le polygone de Newton de l'une quelconque des équations (A_j) associée au système par élimination de toutes les inconnues sauf une, y_j .

On opère comme suit : on détermine la partie principale des coefficients de (D)

$$a_j(x) = a_{j,\ell(j)} x^{\ell(j)} + O(x^{\ell(j)+1})$$

et on marque dans le demi-plan $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}$ les points de coordonnées $(j, \ell(j) - j)$. Le *polygone de Newton* de (D) est l'enveloppe convexe de la famille des deuxièmes quadrants $\{(u, v) | u \leq j \text{ et } v \geq \ell(j) - j\}$ de sommets chacun des points marqués (voir exemples et dessins en encadré).

Point singulier régulier et point singulier irrégulier

Lorsque le point $x_0 = 0$ est singulier on distingue deux cas dits *singulier régulier* ou *singulier irrégulier* suivant que le polygone de Newton est réduit ou non à un seul côté horizontal. Nous allons voir que la forme et le comportement des solutions sont tout à fait différents suivant que l'on est dans l'un ou l'autre cas.

Etude locale au point ordinaire $x_0 = 0$

Les résultats sont classiques, connus depuis le 19^{ème} siècle ([Ca1] chap.VII, [Ca2], [He] Th.9.3.c et d page 94). Nous énonçons les résultats sous une forme qui prépare la suite et dans le contexte des systèmes différentiels ; une solution est alors un vecteur de dimension n , la dimension du système.

Les solutions séries formelles $\sum_{p \in \mathbf{N}} C_p x^p$ forment un espace vectoriel sur \mathbf{C} et elles sont en "nombre suffisant" pour que la dimension de cet espace soit égale à n . En outre, elles sont convergentes et leur domaine de convergence contient au moins un disque commun de centre 0, en fait n'importe quel disque qui ne contient aucun point singulier autre que 0. Sur ce disque commun les sommes de ces séries formelles (sommes au sens usuel de la sommation des séries convergentes) forment un espace vectoriel de dimension n de vraies solutions du système.

On appelle *matrice fondamentale de solutions* du système ou plus simplement, *solution fondamentale* du système toute matrice dont les vecteurs colonnes sont n solutions linéairement indépendantes. Pour être précis on parlera de solution fondamentale formelle ou analytique suivant le contexte choisi. Etant donné deux solutions fondamentales F et H , toutes deux soit formelles soit analytiques sur un même domaine de définition, il existe une matrice constante inversible C faisant passer de l'une à l'autre :

$$H = FC \quad C \in GL(n; \mathbf{C}).$$

Etude locale au point singulier régulier $x_0 = 0$

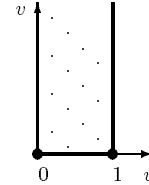
Ces résultats sont eux aussi classiques depuis le 19^{ème} siècle. Les solutions séries formelles, s'il en existe, ne sont en général pas assez nombreuses pour constituer une solution fondamentale : elles forment toujours un espace vectoriel mais celui-ci est en général de dimension inférieure à n , voire nulle. Mais on obtient le résultat espéré en leur adjoignant simplement des puissances de x et des logarithmes. De façon précise le système différentiel admet une solution fondamentale de la forme $Y(x) = F(x)x^L$ où $F(x)$ est une matrice inversible à coefficients séries formelles ou séries méromorphes formelles et où L est une matrice constante. On note $x^L := e^{L \ln(x)}$.

Exemples commentés dans le texte et dessins de polygones de Newton

Exemple 0 : La singularité $x_0 = 0$ est régulière.

$$(E_0) \quad xy' - ay = 0$$

où on note $y' = \frac{dy}{dx}$ et on a $a \in \mathbb{C}$



Les solutions sont proportionnelles à $y(x) = x^a$. Lorsque le coefficient a est un entier positif la singularité du système en 0 ne se répercute pas sur les solutions. On dit dans ce cas que 0 est un *point singulier apparent* au sens de “qui a l'apparence d'un point singulier”.

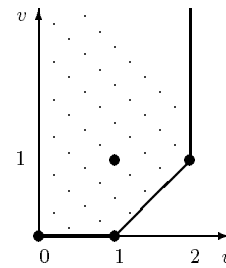
Exemple 1 : Equation d'Euler; la singularité $x_0 = 0$ est irrégulière de niveau 1.

$$x^2y' + y = x$$

Elle n'est pas de la forme étudiée ici mais elle le devient si on la dérive après l'avoir écrite $xy' + \frac{1}{x}y = 1$. On obtient l'équation

$$(E_1) \quad x^3y'' + (x^2 + x)y' - y = 0$$

qui admet pour solutions celles de l'équation d'Euler et celles de l'équation sans second membre associée $x^2y' + y = 0$. Son système compagnon s'écrit



$$[E_1] \quad \frac{dY}{dx} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{x^3} & -(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}) \end{bmatrix} Y \quad \text{où} \quad Y = \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}.$$

Exemple 2 : Equation d'Euler-bis; la singularité $x_0 = 0$ est irrégulière de niveau 2.

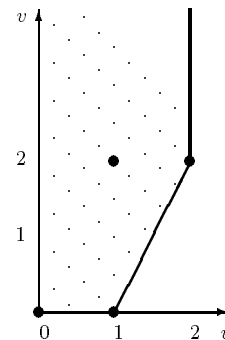
$$\frac{x^3}{2}y' + y = x^2$$

Elle est obtenue à partir de l'équation d'Euler par le changement de variable $x \mapsto x^2$. Sous forme homogène elle s'écrit

$$(E_2) \quad x^4y'' + (x^3 + 2x)y' - 4y = 0$$

et sous forme de système

$$\frac{dY}{dx} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{4}{x^4} & -(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}) \end{bmatrix} Y.$$



Exemples commentés dans le texte et dessins de polygones de Newton
(suite)

*Exemple 3 : Equation de Ramis-Sibuya ;
la singularité $x_0 = 0$ est irrégulière des niveaux 1 et 2.*

$$Dy = 4x + 2x^2 + 10x^3 - 3x^4$$

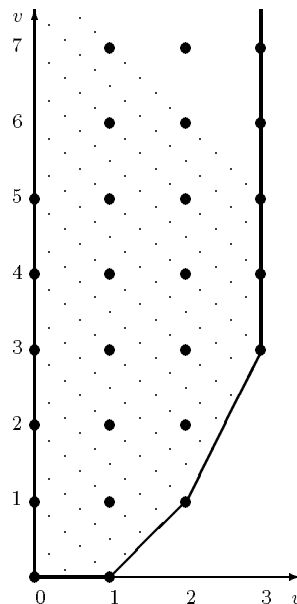
où

$$D = x^5(2-x)\frac{d^2}{dx^2} + x^2(4+5x^2-2x^3)\frac{d}{dx} + 2(2-x+x^2)$$

Sous forme homogène elle s'écrit

$$(E_3) \quad D_3y = 0 \quad \text{avec}$$

$$D_3 = (8x^6 + 18x^8 - 16x^9 + 3x^{10})\frac{d^3}{dx^3} + (16x^3 + \dots + 12x^9)\frac{d^2}{dx^2} + (16x + \dots + 6x^8)\frac{d}{dx} + (-16 + \dots + 12x^5).$$

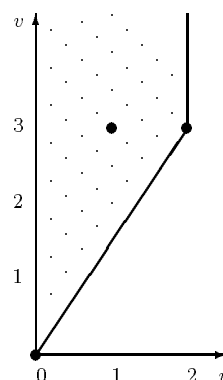


Exemple 4 : Equation d'Airy; la singularité $x_0 = 0$ est irrégulière de niveau $\frac{3}{2}$.

$$y'' - zy = 0$$

Traditionnellement son point singulier est placé à l'infini. On le ramène à l'origine par le changement de variable $z = \frac{1}{x}$. Elle s'écrit alors

$$(E_4) \quad x^5y'' + 2x^4y' - y = 0.$$



Les niveaux, contrairement aux apparences ici, ne sont pas les pentes non nulles du polygone de Newton de l'équation ou du système lui-même. Ce sont exactement les pentes du polygone de Newton d'un système associé dit système des endomorphismes. Mais on peut déjà les deviner sur le polygone de Newton de l'équation elle-même.

On peut imposer, si on le désire, que la matrice L , appelée *matrice des exposants de monodromie formelle* soit sous forme de Jordan. Nous notons désormais par la même lettre Y aussi bien le vecteur inconnu qu'une matrice fondamentale de solutions, le contexte ne prêtant jamais à confusion.

Une propriété remarquable de ces solutions est que toutes les séries formelles contenues dans F sont convergentes. Ici encore, elles convergent dans un même disque de centre 0 dès que celui-ci ne contient pas d'autre point singulier que 0. Par ailleurs, l'expression formelle x^L est une vraie fonction multivaluée c'est-à-dire une fonction définie non pas sur \mathbf{C} mais sur la surface de Riemann du logarithme au voisinage de 0. Ainsi, l'expression

$$Y(x) = F(x)x^L$$

définit une solution fondamentale analytique au voisinage de 0 (0 exclu) sur la surface de Riemann du logarithme. Les autres solutions fondamentales sont toutes les matrices de la forme $Z(x) = Y(x)C$ avec C matrice constante inversible.

Etude locale au point singulier irrégulier $x_0 = 0$

La situation dans ce cas est beaucoup plus compliquée. Elle fait apparaître des phénomènes nouveaux désignés globalement sous le nom de *phénomène de Stokes* et qui se traduisent dans la réalité par des dilatations ou des compressions brutales alors même que les quantités étudiées sont très régulières puisqu'analytiques. Les avatars techniques de ce phénomène sont d'une part que la variable x ne suffit plus toujours aux calculs — il faut en prendre une racine $t = x^{\frac{1}{\nu}}$ —, d'autre part que les séries entières qui apparaissent dans les calculs sont en général divergentes. Mentionnons que le degré de ramification ν est facile à "lire" sur le polygone de Newton : c'est le p.p.c.m. des dénominateurs des pentes non nulles des différents côtés du polygone de Newton. En particulier, il divise $n!$. Lorsque $\nu = 1$ on dit qu'on est dans *le cas sans ramification* et lorsque $\nu \neq 1$ dans *le cas avec ramification*.

Ce phénomène s'accompagne d'une grande instabilité numérique au voisinage du point singulier qui exclut toute approche numérique de tels points singuliers de l'extérieur. C'est pourquoi, si l'on veut analyser en détail ce qui se passe à proximité de ces points on est amené à la démarche opposée qui consiste à commencer par une étude formelle c'est-à-dire une étude au point singulier lui-même puis à concrétiser les solutions formelles en de vraies fonctions solutions qui nous permettent de nous éloigner du point singulier. C'est ainsi que nous avons présenté l'étude dans le cas où 0 est un point ordinaire ou singulier régulier, la concrétisation des solutions formelles se faisant alors naturellement et globalement sur tout un voisinage de 0 en remplaçant les séries formelles obtenues par leur somme au sens usuel du terme. Dans le cas d'un point singulier irrégulier celles des séries à sommer qui sont divergentes n'admettent pas, par définition, de somme sur un vrai voisinage de 0. Il faut introduire une sommation directionnelle c'est-à-dire sur des secteurs de sommet 0 et de bissectrice une direction donnée. Dans le cas de séries convergentes la série apparaît comme le développement de Taylor de sa somme. Il est naturel de demander

aux séries divergentes à sommer d'être de même le développement de Taylor de leur "somme" : on dit alors *développement asymptotique*.

Dans le cas de séries convergentes la somme est unique et vérifie automatiquement les mêmes équations différentielles que la série. Dans le cas de séries divergentes l'unicité n'est jamais assurée et les contraintes différentielles ne sont pas automatiquement transmises. Il est légitime de vouloir imposer aux sommes de satisfaire aux mêmes équations différentielles que les séries qu'elles sont supposées concrétiser. Ce faisant on n'acquiert pas nécessairement l'unicité même par des choix adaptés des secteurs d'asymptoticité et on perd l'existence dès lors que les secteurs deviennent trop gros. Mais comme toujours, le plus gênant dans la théorie est le défaut d'unicité qui contraint à d'autres critères de choix, mais quels critères ? Nous décrivons dans la deuxième partie une solution possible et depuis peu unanimement privilégiée à ce problème de sommation pour les séries divergentes provenant de systèmes différentiels linéaires méromorphes. Ce problème qui doit de façon substantielle son avancement à divers auteurs, J.-P. Ramis, B. Malgrange, J. Martinet, Y. Sibuya, pour n'en citer que quelques uns, a atteint la fin d'une étape avec la théorie de la résurgence et de l'accélération de J. Ecalle dans les années 1985-90. Ce sont les formules intégrales qui résultent de cette théorie dans le cas linéaire que nous décrivons dans cette deuxième partie. Mais auparavant, nous terminons la première partie avec la description des solutions formelles et des formes particulières qu'on peut leur donner pour faciliter la démonstration de leur sommabilité.

Un résultat classique, connu depuis le début du siècle (Poincaré, Fabry) affirme qu'un système différentiel linéaire admet une solution fondamentale de la forme

$$\hat{Y} = \hat{\phi} t^{\nu L} e^{Q(1/t)}$$

où ν est le degré de ramification défini ci-dessus ($t^\nu = x$), $Q = \text{diag}(q_1, q_2, \dots, q_n)$ est une matrice diagonale dont les termes diagonaux sont des polynômes de la variable $1/t$ sans terme constant, où L est la matrice constante des exposants de monodromie formelle et où $\hat{\phi}$ est une matrice inversible à coefficients séries formelles en t .

Le système compagnon de l'équation d'Euler admet pour solution fondamentale formelle

$$\hat{Y} = \hat{\phi}(x) e^Q$$

où $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{x} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et où $\hat{\phi}(x) = \begin{bmatrix} 1 & \hat{f}_1 \\ -\frac{1}{x^2} & \hat{f}_1' \end{bmatrix}$ avec $\hat{f}_1 = \sum_{n \geq 0} (-1)^n n! x^{n+1}$ et \hat{f}_1' la série dérivée de \hat{f}_1 .

La série \hat{f}_1 est la série d'Euler c'est-à-dire l'unique solution formelle de l'équation d'Euler $x^2 y' + y = x$ qui vérifie $y(0) = 0$.

Cet exemple appartient au cas sans ramification : il n'est pas nécessaire d'introduire une variable t , racine de x ($\nu = 1$).

Exemple 1 : Equation d'Euler

Le système compagnon de l'équation d'Airy admet pour solution fondamentale formelle

$$\widehat{Y} = \begin{bmatrix} A & B \\ A' & B' \end{bmatrix}$$

où A et B sont les "séries" d'Airy, A' et B' leur dérivée par rapport à x , c'est-à-dire, en notant $t = x^{1/2}$:

$$A = \left(\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n t^{3n} \right) t^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{2}{3t^3}\right)$$

$$B = \left(\sum_{n \geq 0} a_n t^{3n} \right) t^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{2}{3t^3}\right)$$

avec $a_0 = 1$ et pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(2n+1)(2n+3) \cdots (6n-1)}{144^n n!} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{1}{n!} \Gamma\left(n + \frac{5}{6}\right) \Gamma\left(n + \frac{1}{6}\right). \end{aligned}$$

Cet exemple appartient au cas avec ramification avec pour ordre de ramification $\nu = 2$.

On a $L = 0$ et $Q = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3t^3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3t^3} \end{bmatrix}$.

Exemple 4 : Equation d'Airy

Une amélioration relativement récente de ce résultat ([BJL79]) permet de supprimer la ramification dans le facteur série formelle $\widehat{\phi}$ par un choix adéquat de la matrice L .

Le système compagnon de l'équation d'Airy admet pour solution fondamentale formelle

$$\widehat{Y} = \widehat{F}(x) x^J U e^Q$$

où Q est comme précédemment, où $U = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $J = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 3/4 \end{bmatrix}$ et où $\widehat{F} =$

$$\left[\begin{array}{cc} \sum_{n \geq 0} a_{2n} x^{3n} & \sum_{n \geq 0} -a_{2n+1} x^{3n+1} \\ \frac{1}{x} \sum_{n \geq 0} (-a_{2n+1} + (3n + \frac{1}{4})a_{2n}) x^{3n} & \frac{1}{x^3} \left(a_0 + \sum_{n \geq 0} (a_{2n+2} - (3n + \frac{7}{4})a_{2n+1}) x^{3n+3} \right) \end{array} \right].$$

Seul le facteur e^Q contient la variable ramifiée t ; les séries sont de vraies séries formelles en x .

Exemple 4 : Equation d'Airy

La détermination des solutions formelles est algorithmique : pour déterminer les polynômes q_1, \dots, q_n de la diagonale de Q on résout les équations caractéristiques du système. Ces équations associées à chaque côté oblique du polygone de Newton généralisent les classiques équations caractéristiques des équations différentielles à coefficients constants. Les exposants de monodromie formelle s'obtiennent par la méthode de Frobenius ([For]) : les valeurs propres sont les racines des équations indicelles associées au côté horizontal de divers polygones de Newton ; les logarithmes qui peuvent apparaître lorsque certaines de ces valeurs propres diffèrent d'un entier sont plus difficiles à déterminer. Par identification on obtient enfin les coefficients des séries formelles comme solutions d'équations de récurrence linéaires.

Forme normale

Supposons que $\widehat{Y} = \widehat{\phi}(x)x^L e^{Q(1/t)}$ soit une solution fondamentale formelle dans laquelle le facteur $\widehat{\phi}(x)$ soit non ramifié. Alors le système

$$[A_0] \quad \frac{dY}{dx} = A_0 Y$$

qui admet la matrice $Y_0 = x^L e^{Q(1/t)}$ pour solution fondamentale est à coefficients méromorphes. On l'appelle *une forme normale* du système considéré. Et le facteur $\widehat{\phi}(x)$ est une solution du système différentiel linéaire méromorphe de dimension n^2

$$[A_0; A] \quad \frac{dF}{dx} = A(x)F - F A_0(x)$$

Sans précautions particulières le facteur $\widehat{\phi}$ qui relie le système $[A_0]$ au système $[A]$ n'est pas unique même si on lui impose une valeur initiale en 0. Ainsi le système $\frac{dY}{dx} = AY$ où $A = \begin{bmatrix} -k/x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $k \in \mathbb{N}$ qui a pour solution fondamentale $Y_0 = x^L$ avec $L = \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ peut être choisi comme forme normale. Le système de passage est alors $[A; A] : \frac{dY}{dx} = AY - YA$ et il admet les deux solutions linéairement indépendantes $\widehat{\phi} = I$ (l'identité) et $\widehat{\phi} = I + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ x^k & 0 \end{bmatrix}$ qui toutes deux vérifient la condition initiale $\widehat{\phi}(0) = I$.

Contre-exemple d'unicité

Forme préparée

Un changement linéaire d'inconnue $X = PY$ à coefficients méromorphes n'affecte ni la convergence ni la sommabilité des séries apparaissant dans les solutions

formelles. Et un tel changement permet de modifier arbitrairement un nombre arbitrairement grand de termes dans $\widehat{\phi}(x)$. En particulier, on peut toujours se ramener au cas où $\widehat{\phi}$ s'écrit $\widehat{\phi}(x) = I + O(x^p)$ avec p entier quelconque fixé à l'avance. Nous notons \widehat{F} le facteur $\widehat{\phi}$ ainsi normalisé.

Il est en outre possible de normaliser la forme normale $[A_0]$ de telle sorte que le système $[A_0; A]$ admette une solution série formelle \widehat{F} déterminée de manière unique par la condition initiale $\widehat{F}(0) = I$. L'idée consiste à réduire les valeurs propres de L modulo les entiers ($0 \leq \operatorname{Re}\lambda \leq 1$) par un changement linéaire d'inconnue qui multiplie Y_0 à gauche par des puissances convenables de x . Ainsi, le contre-exemple ci-dessus n'a plus cours.

Phénomène de Stokes

Notons $\check{\phi}(x)x^{\check{L}}e^{\check{Q}}$ une solution fondamentale formelle du système $[A_0; A]$ de dimension n^2 . Les polynômes \check{q} non nuls de la diagonale de \check{Q} sont exactement les polynômes $q_j - q_\ell$ pour tous les couples (q_j, q_ℓ) , $q_j \neq q_\ell$ extraits de la diagonale de Q . Ce sont ces polynômes qui jouent le rôle fondamental dans le phénomène de Stokes. Leurs degrés sont appelés *les niveaux* du système. Les directions pour lesquelles l'une des exponentielles $e^{\check{q}}$ au moins est à décroissance maximale (le terme dominant de $\check{q}(1/x)$ est réel négatif) sont appelées les *directions anti-Stokes* du système. Celles pour lesquelles le terme dominant est purement imaginaire sont appelées les *directions de Stokes* du système.

L'équation différentielle

$$x^2 y' - y = 0$$

admet la série nulle $\widehat{f}(x) = 0$ comme solution formelle.

La fonction nulle $f_1(x) \equiv 0$ et la fonction $f_2(x) = \exp(-1/x)$ sont toutes deux des solutions de cette équation asymptotiques à \widehat{f} sur le demi-plan $\operatorname{Re} x > 0$. Mais lorsqu'on franchit l'un ou l'autre des demi-axes imaginaires, alors que f_1 reste asymptotique à 0, la fonction f_2 devient fortement non bornée puisqu'à croissance exponentielle. Numériquement, pour x proche de l'origine dans le demi-plan $\operatorname{Re} x > 0$ les deux fonctions f_1 et f_2 sont indiscernables mais leurs prolongements analytiques apparaissent comme fort différents.

Ceci explique les difficultés rencontrées lors de la résolution numérique des équations différentielles : des erreurs exponentiellement petites se transforment tout naturellement en des erreurs exponentiellement grandes !

Les directions anti-Stokes sont celles qui régissent le phénomène de Stokes : nous verrons que les sommes de \widehat{F} déterminées suivant deux directions voisines se recollent

analytiquement sur leur domaine commun de définition, sauf éventuellement quand ces deux directions sont situées de part et d'autre d'une direction anti-Stokes ; on dit alors que cette direction anti-Stokes est une *direction singulière* pour \widehat{F} .

Les directions de Stokes sont les directions en lesquelles se manifeste le phénomène de Stokes : c'est en franchissant ces directions qu'une "solution" $F(x)$ asymptotique à \widehat{F} , donc parfaitement bornée, peut présenter brutalement une forte croissance exponentielle qui sera instantanément signalée par un "overflow" sur votre ordinateur ! La raison en est la possible présence d'exponentielles $e^{\tilde{q}}$ asymptotiquement indiscernables tant que celles-ci sont plates (asymptotiques à la série nulle) et qui apparaissent brutalement lorsqu'elles cessent d'être plates, précisément lorsqu'on traverse une direction de Stokes.

Deuxième partie

Nous nous proposons maintenant de décrire des formules de sommation pour les séries formelles \widehat{F} qui apparaissent dans la résolution formelle en 0 de systèmes différentiels linéaires méromorphes. Seul pose problème le cas des séries divergentes. Nous avons vu qu'alors 0 est nécessairement un point singulier irrégulier du système différentiel considéré et que la sommation est nécessairement polarisée : dans chaque direction θ sauf un nombre fini de directions singulières qui sont des directions anti-Stokes on définit un opérateur de sommation S_θ . Ceci signifie que la fonction $S_\theta(\widehat{F})$ est définie sur un secteur contenant θ , qu'elle y est asymptotique à \widehat{F} et que substituée à \widehat{F} dans la solution formelle elle en fait une vraie solution du système. Ces opérateurs sont en outre des homomorphismes d'algèbres différentielles (*cf.* [Ra91] ce volume).

Dans une direction singulière, on peut considérer deux opérateurs naturels, un opérateur à gauche S_θ^- défini par la sommation $S_{\theta+\epsilon}$ à gauche de θ et "arbitrairement" proche de θ et un opérateur à droite S_θ^+ défini par la sommation $S_{\theta-\epsilon}$ à droite de θ et "arbitrairement" proche de θ . La matrice faisant passer de la solution obtenue par sommation à gauche à celle obtenue par sommation à droite est appelée une *matrice de Stokes*. Plus précisément, si $\widehat{Y} = \widehat{F}Y_0$ est une solution fondamentale formelle et θ une direction singulière, on a une relation du type

$$S_\theta^+(\widehat{F})Y_{0,\theta} = S_\theta^-(\widehat{F})Y_{0,\theta}C_\theta$$

où $Y_{0,\theta}$ est la vraie fonction associée à la solution formelle Y_0 de la forme normale par le choix d'un argument (on choisit en général l'argument principal $0 \leq \theta < 2\pi$). La matrice constante inversible C_θ est la matrice de Stokes (principale) de \widehat{Y} dans la direction θ .

On montre que pour une forme normale donnée la famille des matrices de Stokes en les différentes directions singulières caractérise la singularité à changement d'inconnue $Y = PX$ linéaire méromorphe près. Nous n'abordons pas dans ce qui suit ces questions de classification des singularités. Nous nous bornons à décrire les opérateurs de sommation S_θ . Ces opérateurs dépendent des niveaux du système que

nous supposons entiers (cas sans ramification). En effet, le changement de variable $t = x^{1/\nu}$ multiplie les niveaux par ν ; on peut donc toujours se ramener au cas sans ramification.

Avant d'expliciter ces opérateurs nous introduisons les outils sur lesquels ils reposent.

L'équation d'Euler admet pour solution formelle la série d'Euler

$$\widehat{f}_1(x) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n n! x^{n+1}.$$

Cette série est divergente et ses coefficients ont une croissance de type $n!A^n$ (avec ici $A = 1$) : on dit que cette série est Gevrey de niveau 1. Nous allons voir qu'elle est même 1-sommable.

Exemple 1 : Equation d'Euler

L'équation d'Euler-bis admet pour solution formelle la série d'Euler-bis

$$\widehat{f}_2(x) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n n! x^{2n+2}$$

Cette série est divergente mais ses coefficients ont une croissance beaucoup moins rapide puisque de type $\sqrt{n!}A^n$ (avec $A = 1$) : on dit que cette série est Gevrey de niveau 2. Elle n'est pas 1-sommable mais elle est 2-sommable.

Exemple 2 : Equation d'Euler-bis

L'équation de Ramis-Sibuya admet pour solution formelle la série

$$\widehat{f}_3 = \widehat{f}_1 + \widehat{f}_2$$

somme de la série d'Euler et de la série d'Euler-bis. Comme \widehat{f}_1 et \widehat{f}_2 elle est Gevrey de niveau 1 mais elle n'est pas de niveau 2. Elle n'est ni 1-sommable ni 2-sommable mais elle est (1, 2)-sommable.

Exemple 3 : Equation de Ramis-Sibuya

Transformée de Borel formelle d'une série $\widehat{f} = \sum_{p \geq 0} f_p x^{p+1}$ sans terme constant

On pose

$$\widehat{\mathcal{B}}\widehat{f}(x) := \sum_{p \geq 0} \frac{f_p}{\Gamma(p+1)} \xi^p \quad \Gamma(p+1) = p!$$

Transformée de Borel dans la direction θ d'une fonction f définie près de 0 sur un secteur de sommet 0 bissecté par θ et d'ouverture $\omega > \pi$

On pose (voir la figure 1)

$$\mathcal{B}_\theta f(\xi) := \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(x) e^{\xi/x} \frac{dx}{x^2}$$

Figure 1

On notera aussi $\mathcal{B}_\theta = \mathcal{B}_{1,\theta}$ pour indiquer le niveau 1.

Pour $f(x) = x^{p+1}$ on a $\mathcal{B}f(\xi) = \frac{1}{\Gamma(p+1)} \xi^p$ (c'est la formule de Hankel).

La transformée de Borel d'une constante nécessite une définition particulière : on est conduit à prendre pour transformée de Borel, formelle ou non, de 1 la distribution δ de Dirac à l'origine. On fait ainsi correspondre à l'élément neutre 1 de la multiplication, l'élément neutre δ du produit de convolution. Mais on peut toujours si on le désire éliminer les constantes.

Sous de bonnes hypothèses qui seront réalisées pour les séries provenant de systèmes de niveau 1, la série $\widehat{\mathcal{B}}\widehat{f}(x)$ est convergente (*i.e.* \widehat{f} est Gevrey de niveau 1) et elle peut être prolongée analytiquement jusqu'à l'infini dans certaines directions θ , plus précisément à certains secteurs de sommet 0 contenant la direction θ . On peut de même prolonger la transformée de Borel $\mathcal{B}_\theta f(x)$ de certaines fonctions f . Par abus, nous noterons encore $\mathcal{B}_\theta f$ ou \widetilde{f} cette fonction prolongée et nous la désignerons encore par transformée de Borel de \widehat{f} ou de f dans la direction θ .

Transformée de Laplace dans la direction θ d'une fonction f définie sur la demi-droite d_θ issue de 0 et de direction θ

On pose (voir la figure 2)

$$\mathcal{L}_\theta(f)(x) := \int_{d_\theta} f(\xi) e^{-\xi/x} d\xi.$$

$$\begin{aligned} |f(\xi)| \leq C^{te} \exp(a|\xi|) \\ \text{(Plan des } \xi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Disque d'analyticité de } \mathcal{L}_\theta f(x) \\ \text{(Plan des } x) \end{aligned}$$

Figure 2

Lorsque f est à croissance exponentielle d'ordre 1 sur la demi-droite d_θ la fonction $\mathcal{L}_\theta(f)(x)$ est définie sur au moins un disque de diamètre porté par d_θ et contenant 0 sur son bord. Plus précisément si $|f(\xi)| \leq C^{te} \exp(a|\xi|)$ ce disque a un diamètre de longueur $1/a$. On l'appelle un *disque de Borel* dans la direction θ .

Opérateurs de ramification ρ_k et $\rho_{1/k}$, $k \in \mathbf{N}$

Notons \mathbf{C}_x^* un exemplaire de \mathbf{C}^* dont la variable est appelée x et $\widetilde{\mathbf{C}}_x^*$ son revêtement par les coordonnées polaires ou surface de Riemann de $\log x$. L'application

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathbf{C}}_x^* & x = t^{1/k} & \\ \downarrow & \downarrow & \\ \widetilde{\mathbf{C}}_t^* & t = x^k & \end{array}$$

est un changement de variable analytique. L'opérateur de ramification ρ_k est l'action de ce changement de variable sur les séries ou les fonctions de x . Ainsi on a

$$\rho_k(f)(t) = f(x) \quad \text{avec} \quad x = t^{1/k}.$$

L'opérateur réciproque $\rho_{1/k}$ agit sur les séries ou les fonctions de t et il est défini par $\rho_{1/k}(\varphi)(x) = \varphi(x^k)$.

Opérateurs d'accélération $\rho_{(k,k');\theta}$

Pour $a > 1$ on définit le *noyau d'accélération* \mathcal{C}_a de puissance a par

$$\mathcal{C}_a(\xi) := \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{H}} e^{u-u^{1/a}\xi} du$$

où \mathcal{H} désigne un contour de Hankel "autour" de \mathbf{R}^- (voir la figure 3). Les noyaux

Figure 3

\mathcal{C}_a ont dans toute direction vérifiant $|\arg \zeta| < (1 - \frac{1}{a})\frac{\pi}{2}$, une croissance à l'infini du type

$$(*) \quad \zeta^{b/2} e^{\frac{1}{b} a^{-b/a} \zeta^b} \quad \text{où } b \text{ vérifie } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1.$$

Le noyau \mathcal{C}_2 est le seul à être une fonction classique :

$$\mathcal{C}_2(\zeta) = \frac{\zeta}{2\sqrt{\pi}} e^{-\zeta^2/4}$$

Dans le cas où a est rationnel, qui est le seul cas que nous rencontrerons, les noyaux \mathcal{C}_a sont des fonctions G de Meijer. En particulier, ils vérifient des équations différentielles linéaires.

Les opérateurs d'accélération sont définis par

$$\rho_{(k,k');\theta}(\varphi)(\tau) := \frac{2i\pi}{\tau} \int_{d_\theta} \mathcal{C}_{k'/k} \left(\frac{\xi}{\tau^{k/k'}} \right) \varphi(\xi) d\xi \quad (k < k').$$

On a $\mathcal{L}_{k'\theta} \circ \rho_{k'/k} \circ \mathcal{B}_{k\theta} = \rho_{(k,k');k\theta}$. Mais alors que l'opérateur écrit au premier membre ne s'applique qu'aux fonctions à croissance au plus exponentielle d'ordre 1 à l'infini, l'opérateur d'accélération au second membre est applicable aux fonctions à croissance exponentielle d'ordre $\frac{k'}{k'-k} > 1$ (cf. formule (*) ci-dessus). C'est là son intérêt majeur.

On préfère parfois utiliser les *opérateurs d'accélération "redressés"* définis par

$$\mathbf{A}_{(k,k');\theta} := \rho_{1/k'} \circ \rho_{(k,k');k\theta} \circ \rho_k.$$

Ceux-ci sont applicables aux fonctions à croissance exponentielle à l'infini d'ordre κ avec $\frac{1}{\kappa} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k'}$. La justification du qualificatif "redressé" apparaîtra dans les diagrammes qui suivent : ils correspondent à des flèches horizontales alors que les opérateurs ρ correspondent à des flèches obliques.

Quelques propriétés de la transformation de Borel

Il s'agit de propriétés communes à la transformation formelle ou fonctionnelle ainsi qu'au prolongement analytique.

Fonction ou série $f(x)$	Transformée de Borel $\tilde{f}(\xi)$
$x^{p+1}, (p \in \mathbf{N})$	$\xi^p/p!$
1	δ (distribution de Dirac)
x^α ($\alpha \in \mathbf{C}, -\alpha \notin \mathbf{N}$)	$\xi^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$
$f \cdot g$	$\tilde{f} * \tilde{g}(\xi) = \int_0^\xi \tilde{f}(t)\tilde{g}(\xi-t)dt$
$x^2(d/dx)f(x)$	$\xi\tilde{f}(\xi)$
$g(x) = f(x)/x$ avec $g(0) = a_0$	$a_0\delta + (d/d\xi)\tilde{f}(\xi)$

Quelques propriétés de la transformation de Laplace

Fonction $\varphi(x)$	Transformée de Laplace $\mathcal{L}(\varphi)(x)$
$\varphi * \psi(\xi)$	$\mathcal{L}(\varphi)(x) \cdot \mathcal{L}(\psi)(x)$
$\int_0^u \varphi(u)du$	$(1/x)\mathcal{L}(\varphi)(x)$
$(d/d\xi)\varphi(\xi)$	$\varphi(0) + (1/x)\mathcal{L}(\varphi)(x)$
$\xi\varphi(\xi)$	$x^2(d/dx)\mathcal{L}(\varphi)(x)$

Nous fixons désormais une forme normale $[A_0]$ du système $[A]$ étudié et une solution fondamentale normale $Y_0 = x^L e^Q$ de celui-ci. Il s'agit de sommer le facteur série formelle $\hat{F}(x)$ d'une solution formelle $\hat{F}Y_0$ de $[A]$. Nous avons vu que \hat{F} est une solution du système de passage

$$[A_0; A] \quad \frac{dF}{dx} = AF - FA_0$$

et qu'on peut imposer $\hat{F}(0) = I$.

Sommation dans le cas d'un système de niveau unique $k = 1$

Supposons que le système $[A]$ n'admette qu'un seul niveau $k = 1$. Alors la série \widehat{F} est sommable par le procédé de sommation de niveau 1 :

$$\widehat{F}(x) \xrightarrow{\mathcal{B}_\theta} \widetilde{F}(\xi) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(x)$$

dans toute direction θ sauf un nombre fini de directions singulières qui sont des directions anti-Stokes du système. On dit alors que \widehat{F} est 1-sommable.

Domaines de définition de \widehat{F} , \widetilde{F} et F : voir la figure 4.

$$\widehat{F} \text{ (Plan des } x) \qquad \widetilde{F} \text{ (Plan des } \xi) \qquad F \text{ (Plan des } x)$$

Figure 4

Cet énoncé a le sens suivant :

- a. la transformée de Borel formelle $\widehat{\mathcal{B}}(\widehat{F})$ de \widehat{F} est convergente;
- b. dans une direction θ quelconque qui n'est pas une direction anti-Stokes, la somme de la série $\widehat{\mathcal{B}}(\widehat{F})$ admet un prolongement analytique complexe jusqu'à l'infini. Nous le notons $\mathcal{B}_\theta(\widehat{F}) = \widetilde{F}$;
- c. \widetilde{F} est à croissance exponentielle d'ordre 1 à l'infini au voisinage de la direction θ , *i.e.* il existe des constantes C et $\alpha > 0$ et des arguments θ_1 et θ_2 avec $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ tels que

$$|\widetilde{F}(\xi)| \leq C \exp \alpha |\xi|$$

pour tout ξ dont l'argument vérifie $\theta_1 \leq \arg(\xi) \leq \theta_2$;

- d. La transformée de Laplace $F(x) = \mathcal{L}_{\theta'}(\widetilde{F})(x)$ de \widetilde{F} existe dans toutes les directions θ' , $\theta_1 \leq \theta' \leq \theta_2$ et elle est analytique sur la réunion $\mathcal{D}_{\theta_1, \theta_2}$ des disques de Borel de diamètre de longueur $\frac{1}{\alpha}$ dirigé par θ' ;
- e. la fonction F est asymptotique à \widehat{F} en 0 sur $\mathcal{D}_{\theta_1, \theta_2}$ et elle est solution du système $[A_0; A]$. C'est donc une somme de \widehat{F} sur $\mathcal{D}_{\theta_1, \theta_2}$.

Nous donnons en appendice les détails d'une démonstration de ce résultat dans le cas où la monodromie formelle $\widehat{M} = e^{2i\pi L}$ est triviale *i.e.* $\widehat{M} = I$. La démonstration du cas général est très voisine.

La série d'Euler est un exemple de série sommable de niveau 1. On pourra remarquer que la classique méthode de variation de la constante appliquée à l'équation d'Euler correspond exactement à ce procédé. Prenons par exemple la direction $\theta = 0$ ou demi-axe réel positif. Les solutions de l'équation homogène $x^2 y' + y = 0$ sont de la forme $y = C^{te} e^{1/x}$. La méthode de variation de la constante donne directement la solution

$$f_1(x) = \int_0^x e^{1/x} e^{-1/t} \frac{dt}{t}$$

et après le changement de variable $t \mapsto \xi$ défini par $1/t - 1/x = \xi/x$

$$f_1(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\xi} e^{-\xi/x} d\xi.$$

On obtient donc exactement $f_1(x) = \mathcal{L}_0(\mathcal{B}_0(\widehat{f}_1))(x)$ puisque $\widehat{\mathcal{B}}(\widehat{f}_1)(\xi) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \xi^n$ et que cette série a pour somme $\frac{1}{1+\xi}$. Observer en outre que, bien que la série $\widehat{\mathcal{B}}(\widehat{f}_1)$ ait un rayon de convergence égal à 1, sa somme peut être prolongée analytiquement jusqu'à l'infini au voisinage de la direction $\theta = 0$. Cette propriété vaut pour toute direction θ sauf $\theta = \pi$ qui est la seule direction singulière de la série d'Euler.

Exemple 1

Sommation dans le cas d'un système de niveau unique k quelconque

Supposons que le système $[A]$ n'admette qu'un seul niveau k . Alors la série \widehat{F} est sommable par le procédé de sommation de niveau k

$$\begin{array}{ccccccc}
 x = t^{1/k} & \widehat{F}(x) & & & & & F(x) \\
 & \downarrow & \rho_k \downarrow & & & & \uparrow \rho_{1/k} \\
 t = x^k & \widehat{f}(t) & \xrightarrow{\mathcal{B}_{k\theta}} & \widetilde{f}(\tau) & \xrightarrow{\mathcal{L}_{k\theta}} & f(t) &
 \end{array}$$

dans toute direction θ sauf un nombre fini de directions singulières qui sont des directions anti-Stokes du système. On dit alors que \widehat{F} est k -sommable.

La série d'Euler-bis est une série 2-sommable. Ses directions singulières sont les deux demi-axes imaginaires. On vérifie aisément qu'on ne peut lui appliquer le procédé de sommation de niveau 1 dans aucune des directions $\theta \in]-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}[\cup]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}[$. Elle n'est donc pas 1-sommable ([L-R90]). Dans les autres directions θ on peut lui appliquer à la fois le procédé de niveau 1 et le procédé de niveau 2. La somme de niveau 1 est définie sur un demi-plan, celle de niveau 2 sur un quart de plan tous deux bissectés par θ . Mais naturellement, sur la partie commune de leur domaine de définition, les deux sommes coïncident. Ce phénomène est général : lorsque dans une direction θ on peut appliquer plusieurs des opérateurs de sommation S_θ les sommes obtenues coïncident sur la partie commune de leur domaine de définition.

Exemple 2

On a $\widehat{f}(t) = \rho_k(\widehat{F})(x) = \widehat{F}(t^{1/k})$ et $F(x) = f(x^k)$. On peut si on le préfère rester dans les "plans" des variables x et ξ . En notant $\mathcal{B}_{k;\theta} := \rho_{1/k} \circ \mathcal{B}_{k\theta} \circ \rho_k$ et $\mathcal{L}_{k;\theta} := \rho_{1/k} \circ \mathcal{L}_{k\theta} \circ \rho_k$ on a alors le diagramme de sommation

$$\begin{array}{ccccc}
 \widehat{F}(x) & \xrightarrow{\mathcal{B}_{k;\theta}} & \widetilde{F}^k(\xi) & \xrightarrow{\mathcal{L}_{k;\theta}} & F(x) \\
 \rho_k \downarrow & & \rho_{1/k} \downarrow \uparrow \rho_k & & \uparrow \rho_{1/k} \\
 \cdot & \xrightarrow{\mathcal{B}_{k\theta}} & \cdot & \xrightarrow{\mathcal{L}_{k\theta}} & \cdot
 \end{array}$$

(on a $x = t^{1/k}$ et $\xi = \tau^{1/k}$).

La méthode consiste donc à se ramener au cas de niveau 1 par l'intermédiaire des opérateurs de ramification ρ_k et $\rho_{1/k}$.

Domaines de définition correspondants : voir la figure 5.

$$\widehat{F} \text{ (Plan des } x) \qquad \rho_{1/2}\tilde{f} \text{ (Plan des } \xi) \qquad F \text{ (Plan des } x)$$

$$\widehat{f} \text{ (Plan des } t) \qquad \tilde{f} \text{ (Plan des } \tau) \qquad f \text{ (Plan des } t)$$

Figure 5

Sommation dans le cas d'un système à deux niveaux k_1 et k_2 ($k_1 < k_2$)

Supposons que le système $[A]$ admette les deux niveaux k_1 et k_2 . Alors la série \widehat{F} est sommable par le procédé suivant (voir le diagramme 1) :

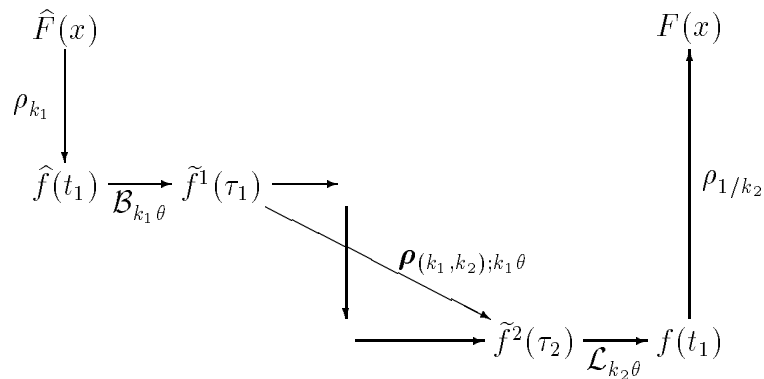


diagramme 1

(on commence par le niveau le plus bas). On dit que \widehat{F} est *multisommable* ou *accéléro-sommable* et si on veut préciser les niveaux qu'elle est (k_1, k_2) -sommable.

L'opérateur $\rho^{(k_1, k_2); k_1 \theta}$ est l'opérateur d'accélération défini au début de cette deuxième partie. C'est la forme intégrale de la composée des trois flèches en pointillés ([L-R90]).

Cet énoncé a le sens suivant :

- a. la série $\widehat{\mathcal{B}}_{k_1 \theta} \widehat{f}(\tau_1)$ est convergente ;

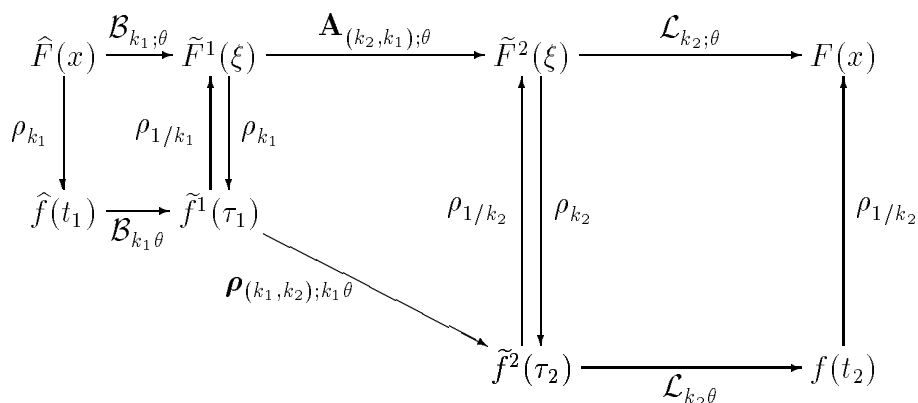


diagramme 2

- b. sa somme peut être prolongée à un secteur $k_1\theta_1 < k_1\theta < k_1\theta_2$ voisinage du rayon $d_{k_1\theta}$ en une fonction \widetilde{f}^1 à croissance exponentielle d'ordre $k_2/(k_2 - k_1)$;
- c. la fonction \widetilde{f}^2 déduite de \widetilde{f}^1 par accélération de puissance k_2/k_1 dans la direction $k_1\theta$ est définie et à croissance exponentielle d'ordre 1 sur un secteur $]k_2\theta_1, k_2\theta_2[$;
- d. sa transformée de Laplace est la somme cherchée à condition de l'exprimer en fonction de x via l'opérateur de ramification ρ_{1/k_2} .

On peut si on le préfère rester dans les “plans” des variables x et ξ . On a alors le diagramme de sommation : voir le diagramme 2.

Domaines de définition correspondants : voir la figure 6.

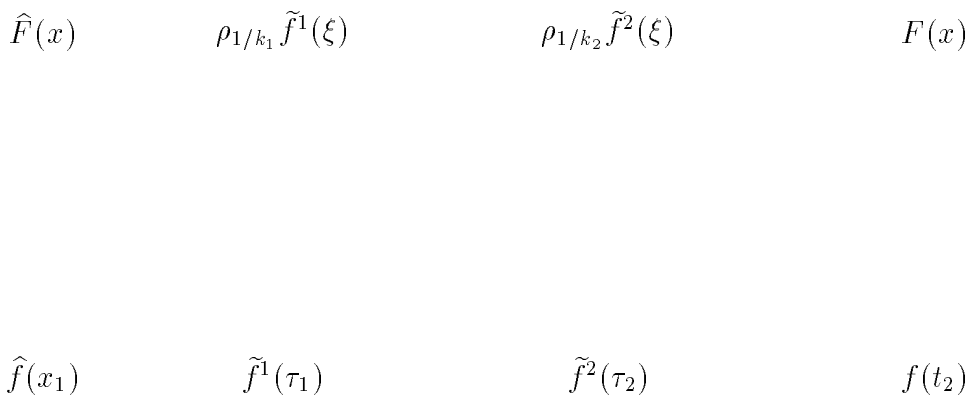


Figure 6

La série de Ramis-Sibuya est $(1, 2)$ -sommable. Il est clair qu'elle n'est ni 1-sommable ni 2-sommable puisqu'elle s'écrit

$$\widehat{f}_3 = \widehat{f}_1 + \widehat{f}_2$$

où \widehat{f}_1 est la série d'Euler qui est 1-sommable mais pas 2-sommable et où \widehat{f}_2 est la série d'Euler-bis qui est 2-sommable mais pas 1-sommable.

On peut montrer directement à titre d'exercice qu'elle est $(1, 2)$ -sommable ([L-R90]). Rappelons que le noyau d'accélération à utiliser dans ce cas est

$$C_2(\zeta) = i\sqrt{(\pi)}\zeta e^{-\frac{\zeta^2}{4}}$$

qui est de toute évidence à croissance exponentielle d'ordre au plus 2.

Exemple 3

Sommation dans le cas d'un système à un nombre quelconque de niveaux

Supposons que le système $[A]$ admette les niveaux $k_1 < k_2 < \dots < k_r$. Alors le procédé de sommation précédent s'itère sans nouveauté. En particulier les opérateurs d'accélération faisant passer d'un niveau au suivant suffisent. Ici encore on procède par niveaux croissants. Avec pour seule raison de rester dans les limites de la feuille de papier nous donnons le diagramme de sommation dans le cas de trois niveaux seulement $k_1 < k_2 < k_3$ (voir le diagramme 3).

La série \widehat{F} est sommable par ce procédé dans toute direction θ sauf un nombre fini de directions singulières qui sont des directions anti-Stokes du système. On dit que \widehat{F} est *multisommable* ou *accéléro-sommable des niveaux* k_1, k_2, \dots, k_r ou encore (k_1, k_2, \dots, k_r) -sommable.

Si on désire rester dans les "plans" des variables x et ξ on a le diagramme 4.

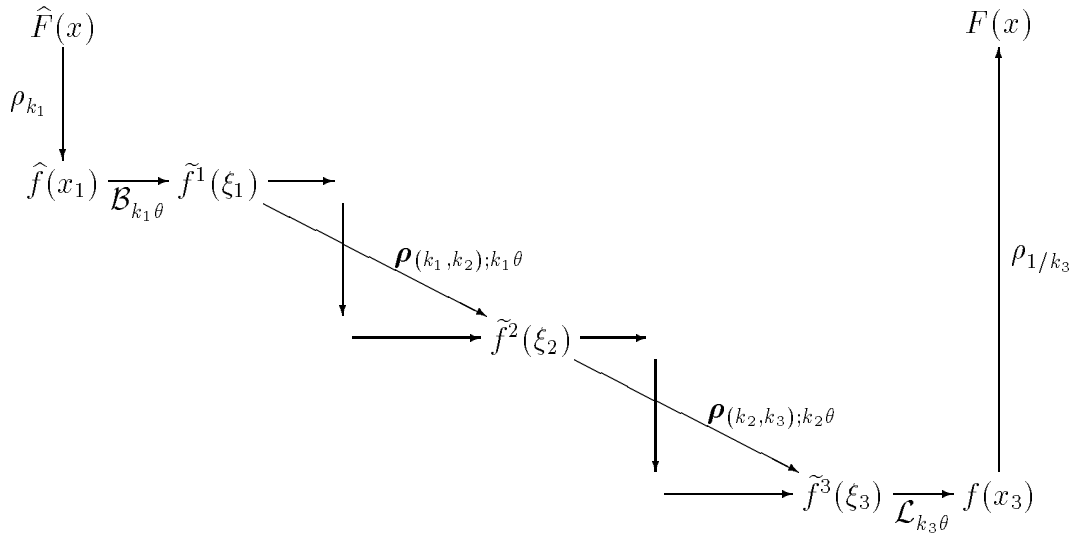


diagramme 3

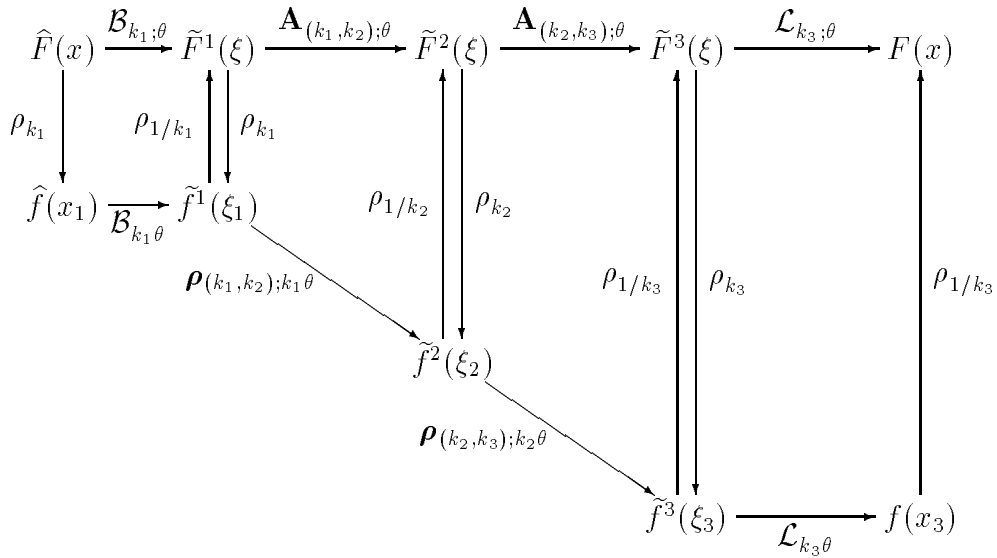


diagramme 4

Appendice

Dans cet appendice nous détaillons une démonstration de la sommabilité dans le cas particulier des systèmes de niveau unique 1. Celle-ci bien que plus simple que la démonstration du cas général est typique des arguments à utiliser. Nous suivons la méthode proposée par Ecalle ([E85], [E91]). Nous rappelons qu'il en existe d'autres.

THÉORÈME. — *Le facteur série formelle \widehat{F} d'une solution fondamentale formelle $\widehat{F}(x)x^L e^Q$ d'un système différentiel linéaire méromorphe $[A] : \frac{dY}{dx} = AY$ quand celui-ci ne comporte qu'un seul niveau égal à 1 est sommable par le procédé de sommation de niveau 1*

$$\widehat{F}(x) \xrightarrow{\mathcal{B}_\theta} \tilde{F}(\xi) \xrightarrow{\mathcal{L}_\theta} F(x)$$

dans toute direction θ qui n'est pas une direction anti-Stokes du système $[A]$.

Démonstration. — Il s'agit d'établir les points a. à e. déjà énoncés et que nous répétons ici :

- a. la transformée de Borel formelle $\widehat{\mathcal{B}}(\widehat{F})$ de \widehat{F} est convergente ;
- b. dans une direction θ quelconque qui n'est pas une direction anti-Stokes, la somme de la série $\widehat{\mathcal{B}}(\widehat{F})$ admet un prolongement analytique complexe jusqu'à l'infini. Nous le notons $\mathcal{B}_\theta(\widehat{F}) = \tilde{F}$;
- c. \tilde{F} est à croissance exponentielle d'ordre 1 à l'infini au voisinage de la direction θ , i.e. il existe des constantes C et $\alpha > 0$ et des arguments θ_1 et θ_2 avec $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ tels que

$$|\tilde{F}(\xi)| \leq C \exp \alpha |\xi|$$

pour tout ξ dont l'argument vérifie $\theta_1 \leq \arg(\xi) \leq \theta_2$;

- d. La transformée de Laplace $F(x) = \mathcal{L}_{\theta'}(\tilde{F})(x)$ de \tilde{F} existe dans toutes les directions θ' , $\theta_1 \leq \theta' \leq \theta_2$ et elle est analytique sur la réunion $\mathcal{D}_{\theta_1, \theta_2}$ des disques de Borel de diamètre de longueur $\frac{1}{\alpha}$ dirigé par θ' ;
- e. la fonction F est asymptotique à \widehat{F} en 0 sur $\mathcal{D}_{\theta_1, \theta_2}$ et elle est solution du système $[A_0; A]$. C'est donc une somme de \widehat{F} sur $\mathcal{D}_{\theta_1, \theta_2}$.

Pour simplifier, nous faisons l'hypothèse que la monodromie formelle $\widehat{M} = e^{2i\pi L}$ est triviale mais la démonstration s'étend sans difficulté au cas où \widehat{M} est quelconque. On peut alors réduire le système étudié à la forme préparée suivante :

$$[A] \quad x^2 \frac{d}{dx} Y = AY$$

avec $A(x) = \text{diag}(a_1, a_2, \dots) + x^2 B(x)$ où les a_i sont des scalaires ($a_i \in \mathbf{C}$) et où $B(x)$ est analytique en $x = 0$ avec $\text{diag} B(0) = 0$. Le système $[A]$ admet une solution fondamentale formelle de la forme $\hat{Y}(x) = \hat{F}(x)e^{Q(1/x)}$ avec

$$Q\left(\frac{1}{x}\right) = \text{diag}\left(-\frac{a_1}{x}, -\frac{a_2}{x}, \dots\right) \quad \text{et} \quad \hat{F}(x) = I + O(x^2).$$

On choisit la forme normale $[A_0]$: $x^2 \frac{dY}{dx} = A_0 Y$ où $A_0 = \text{diag}(a_1, a_2, \dots)$ et sa solution fondamentale $Y_0(x) = e^{Q(1/x)}$.

La matrice \hat{F} est l'unique solution série formelle du système

$$(1) \quad x^2 \frac{dF}{dx} = A_0 F - F A_0 + x^2 B F$$

qui vérifie $\hat{F}(0) = I$.

Conformément aux propriétés de la transformation de Borel le système transformé de Borel de (1) s'écrit

$$(\tilde{1}) \quad \xi \tilde{F} = A_0 \tilde{F} - \tilde{F} A_0 + (\widetilde{x^2 B}) * \tilde{F}.$$

Dans une matrice U nous notons désormais $U^{(j,\ell)}$ l'élément placé en $j^{\text{ème}}$ ligne et $\ell^{\text{ème}}$ colonne. Et si $U(x) = \left[\sum_{p \geq 0} U_p^{(j,\ell)} x^p \right]$ nous notons $|U|(x) = \left[\sum_{p \geq 0} |U_p^{(j,\ell)}| x^p \right]$ la "série des modules". On a $|U(x)| \leq ||U|(x)| \leq |U|(|x|)$.

L'idée de base est d'introduire la perturbation régulière suivante du système (1) :

$$(1_\varepsilon) \quad x^2 \frac{dF}{dx} - A_0 F + F A_0 = \varepsilon x^2 B F$$

qui redonne le système (1) en substituant 1 à ε . Par transformation de Borel (1 $_\varepsilon$) devient

$$(\tilde{1}_\varepsilon) \quad \xi \tilde{F} - A_0 \tilde{F} + \tilde{F} A_0 = \varepsilon (\widetilde{x^2 B}) * \tilde{F}.$$

En développant les systèmes (1 $_\varepsilon$) et ($\tilde{1}_\varepsilon$) s'écrivent

$$(1_\varepsilon) \quad \begin{bmatrix} x^2 \frac{d}{dx} F^{(1,1)} & (x^2 \frac{d}{dx} - (a_1 - a_2)) F^{(1,2)} & \dots \\ (x^2 \frac{d}{dx} - (a_2 - a_1)) F^{(2,1)} & x^2 \frac{d}{dx} F^{(2,2)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = \varepsilon x^2 B F$$

et

$$(\tilde{1}_\varepsilon) \quad \begin{bmatrix} \xi \tilde{F}^{(1,1)} & (\xi - (a_1 - a_2)) \tilde{F}^{(1,2)} & \dots \\ (\xi - (a_2 - a_1)) \tilde{F}^{(2,1)} & \xi \tilde{F}^{(2,2)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = \varepsilon (\widetilde{x^2 B}) * \tilde{F}.$$

On voit apparaître les points $\xi = a_j - a_\ell \neq 0$ comme singularités potentielles de \tilde{F} . En revanche, le membre de droite étant divisible par ξ , le point $\xi = 0$ n'apparaît

pas comme tel. Ces points $(a_j - a_\ell)$ déterminent les directions anti-Stokes du système $[A]$.

Choisissons une direction d'étude θ qui n'est pas une direction anti-Stokes ; nous notons d_θ la demi-droite issue de 0 et de direction θ . Et considérons un domaine ouvert Δ , réunion d'une boule de centre 0 et d'un secteur, voisinage de d_θ , qui ne rencontre aucun des points $a_j - a_\ell \neq 0$; nous notons $m = \min_{\substack{(j,\ell) \\ a_j - a_\ell \neq 0}} \inf_{\xi \in \Delta} |\xi - (a_j - a_\ell)|$ la plus petite distance entre Δ et les points $a_j - a_\ell \neq 0$ (voir la figure 7).

Figure 7

Les points a., b. et c. sont établis dans les lemmes 1 à 5 ci-dessous. Le point d. est une propriété classique de la transformation de Laplace qui découle immédiatement des propriétés rappelées dans la deuxième partie de ce texte. Le point e. s'obtient par un argument classique de passage à la limite sous le signe somme.

LEMME 1.

- (i) Le système (1_ε) admet une unique solution série formelle $\hat{F}(x, \varepsilon) = \hat{F}_0 + \sum_{i \geq 1} \hat{F}_i \varepsilon^i$ qui vérifie $\hat{F}_0 = I$ et $\hat{F}_i(0) = 0$, $i \geq 1$. On a en fait $\hat{F}_i(x) = O(x^2)$.
- (ii) Le système $(\tilde{1}_\varepsilon)$ admet une unique solution série formelle $\phi(\xi, \varepsilon) = \phi_0 + \sum_{i \geq 1} \phi_i(\xi) \varepsilon^i$, qui vérifie $\phi_0 = \delta I$ et $\phi_i(0) = 0$, $i \geq 1$.
- (iii) Les séries ϕ_i sont les transformées de Borel formelles de \hat{F}_i : $\phi_i = \hat{\mathcal{B}}(\hat{F}_i)$, $i \geq 1$.

Elles sont convergentes et elles admettent sur le domaine Δ un prolongement analytique, que nous noterons encore $\phi_i(\xi)$. En outre, $\phi_0 = \hat{\mathcal{B}}(\hat{F}_0)$.

Démonstration. — Les \hat{F}_i sont déterminées de proche en proche à partir de $\hat{F}_0 = I$ comme unique solution vérifiant $\hat{F}_i(0) = 0$ des systèmes

$$(1-i) \quad \begin{bmatrix} x^2 \frac{d}{dx} F_i^{(1,1)} & (x^2 \frac{d}{dx} - (a_1 - a_2)) F_i^{(1,2)} & \dots \\ (x^2 \frac{d}{dx} - (a_2 - a_1)) F_i^{(2,1)} & x^2 \frac{d}{dx} F_i^{(2,2)} & \\ \vdots & \ddots & \end{bmatrix} = x^2 B F_{i-1}.$$

Et l'hypothèse $\text{diag } B(0) = 0$ (en fait $B^{(j,\ell)}(0) = 0$ si $a_j - a_\ell = 0$) entraîne $\widehat{F}_i(x) = O(x^2)$.

Les ϕ_i sont déterminés de proche en proche à partir de $\phi_0 = \delta I$ comme unique solution vérifiant $\phi(0) = 0$ des systèmes

$$(1-i) \quad \begin{bmatrix} \xi \phi_i^{(1,1)} & (\xi - (a_1 - a_2)) \phi_i^{(1,2)} & \cdots \\ (\xi - (a_2 - a_1)) \phi_i^{(2,1)} & \xi \phi_i^{(2,2)} & \\ \vdots & \ddots & \end{bmatrix} = (\widetilde{x^2 B}) * \phi_{i-1}$$

déduits de $(1-i)$ par transformation de Borel.

Les mêmes conditions déterminent de toute évidence de vraies fonctions ϕ_i solutions analytiques sur Δ ; (la série $x^2 B(x)$ étant convergente, sa transformée de Borel est une fonction analytique sur \mathbf{C} tout entier). Par unicité, ce sont les sommes des séries précédentes.

Remarque. — Le point iii) justifie du développement en série de ε , c'est-à-dire de la nécessité d'une perturbation : l'existence sur Δ d'une vraie fonction $\phi(\xi, \varepsilon)$ n'est pas évidente au vu du système $(\widetilde{1}_\varepsilon)$ et cela, même si on fixe $\varepsilon = 1$.

Nous allons montrer que les fonctions ϕ_i sont en module majorées sur Δ par des fonctions positives ψ_i dont la somme $\psi(\xi, \varepsilon) - \psi_0 = \sum_{i \geq 1} \psi_i(\xi) \varepsilon^i$ est analytique et à croissance exponentielle d'ordre 1 à l'infini. D'où, à la fois l'existence de la fonction ϕ cherchée, son analyticité et sa croissance exponentielle à l'infini sur Δ . Pour cela on établit que $\psi(\xi, \varepsilon)$ est la transformée de Borel en x d'une fonction $G(x, \varepsilon)$ solution d'un système sans point singulier en $x = 0$. (Sans l'hypothèse $\widehat{M} = I$ on obtiendrait un système à point singulier régulier en $x_0 = 0$ et on pourrait donc conclure de la même façon).

LEMME 2.

(i) *Le système*

$$(\widetilde{2}_\varepsilon) \quad \begin{bmatrix} \xi \widetilde{G}^{(1,1)} & m \widetilde{G}^{(1,2)} & \cdots \\ m \widetilde{G}^{(2,1)} & \xi \widetilde{G}^{(2,2)} & \\ \vdots & \ddots & \end{bmatrix} = \varepsilon (\widetilde{x^2 B}) * \widetilde{G}.$$

(on remplace $\xi - (a_j - a_\ell)$ par m dans $(\widetilde{1}_\varepsilon)$ lorsque $a_j - a_\ell \neq 0$) admet une unique solution série formelle

$$\psi(\xi, \varepsilon) = \psi_0 + \sum_{i \geq 1} \psi_i(\xi) \varepsilon^i$$

vérifiant $\psi_0 = \delta I$ et $\psi_i(0) = 0$, $i \geq 1$.

- (ii) *La série $\psi(\xi, \varepsilon) - \psi_0$ est à coefficients positifs et converge pour tout (ξ, ε) . Notons encore $\psi(\xi, \varepsilon) - \psi_0$ sa somme et $\psi_i(\xi)$ celles des séries $\psi_i(\xi)$.*
- (iii) *Pour tout ε , la fonction $\psi(\xi, \varepsilon) - \psi_0$ est à croissance exponentielle d'ordre 1 quand ξ tend vers l'infini.*

Démonstration. — Les séries $\psi_i(\xi)$ sont déterminées de proche en proche à partir de $\psi_0 = \delta I$ comme unique solution vérifiant $\psi_i(0) = 0$ des systèmes

$$(2-i) \quad \begin{bmatrix} \xi \psi_i^{(1,1)} & m \psi_i^{(1,2)} & \dots \\ m \psi_i^{(2,1)} & \xi \psi_i^{(2,2)} & \\ \vdots & \ddots & \end{bmatrix} = (x^2 | B |) * \psi_{i-1}.$$

Elles ont de toute évidence des coefficients positifs.

La série $\psi(\xi, \varepsilon)$ est la transformée de Borel de l'unique solution $\widehat{G}(x, \varepsilon) = \widehat{G}_0 + \sum_{i \geq 1} \widehat{G}_i(x) \varepsilon^i$ qui vérifie $\widehat{G}_0 = I$ et $\widehat{G}_i(0) = 0$, $i \geq 1$ du système

$$(2_\varepsilon) \quad \begin{bmatrix} x^2 \frac{d}{dx} G^{(1,1)} & m G^{(1,2)} & \dots \\ m G^{(2,1)} & x^2 \frac{d}{dx} G^{(2,2)} & \\ \vdots & \ddots & \end{bmatrix} = \varepsilon x^2 | B | G.$$

Or, quel que soit ε , l'origine $x = 0$ est un point ordinaire de ce système. La série $\widehat{G}(x, \varepsilon)$ est donc une série de x convergente. Par suite, sa transformée de Borel $\psi(\xi, \varepsilon)$ a un rayon de convergence infini et elle est à croissance exponentielle d'ordre 1 à l'infini.

LEMME 3. — *Pour tout $\xi \in \mathbf{R}^+ \cap \Delta$ on a les majorations*

$$|\phi_i(\xi)| \leq \psi_i(\xi) \quad i \geq 1.$$

Démonstration. — Elle se fait par récurrence sur i en comparant les systèmes $(1-i)$ et $(2-i)$.

LEMME 4. — *Pour tout $\xi \in \Delta$ on a les majorations*

$$|\phi_i(\xi)| \leq \psi_i(\xi) \quad i \geq 1.$$

Démonstration. — Soit θ' une direction quelconque et $\xi \in \Delta \cap d_{\theta'}$. On applique le lemme précédent au système (1_ε^*) déduit de (1_ε) par le changement variable $x \mapsto e^{-i\theta} x$. A ce système est associé le même système "majorant" (2_ε) , d'où le résultat.

Il résulte de ces quatre lemmes que la série $\phi(\xi, \varepsilon) - \phi_0 = \sum_{i \geq 1} \phi_i(\xi) \varepsilon^i$ définit pour tout ε , en particulier pour $\varepsilon = 1$, une vraie fonction solution de (1_ε) et à croissance exponentielle sur Δ . On peut donc énoncer (points a,b,et c)

LEMME 5. — *La série formelle $\widehat{B}\widehat{F}(\xi) - \delta I$ est convergente, sa somme admet un prolongement analytique sur Δ qui est à croissance exponentielle d'ordre 1 à l'infini.*

Références

- [BLJ79] W. BALSER, W.B. JURKAT, D.A. LUTZ, *A General Theory of Invariants For Meromorphic Differential Equations, Part I: Formal Invariants*, Funkcialaj Ekvacioj **22** (1979), 197–221.
- [Br 90] B.L.J. BRAAKSMA, *Multisummability and Stokes multipliers of linear meromorphic differential equations*, I.M.A. Preprint Series 744, University of Minnesota (Minneapolis) (Dec 1990).
- [Ca 1] H. CARTAN, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables*, Hermann, Paris, 1961.
- [Ca 2] H. CARTAN, *Cours de calcul différentiel*, Hermann, Paris, 1967 et 1985.
- [Ec 85] J. ECALLE, *Les fonctions résurgentes, Tome III*, Publications mathématiques d'Orsay n° 85-05, 1985.
- [Ec 91] J. ECALLE, *L'accélération et ses applications*, Travaux en Cours, Hermann, Paris, à paraître.
- [For] A.R. FORSYTH, *Theory of Differential Equations*, Part III. Ordinary Differential Equations - Vol.4.
- [He] P. HENRICI, *Applied and computational complex analysis*, Vol.2, Wiley-Interscience Publications, 1977.
- [L-R av90] M. LODAY-RICHAUD, *Introduction à la multisommabilité*, Gazette des Mathématiciens (SMF) **44** (Avril 1990), 41–63.
- [Mal 79] B. MALGRANGE, *Sur la réduction formelle des équations différentielles à singularités irrégulières*, Preprint de l'Institut Fourier - Grenoble (Mars 1979).
- [MR 89] J. MARTINET, J-P. RAMIS, *Théorie de Galois différentielle et resommation*, in *Computer Algebra and Differential Equations*, E. Tournier, éd., Academic Press (1989).
- [MR 90] J. MARTINET, J-P. RAMIS, *Elementary acceleration and multisummability*, Annales de l'Institut Henri Poincaré, série A, Physique théorique **54** (1991), 1–71.
- [Mar 89] J.C.C. MARTINS, *Desenvolvimento sintótico e introdução ao cálculo diferencial resurgente*, in *IMPA 17º Colóquio Brasileiro de Matemática*, Rio de Janeiro (Mars 1989).

- [Ra 80] J.-P. RAMIS, *Les séries k -sommables et leurs applications*, in *Complex Analysis, Microlocal Calculus and Relativistic Quantum Theory, Proceedings "Les Houches" 1979*; D. Iagolnitzer ed., Springer Lectures Notes in Physics **126** (1980), 178–199.
- [Ra 85] J. P. RAMIS, *Filtration Gevrey sur le groupe de Picard-Vessiot d'une équation différentielle irrégulière*, Preprint n° 45 Instituto de Matematica Pura e Aplicada, IMPA, Rio de Janeiro (1985), 1–38.
- [Ra 91] J. P. RAMIS, *Séries divergentes et théories asymptotiques*, ce volume.
- [Wa] W. WASOW, *Asymptotic expansions for ordinary differential equations*, Dover Publications, inc. et Interscience, 1965.

Département de Mathématiques
Université de Paris XI
91405 Orsay Cedex
FRANCE

Procédés formels et numériques de sommation de séries solutions d'équations différentielles

JEAN THOMANN

1. Préliminaires

Une série formelle $\hat{f}(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \cdots + a_nx^n + \cdots$ est définie si tous les coefficients a_j ($j \in \mathbf{N}$) peuvent être définis par un ou plusieurs algorithmes *numériques*, *formels* ou *formels-numériques* :

– *numériques* au sens où chaque a_j peut être évalué par un calcul numérique classique (par exemple une quadrature), avec nécessairement une erreur de représentation.

– *formels* au sens où, par exemple :

$$(7 + 2j)(5 + 2j)a_j + 2(7 + 2j)a_{j+1} - (4 + 2j)a_{j+2} = 0 \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

et où nous connaissons les conditions initiales : $a_0 = 1$ et $a_1 = 5$.

Dans ce cas, les a_j sont solutions d'une équation de récurrence avec des coefficients polynomiaux. Ces polynômes ont des coefficients qui appartiennent à \mathbf{Z} , \mathbf{Q} ou qui peuvent être des nombres algébriques (par exemple i , $\sqrt{2}$, \dots , ou beaucoup plus compliqués).

Si les valeurs initiales appartiennent à ces ensembles, nous pouvons calculer *exactement* tous les a_j (même si leur représentation est symbolique pour les nombres algébriques).

Ces définitions sont d'une importance primordiale parce que les valeurs de a_j , si elles sont calculées par des méthodes numériques faisant appel à l'arithmétique de la virgule flottante, peuvent dévier très rapidement de leurs vraies valeurs, pour des raisons d'instabilité bien connues notamment dans les récurrences à 3 termes.

– *formels-numériques*, par exemple, au cas où les conditions initiales sont exprimées par des nombres en virgule flottante et où l'équation de récurrence est *formelle* au sens ci-dessus.

Cette distinction ou synthèse *formelle-numérique* sera utile dans tout calcul concernant les équations différentielles, les solutions sous formes de séries, d'approximants rationnels, *etc.*

La règle sera : utiliser les algorithmes formels, donc exacts, le plus longtemps possible, puis passer à un calcul numérique *contrôlé*.

2. Somme d'une série convergente

Connaissant une série formelle $\hat{f}(x)$, le but est de lui associer une fonction *unique* $f(x)$, somme de la série formelle en x .

Si tout va bien, nous pouvons utiliser directement les critères de convergence (Cauchy, d'Alembert, *etc.*) et constater la convergence d'une série dans un disque de rayon non nul, comme dans le cas trivial :

$$\hat{f}(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots$$

convergente dans un disque de rayon < 1 .

Mais aussitôt, on aimerait connaître la somme $f(x)$ dans le domaine le plus grand possible du plan complexe; d'où les méthodes de prolongement analytique bien connues (Weierstrass, Borel, Mittag-Leffler, approximants rationnels, *etc.*).

Dans notre cas simple, la fonction rationnelle $\frac{1}{1+x}$ nous donne immédiatement une fonction holomorphe dans tout le plan complexe privé du point singulier -1 .

D'où l'idée d'effectuer un prolongement analytique par des fonctions rationnelles avec l'aide d'algorithmes qui sont plus faciles à mettre en oeuvre que les autres méthodes mentionnées et qui peuvent être entièrement formels.

La série formelle

$$\hat{f}(x) = 1 - \frac{3}{4}x + \frac{39}{32}x^2 - \frac{267}{128}x^3 + \frac{7563}{2048}x^4 - \frac{54789}{8192}x^5 + \dots$$

semble plus difficile à analyser, à sommer et à prolonger que la précédente.

Par contre, si nous savons que cette série est solution formelle de l'équation fonctionnelle :

$$(1 + 2x)f^2 - 1 - \frac{1}{2}x = 0,$$

nous pouvons constater qu'une singularité se situe en $-\frac{1}{2}$, et que \hat{f} est convergent dans un disque de rayon $< 1/2$

D'autre part, l'approximant de Padé $[1/1] : \frac{1+7/8x}{1+13/8x}$ (approximant rationnel admettant une série de Taylor coïncidant avec \hat{f} jusqu'à l'ordre $1 + 1 = 2$ inclus et calculé directement à partir de 3 termes de la série \hat{f}) représente la somme $f(x) = \sqrt{\frac{1+1/2x}{1+2x}}$ avec une précision déjà remarquable, de sorte que $f(1) = 0.707\dots$ et $[1/1](1) = 0.714\dots$, ainsi que $f(\infty) = 0.5$ et $[1/1](\infty) = 0.54$. (Voir G.A. Baker and P. Graves-Morris : Padé Approximants, Addison-Wesley P.C. 1981).

Dans notre cas simple, il est facile de voir que :

$$\hat{f}(x) = 1 - x + x^2 \dots + (-1)^n x^n + \dots$$

est une série formelle, solution formelle de l'équation différentielle :

$$(x + 1)y' + y = 0.$$

Cette série formelle a été obtenue en reportant la série

$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \dots + a_nx^n + \dots$$

ainsi que sa dérivée formelle dans l'équation différentielle et en identifiant les coefficients a_j des mêmes termes en x^j .

D'où une équation de récurrence :

$$a_{j+1} + a_j = 0 \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

associée à l'équation différentielle génératrice et permettant le calcul exact de tous les a_j à partir de $a_0 = 1$.

Cette dualité *équation différentielle-équation de récurrence* (utilisée par Frobenius et Pincherle) a été développée et est un élément de base des logiciels de calcul formel des solutions d'équations différentielles linéaires (par exemple le code DESIR développé au LMC de Grenoble [2, 10]).

Il est important de remarquer que nous pouvons lire la singularité -1 sur l'équation différentielle. En effet, l'équation caractéristique $x + 1 = 0$ a comme racine -1 .

3. Somme d'une série divergente

Nous pouvons utiliser le même procédé sur l'équation différentielle :

$$x^2 y' + y = x$$

pour trouver la série formelle solution :

$$x \hat{f}(x) = x[1 - 1!x + 2!x^2 \cdots + (-1)^n n!x^n + \cdots].$$

Cette fois-ci, la série $\hat{f}(x)$ est divergente; ce qui pouvait être prévu en regardant l'équation différentielle qui présente une singularité irrégulière à l'origine.

La théorie des développements asymptotiques Gevrey, solutions d'équations différentielles linéaires [4], nous permet de dire qu'à l'intérieur d'un secteur *assez petit* V (d'ouverture $< \pi/k$), la sommation au *plus petit terme* de $\hat{f}(x)$ donne une approximation d'une solution $f(x)$ holomorphe dans V telle que :

$$|f(x) - \sum_{p < L_V |x|^{-k}} a_p x^p| \leq C_V \exp(-K_V |x|^{-k}),$$

où L_V , C_V et K_V sont des constantes liées à V . k vaut 1 dans notre cas particulier.

Cette somme tronquée donne une solution à une fonction exponentiellement décroissante près.

Dans les cas usuels, notamment les séries solutions d'équations de fonctions spéciales, ce procédé revient à tronquer la série juste avant le plus petit terme $|a_n x^n|$.

C'est ainsi qu'on trouve la *somme* de la série, c'est à dire une solution de l'équation différentielle : par exemple en 0.1 : $f(0.1) = 0.91528$ (la valeur exacte de cette fonction connue étant 0.91563).

Au sens de l'analyse numérique classique, ce procédé permet d'avoir une très bonne approximation dans un petit voisinage de O , puisque l'erreur décroît exponentiellement si on tend vers O sur n'importe quel rayon issu de l'origine.

Si on entreprend une analyse plus fine, on peut dans certains cas représenter la solution d'une équation différentielle linéaire, dont le développement de Taylor est une série formelle $\hat{f}(x)$, sous la forme :

$$f(x) = \frac{k}{x^k} \int_d \varphi(t) \exp(-t^k/x^k) t^{k-1} dt$$

où k est un entier positif.

$\varphi(t)$ est le prolongement analytique sur une droite d issue de 0 de la somme de la série formelle $\hat{\varphi}(t) = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{\Gamma(1+n/k)} t^n$ convergente dans un disque de rayon non nul.

Cette représentation est vraie si $\hat{f}(x)$ est k -sommable d'après la théorie développée par J.P.Ramis [4].

Si k est entier (sinon on peut s'y ramener par une ramification, si l'équation est à coefficients polynomiaux), cette intégrale existe dans toute direction sauf un nombre fini de *directions singulières* et $f(x)$ est l'unique solution de l'équation différentielle dans un secteur d'ouverture $> \pi/k$, dont le développement de Taylor est $\hat{f}(x)$.

Toutes les séries solutions d'équations différentielles du premier et du second ordre (fonctions spéciales, etc.) homogènes sont k -sommables et bien d'autres encore...

k peut être lue directement à partir des coefficients de l'équation différentielle avec l'aide du polygone de Newton.

DÉFINITION du polygone N-R-M (Newton, Ramis, Malgrange) en $x = 0$, d'un opérateur différentiel $\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{\infty} p_{i,j} x^j \left(\frac{d}{dx}\right)^i$: Si $Q^+(u, v) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, x \leq u, y \geq v\}$, est le second quadrant de \mathbf{R}^2 translaté en (u, v) , on définit :

$$M^+(L) = \bigcup_{p_{i,j} \neq 0} Q^+(i, j - i).$$

Le *polygone N-R-M* de L est l'enveloppe convexe inférieure de $M^+(L)$.

Toutes ses pentes finies sont rationnelles. Par exemple, le polygone N-R-M de l'équation :

$$4x^5 y'' + 2x^2 y' + y = 0$$

est représenté sur la figure 1.

Pour l'équation d'Euler $x^2 y' + y = x$, la série $\hat{f}(x)$ est 1-sommable parce que le polygone de Newton n'a qu'une seule pente égale à 1.

Le fait que la pente soit différente de 0 nous indique aussi que la singularité à l'origine est *irrégulière* et que par conséquent la série est en général divergente.

La série $\hat{f}(x)$ a une somme unique définie par

$$f(x) = \frac{1}{x} \int_d \varphi(t) \exp(-t/x) dt$$

où d est toute direction issue de O sauf la direction \mathbf{R}^- .

Pourquoi la direction singulière est-elle \mathbf{R}^- ?

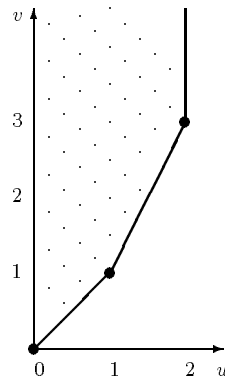


Figure 1

Si nous calculons formellement $\hat{\varphi}(t)$, définie précédemment et appelée transformée formelle de Borel, nous obtenons :

$$1 - t + t^2 - \dots + (-1)^n t^n \dots = \frac{1}{1+t}$$

et nous connaissons son prolongement sur toute droite d , sauf celle qui correspond à \mathbf{R}^- puisque $\frac{1}{1+t}$ a un pôle en -1 .

Si d prend toutes les directions non singulières, les fonctions définies par l'intégrale et holomorphes dans un demi-plan bissecté par d , se recollent pour donner une seule fonction $f(x)$ définie dans un secteur d'ouverture 3π .

Dans le demi-plan bissecté par \mathbf{R}^- , nous voyons que nous obtenons 2 déterminations de $f(x)$ en faisant tourner d depuis la position où d forme un angle $-\pi + \varepsilon$ avec \mathbf{R}^+ jusqu'à la position où d forme un angle $+\pi - \varepsilon$ avec \mathbf{R}^+ ; et par un calcul de résidu on trouve que la différence des deux déterminations est $2i\pi \exp(1/x)$.

Nous voyons donc que la notion de disque de convergence est remplacée par la notion de secteurs de convergence.

La transformée de Borel formelle permet de *transposer* l'étude de $f(x)$ dans un nouveau plan complexe où les séries $\hat{\varphi}(t)$ sont cette fois-ci convergentes comme précédemment avec les mêmes problèmes de prolongement analytique.

Dans cette transposition il y a correspondance entre *directions singulières* de $\hat{f}(x)$ et *directions sur lesquelles se trouvent les singularités* de $\varphi(t)$.

4. Un exemple particulier

Nous allons illustrer cette démarche sur un exemple un peu plus complexe.

La série formelle

$$\hat{g}(x) = 1 + 5x + 105/4x^2 + 525/4x^3 \dots$$

est l'une des 2 solutions de l'équation différentielle :

$$4x^3 y'' + 2(14x^2 + 2x - 1)y' + 5(7x + 2)y = 0.$$

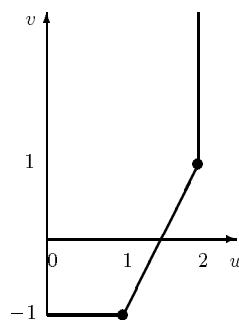


Figure 2

Le polygone de Newton de cette équation, représenté sur la figure 2, est composé d'un segment de pente nulle et d'un segment de pente 2. Nous pouvons en déduire que la série formelle $\hat{g}(x)$, correspondant à la pente nulle, est *2-sommable*.

Les coefficients de la série formelle sont obtenus par l'équation de récurrence associée à l'équation différentielle génératrice :

$$(7 + 2j)(5 + 2j)a_j + 2(7 + 2j)a_{j+1} - (4 + 2j)a_{j+2} = 0 \quad (j = 0, 1, 2 \dots),$$

où $a_0 = 1$ et $a_1 = 5$.

Si nous scindons $\hat{g}(x)$ en 2 sous-séries : $\hat{\psi}_1(u) + x\hat{\psi}_2(u)$, où $u = x^2$, $\psi_1(u)$ et $\psi_2(u)$ sont chacune *1-sommable*.

Les coefficients des transformées de Borel formelles : $\hat{\varphi}_1(t)$ et $\hat{\varphi}_2(t)$ seront solutions respectivement des équations de récurrence :

$$\begin{aligned} &(5 + 4j)(7 + 4j)(9 + 4j)(11 + 4j)a_j \\ &\quad - 2(7 + 4j)(9 + 4j)(11 + 4j)(j + 1)a_{j+1} \\ &\quad + (6 + 4j)(8 + 4j)(j + 1)(j + 2)a_{j+2} = 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &(7 + 4j)(9 + 4j)(11 + 4j)(13 + 4j)a_j \\ &\quad - 2(9 + 4j)(11 + 4j)(13 + 4j)(j + 1)a_{j+1} \\ &\quad + (8 + 4j)(10 + 4j)(j + 1)(j + 2)a_{j+2} = 0 \end{aligned}$$

Si nous calculons formellement l'équation différentielle génératrice de la première équation nous trouvons :

$$\begin{aligned} &16(16t^2 - 8t + 1)t^2 \frac{d^4 U}{dt^4} + (3584t^2 - 1248t + 72)t \frac{d^3 U}{dt^3} \\ &\quad + (13920t^2 - 2904t + 48) \frac{d^2 U}{dt^2} + (15840t - 1386) \frac{dU}{dt} + 3465U = 0 \end{aligned}$$

Nous savons que $\hat{\varphi}_1(t)$ est solution de cette équation.

L'équation caractéristique : $16t^2 - 8t + 1 = (4t - 1)^2 = 0$ a une racine double en $1/4$, qui est donc la seule singularité à distance finie de l'équation différentielle, donc la seule possible à distance finie pour $\varphi_1(t)$. On peut situer de la même manière la seule singularité possible à distance finie de $\varphi_2(t)$, en $1/4$.

En analysant formellement cette équation différentielle, par exemple par le code DESIR, nous constatons que nous nous trouvons en face d'une singularité essentielle.

Nous savons donc dans quelles directions nous pouvons effectuer le prolongement analytique de $\varphi_1(t)$ afin de pouvoir calculer :

$$\psi_1(u) = \frac{1}{u} \int_d \varphi_1(t) \exp(-t/u) dt.$$

d pourra donc être toute direction sauf \mathbf{R}^+ qui contient $1/4$.

5. Calculs effectifs.

Nous pouvons donc passer au calcul effectif de ces transformées de Laplace : $f(x) = 1/x \int_d \varphi(t) \exp(-t/x) dt$ où $\varphi(t)$ est la somme d'une série formelle $\hat{\varphi}(t)$ convergente dans un disque de rayon non nul.

Si $\hat{f}(x)$ est k -sommable, nous pouvons toujours, comme dans l'exemple précédent, scinder $\hat{f}(x)$ en sous-séries 1 -sommables et nous ramener à ce cas.

Rappelons que les coefficients de la série $\hat{f}(x)$, donc de la série $\hat{\varphi}(t)$ sont des nombres algébriques si $\hat{f}(x)$ est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients polynomiaux, ces polynômes ayant eux-mêmes des coefficients qui sont des nombres algébriques.

Nous connaissons l'équation de récurrence exacte que vérifient les coefficients de $\hat{\varphi}(t)$, et par conséquent l'équation différentielle que vérifie $\hat{\varphi}(t)$. Donc ses singularités sont connues ainsi que les directions singulières correspondantes.

De plus la théorie de la k -sommabilité nous assure de la croissance au plus exponentielle de $\varphi(t)$ quand t tend vers l'infini dans toute direction non singulière.

5.1. Décomposition spectrale formelle

Une première méthode consiste à prolonger $\varphi(t)$ par un approximant rationnel de type Padé dans les directions non singulières.

Dans le cas où il n'y a qu'une seule direction singulière (équations différentielles homogènes du second ordre, fonctions spéciales, etc.), nous pouvons approcher $\varphi(t)$ par $P_M(t)/Q_N(t)$ où $P_M(t)$ et $Q_N(t)$ sont des polynômes respectivement de degré $M = N + j$, où $j \geq -1$, et de degré N . On choisit $Q_N(t)$ de telle sorte que les racines de $Q_N(t)$ soient situées sur la coupure T correspondant à la demi-droite issue de la singularité la plus proche de O , d'affixe a , et de direction, la direction singulière.

A la différence des approximants de Padé, pour les approximants de type Padé, on choisit les dénominateurs $Q_N(t)$, puis on détermine $P_M(t)$ de sorte que le développement de Taylor de $P_M(t)/Q_N(t)$ coïncide avec la série formelle jusqu'à l'ordre M inclu.

On prendra $Q_N(t) = t^N v_N(1/t)$ où v_N sera un polynome orthogonal (Legendre, Tchebycheff) ayant ses racines situées sur le segment inverse de T .

Dans ce cas, il est démontré [3] que :

$$\frac{1}{x} \int_d \frac{P_M(t)}{Q_N(t)} \exp(-t/x) dt \quad \text{tend vers} \quad \frac{1}{x} \int_d \varphi(t) \exp(-t/x) dt,$$

quand N tends vers l'infini et $M = N + j$ où $j \geq -1$.

En décomposant $P_M(t)/Q_N(t)$ en éléments simples, nous obtiendrons une expression de la forme

$$\begin{aligned} f(x) &= Pol(x) + \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{x} \int_d \frac{1}{t - t_i} e^{-t/x} dt \\ &= Pol(x) + \sum_{i=1}^N -\frac{A_i}{t_i} EXPI\left(-\frac{x}{t_i}\right). \end{aligned}$$

où $Pol(x)$ est un polynome en x et où $EXPI$ désigne :

$$EXPI(x) = \frac{1}{x} \int_d \frac{1}{1+t} e^{-t/x} dt,$$

qui est la solution de l'équation d'Euler.

D'ailleurs dans ce cas simple, nous avons bien exprimé directement $\varphi(t)$ par la fonction rationnelle $\frac{1}{1+t}$, qui peut être considérée comme un approximant de type Padé.

Bien plus, comme nous le verrons en 5.4, ces fonctions $EXPI(x)$ peuvent être calculées par de vrais approximants de Padé, obtenus par un algorithme purement formel. Les coefficients $\frac{A_i}{t_i}$ étant des nombres algébriques, cette méthode peut donc être menée au bout par des algorithmes formels.

L'évaluation de $\psi_1(u) = \psi_1(x^2)$ pour $x = 0.15$ donne le résultat 0.622338 en utilisant cette méthode.

5.2. Prolongement numérique de la transformée de Borel

Une autre manière de concrétiser le prolongement analytique de $\varphi(t)$ est mi-formelle, mi-numérique. En effet, le calcul formel nous fournit l'équation différentielle vérifiée par $\varphi(t) = \sum_{n=\mu}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n$. Les conditions initiales de $\varphi(t)$ en 0 sont facilement lisibles sur la série elle-même. Cette équation différentielle est transformée en un système différentiel d'ordre 1 par un algorithme formel. A partir de ce système formel, nous pouvons générer un programme numérique classique, par exemple en Fortran ou en Pascal, qui va résoudre le système différentiel par un sous-programme de bibliothèque de résolution par la méthode de Runge-Kutta, puis l'intégration de $1/x \int_d \varphi(t) \exp(-t/x) dt$ par un sous-programme de bibliothèque de quadrature optimale par la méthode de Gauss-Laguerre.

Ces méthodes numériques sont stables dans le plan complexe, sauf à proximité des singularités de $\varphi(t)$, qui sont connues.

C'est ainsi que $\psi_1(x^2)$ vaut 0.622150 au même endroit que précédemment.

5.3. Séries de factorielles

Une troisième méthode numérique particulièrement efficace consiste à transformer $\widehat{f}(x)$ en série de factorielles généralisées (ou séries de *facultés* généralisées). Les *nombre de Stirling généralisés de 1^{ère} espèce* $S_t(n, k)$ sont définis par la formule de récurrence :

$$S_t(n + 1, k) = S_t(n, k - 1) - t_n S_t(n, k) \quad (n, k \geq 1)$$

$S_t(0, 0) = 1$, $S_t(n, 0) = 0$ si $n \neq 0$ et $S_t(n, k) = 0$ si $k \geq n + 1$ où $n, k \in \mathbb{N}$ et $\{t_1, t_2, \dots, t_n, \dots\}$ est une suite quelconque de nombres complexes, que nous supposons situés sur $1/d$.

Toute série formelle :

$$\widehat{f}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

peut être transformée formellement, telle que :

$$\frac{1}{z} \widehat{f}\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n \geq 0} \frac{b_{n+1}}{z(z + t_1) \dots (z + t_n)},$$

où

$$b_{n+1} = \sum_{k=0}^n (-1)^{k+n} S_t(n, k) a_k,$$

et où $z = 1/x$. [4]

On appellera SFG (comme série de factorielle généralisée) formelle, la série :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{b_{n+1}}{z(z + t_1)(z + t_2) \dots (z + t_n)}.$$

Remarque. — Par récurrence, on peut construire les formules de passage entre SFG formelles, correspondant à des suites $\{t_1, t_2, \dots, t_n, \dots\}$ différentes.

On a vu que, si une série $\widehat{f}(x)$ était 1-sommable dans une direction d , d'angle θ avec le demi-axe positif, sa somme s'exprimait par :

$$f(x) = \frac{1}{x} \int_d \varphi(t) e^{-t/x} dt = \frac{1}{x^*} \int_0^\infty \varphi(te^{i\theta}) e^{-t/x^*} dt \quad \text{où } x^* = x e^{-i\theta}$$

ou par :

$$\frac{1}{z} f\left(\frac{1}{z}\right) = e^{i\theta} \int_0^\infty \varphi(te^{i\theta}) e^{-tz^*} dt \quad x = \frac{1}{z} \quad \text{et} \quad x^* = \frac{1}{z^*}$$

En situant $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ sur la demi-droite de direction $-\theta$, on a l'équivalence formelle :

$$\frac{1}{z} \widehat{f}\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n \geq 0} \frac{b_{n+1}}{z(z + t_1) \dots (z + t_n)} = \sum_{n \geq 0} \frac{b_{n+1}^*}{z e^{i\theta} (z e^{i\theta} + \tau_1) \dots (z e^{i\theta} + \tau_n)}$$

où

$$b_{n+1} = \sum_{k=0}^n (-1)^{k+n} S_t(n, k) a_k, \quad b_{n+1}^* = \sum_{k=0}^n (-1)^{k+n} S_\tau(n, k) a_k e^{i(k+1)\theta}$$

et $\tau_l = t_l \exp(i\theta)$ ($l = 1, 2, \dots, n$).

Les τ_l sont alors situés sur la demi-droite \mathbf{R}^+ .

En posant :

$$u_1 = \frac{a_0}{z}, \quad u_2 = \frac{a_1}{z^2}, \quad \dots, \quad u_m = \frac{a_{m-1}}{z^m} \quad \text{et} \quad y = ze^{i\theta} :$$

$$\frac{1}{z} \widehat{f}\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n \geq 0} v_{n+1} = \sum_{n \geq 0} \frac{\sum_{k=0}^n u_{k+1} y^{k+1} |S_\tau(n, k)|}{y(y + \tau_1) \dots (y + \tau_n)}.$$

L'évaluation directe des termes v_{n+1} est impossible à cause de la croissance explosive des $S_\tau(n, k)$. En utilisant la récurrence définissant les nombres de Stirling généralisés de 5.3, on peut construire un algorithme récursif où les termes :

$$v_{n+1}^{(j)} = \frac{\tau_{n-1} v_n^{(j)} + y v_n^{(j+1)}}{y + \tau_n}$$

sont calculés par colonnes dans le tableau :

$$\begin{array}{ccccccc} v_1^{(1)} = u_1 & & & & & & \\ & v_2^{(1)} = \frac{y u_2}{y + \tau_1} & & & & & \\ v_1^{(2)} = u_2 & & v_3^{(1)} = \frac{\tau_1 v_2^{(1)} + y v_2^{(2)}}{y + \tau_2} & & & & \\ & v_2^{(2)} = \frac{y u_3}{y + \tau_1} & & v_4^{(1)} = \frac{\tau_2 v_3^{(1)} + y v_3^{(2)}}{y + \tau_3} & & & \\ v_1^{(3)} = u_3 & & v_3^{(2)} = \frac{\tau_1 v_2^{(2)} + y v_2^{(3)}}{y + \tau_2} & & \dots & & \\ & v_2^{(3)} = \frac{y u_4}{y + \tau_1} & & & & & \\ v_1^{(4)} = u_4 & & & & & & \\ & \vdots & & & & & \end{array}$$

Les termes diagonaux : $v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, \dots, v_n^{(1)}, v_{n+1}^{(1)} \dots$ sont les termes de la SFG cherchée : $v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1}$.

D'après la théorie de la k-sommabilité développée par J.P.Ramis [4], reprenant un résultat de Watson, nous avons correspondance entre les résultats suivants :

d'une part :

$$f(x) = \frac{1}{x} \int_d \varphi(t) e^{-t/x} dt$$

d'autre part :

$$\frac{1}{z} f\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n \geq 0} \frac{b_{n+1}}{z(z + t_1) \dots (z + t_n)},$$

où les coefficients b_{n+1} sont définis précédemment, et où la SFG est uniformément convergente dans le demi-plan $Re(ze^{i\theta}) \geq \lambda$ ($\lambda > 0$), à condition que :

$$t_l = l\omega \exp(-i\theta) \quad (l = 1, \dots, n)$$

$\omega \in \mathbf{R}$, $\omega > 0$ tel que $\omega > \omega_0 > 0$.

ω_0 est la valeur critique liée au type de \hat{f} et aux singularités de φ .

La valeur de ω_0 , qui dépend de θ , peut s'évaluer simplement à partir des situations des singularités de φ dans le plan complexe.

La démonstration, d'après Watson, Nörlund, Nevanlinna, de la convergence uniforme de

$$\sum_{n \geq 0} \frac{b_{n+1}^*}{z^*(z^* + \omega) \dots (z^* + n\omega)} \quad \text{où} \quad z^* = z \exp(i\theta)$$

utilise la transformation conforme $s = \exp(-\omega t)$.

L'image réciproque du cercle $\{|1 - s| = 1\}$ est la courbe C constituée des $t = \omega(u + iv)$, où : $u = -\log(2 \cos(v))$, $v \in]-\pi/2, \pi/2[$. L'étude de $\varphi(te^{i\theta})$ dans l'image réciproque U du disque ouvert $\{|1 - s| < 1\}$ est ainsi remplacée par l'étude du développement de Taylor de $\varphi(-\log(s)e^{i\theta}/\omega)$ au centre de ce disque. Ce changement de variable permet d'ailleurs d'écrire la transformée de Laplace sous forme de transformée de Mellin, puis de série de factorielle convergente.

Tout ceci dépend de la condition d'holomorphie de $\varphi(te^{i\theta})$ dans U . La valeur maximale ω_0 de ω est telle que C passe par la première singularité rencontrée de $\varphi(te^{i\theta})$.

Comme nous pouvons localiser les singularités de $\varphi(t)$ dans le plan complexe, nous pouvons donc calculer facilement ω_0 par un algorithme numérique.

Remarque. — Des expériences numériques montrent que la convergence de la SFG est d'autant plus rapide que ω est proche de ω_0 .

5.4. Approximation rationnelle directe

Si nous examinons les séries de factorielles généralisées, nous constatons que l'approximant de type Padé $P_n(x)/Q_n(x)$ de la série formelle $\hat{f}(x)$, où :

$$Q_n(x) = \left(x + \frac{1}{t_1}\right) \left(x + \frac{1}{t_2}\right) \cdots \left(x + \frac{1}{t_n}\right),$$

coïncide formellement avec la somme des $n + 1$ premiers termes de la SFG divisée par x (ou multipliée par $z = 1/x$).

Si $\hat{f}(x)$ n'a qu'une direction singulière, nous pouvons démontrer que, d'une manière plus générale [9], $\frac{1}{x} \int_d \varphi(t) \exp(-t/x) dt$ où d forme avec \mathbf{R}^+ un angle θ et avec $\Sigma(D)$ un angle θ_s supérieur à $\pi/2$, peut être approché indéfiniment quand n tend vers l'infini, pour x fixé, par l'approximant de type Padé $P_m(x)/Q_n(x)$ de $\hat{f}(x)$, où $m = n + j$ ($j \geq 0$) et où nous avons choisi le dénominateur :

$$Q_n(x) = \left(x + \frac{1}{t_1^{(n)}}\right) \left(x + \frac{1}{t_2^{(n)}}\right) \cdots \left(x + \frac{1}{t_n^{(n)}}\right).$$

Les $t_j^{(n)}$ ($j = 1, 2, \dots, n$) sont cette-fois dépendants de n : $t_j^{(n)} = A\tau_j^{(n)} \exp(-i\theta)$;

les $\tau_j^{(n)}$ ($j = 1, 2 \dots n$) sont les racines du polynome de Laguerre $L_n(x)$ de degré n et A est un scalaire $> \frac{1}{2|a \cos(\theta_s)|}$, a étant la singularité de $\varphi(t)$ la plus proche de O .

En pratique, cette approximation rationnelle revient à accumuler, de plus en plus près de l'origine, les racines $-1/t_j$ de Q_n sur $-d$, d'une part si n augmente, mais aussi si d tend vers les positions limites, où d forme un angle de valeur absolue $\pi/2$ avec la direction singulière. Entre ces positions d peut prendre toutes les directions dans le demi-plan complémentaire au demi-plan bissecté par cette direction singulière.

Autrement dit, nous pouvons encore construire une approximation rationnelle de $f(x)$, qui réalise une généralisation du prolongement analytique, en *simulant* la direction singulière par une accumulation de pôles dans cette direction.

L'évaluation de $\psi_1(x^2)$ en $x = 0.15$ donne cette-fois ci : 0.622166.

Soit la fonctionnelle linéaire c telle que :

$$c(1) = a_0, c(x) = a_1, \dots c(x^n) = a_n \dots$$

Un choix de $v(x)$, s'il existe, tel que :

$$c(x^l v(x)) = 0 \quad \text{pour } l = 0, 1 \dots n - 1$$

nous conduit à un choix des $t_l^{(n)}$ ($l = 1, 2, \dots n$) du dénominateur $Q_n(x) = x^n v(1/x)$ tels que l'approximant de type Padé $P_n(x)/Q_n(x)$ devienne l'approximant de Padé tout court.

Malheureusement, dans ce cas, on ne peut plus rien conclure sur la convergence de ces approximants de Padé vers $f(x)$, sauf si la série $\hat{f}(x)$ est du type Stieljes.

Dans le cas de la série d'Euler $1 - 1!x + 2!x^2 \dots$, l'approximant de Padé, construit à partir du dénominateur où $v_n(x)$ est un polynome de Laguerre, converge bien vers la somme $f(x)$ sauf si $x \in \mathbf{R}^-$.

Pour $x = 0.1$, comme dans le paragraphe 3, nous obtenons $f(0.1) = 0.91563333$ avec 8 chiffres significatifs exacts.

Dans les cas où on peut établir la convergence des approximants de Padé vers $f(x)$, on dispose ainsi d'un algorithme formel permettant de calculer cet approximant, alors qu'en 5.3 et 5.4, on dispose d'un algorithme essentiellement numérique.

5.5. Conclusion

Nous constatons que l'évaluation de la fonction $\psi_1(x^2)$ pour $x = 0.15$, par les 3 méthodes décrites, donne un résultat stable sur 3 chiffres significatifs, ce qui peut être considéré comme acceptable en tenant compte de la divergence très forte de $\hat{g}(x)$, donc de $\hat{\psi}_1(x^2)$.

D'ailleurs la seule façon de vérifier la validité des résultats est de confronter, en diverses régions du plan complexe, les valeurs obtenues par différentes méthodes.

Un logiciel complet de sommation de séries divergentes, solutions d'équations différentielles, doit être interactif, et utiliser toutes les ressources données par ces équations, pour analyser les régions de stabilité des différentes méthodes de calcul utilisées, et confronter ces méthodes par recoupement des résultats.

L'outil graphique interactif est alors indispensable et le seul moyen d'avoir une vision d'ensemble (comme dans le logiciel développé par F.Richard-Jung [8]).

Cette analyse est caractérisée par le *contrôle formel*, qui, suivant des choix prévus ou donnés interactivement, engendre les différentes parties numériques.

Bibliographie

- [1] BREZINSKI, C., *Padé-type Approximation and General Orthogonal Polynomials*, Birkhäuser, 1980.
- [2] DELLA-DORA, J., DICRESCENZO, C., TOURNIER, E., *An algorithm to obtain formal solutions of a linear homogenous differential equation at an irregular singular point*, in Calmet, J. (ed.), Springer Lecture Notes in Computer Science (1982).
- [3] MARZIANI, M.F., *Convergence of a class of Borel-Padé-Type Approximants*, Il Nuovo Cimento **99B** (1987).
- [4] RAMIS, J.P., *Les séries k -sommables et leurs applications*, Lecture Notes in Physics vol. 126, Springer, 1980.
- [5] RAMIS, J.P., *Théorèmes d'indice Gevrey pour les équations différentielles ordinaires*, Memoirs Amer. Math. Soc. vol. 48 n° 296, American Mathematical Society, Providence RI, 1984.
- [6] RAMIS, J.P., *Equations différentielles : Phénomène de Stokes et resommation*, C. R. Acad. Sc. Paris, Série 1 **301** (1985).
- [7] RAMIS, J.P., THOMANN, J., *Some comments about the numerical utilization of factorial series*, in Della-Dora, J., Demongeot, J., Lacolle, B. (eds.), *Numerical Methods in the study of critical phenomena*, Springer (1980).
- [8] RICHARD-JUNG, F., *Thèse*, Université de Strasbourg, 1988.
- [9] THOMANN, J., *Resommation des séries formelles solutions d'équations différentielles linéaires ordinaires du second ordre dans le champ complexe au voisinage de singularités irrégulières*, Numer. Math. **58** (1990), 503–535.
- [10] TOURNIER, E., *Solutions formelles d'équations différentielles*, Thèse d'Etat, Université de Grenoble, 1988.

Centre de Calcul du CNRS
BP20 Cro
67037 Strasbourg-Cedex
FRANCE

Séries divergentes de la Mécanique Céleste (problèmes planétaires)

ALAIN CHENCINER

Introduction

La recherche de solutions “quasi-périodiques” des équations qui décrivent le mouvement des planètes, et plus précisément la question de l’existence parmi ces solutions de celle qui nous intéresse tant, ont conduit depuis deux siècles à des expressions approchées, puis formelles, dont la signification est l’objet de la présente causerie.

Ces équations, qui dans l’idéalisation du “Problème des $(n + 1)$ corps” — les planètes et le soleil sont des points matériels strictement régis par la loi de Newton — définissent après fixation du centre de gravité un “système hamiltonien” à $3n$ degrés de liberté (voir le paragraphe 1), ont pour limite lorsque les masses des planètes tendent vers zéro la réunion de n “Problèmes de Kepler” dont les solutions dans le domaine d’énergies pertinent sont des mouvements elliptiques non couplés. Exprimées en termes des proportions d’aires balayées sur chaque ellipse par le segment joignant au soleil la planète correspondante (anomalies moyennes ou longitudes moyennes, voir le paragraphe 2), les solutions du système limite deviennent des fonctions quasi-périodiques du temps ayant n fréquences, éventuellement dépendantes (deuxième loi de Kepler). Il s’agit d’une situation très dégénérée, les solutions quasi-périodiques d’un système hamiltonien à $3n$ degrés de liberté “complètement intégrable” non dégénéré (voir le paragraphe 3) ayant pour la plupart $3n$ fréquences. Cette dégénérescence est levée dans l’approximation suivante dans laquelle on ne tient compte des interactions planétaires qu’en moyenne sur un grand nombre de révolutions tout en oubliant les termes non linéaires en les excentricités et les inclinaisons des ellipses keplériennes. Les solutions ainsi obtenues sont célèbres (mouvements de Laplace-Lagrange, voir le paragraphe 3) : elles fournirent à Laplace la première “preuve” de la stabilité d’un système planétaire. Les nouvelles fréquences, qui lèvent la dégénérescence, sont celles des mouvements “séculaires” des périhélies et des nœuds des ellipses keplériennes.

La relation du système ainsi “moyenné” au système complet des équations de Newton est élucidée dans le paragraphe quatre : au niveau des “séries formelles”, il représente bien une approximation de ce dernier pourvu qu’on ne considère pas les solutions dans lesquelles les fréquences des mouvements keplériens approchés ne

sont pas indépendantes (“résonances en moyens mouvements”). C’est d’ailleurs la proximité d’une telle résonance dans le couple Jupiter-Saturne (le fameux 2 – 5) qui est à l’origine des “inégalités” de leurs mouvements dont l’explication est l’une des plus belles découvertes de Laplace.

Il reste à comprendre les mouvements séculaires au-delà de l’approximation linéaire en excentricités et inclinaisons et à construire des séries — a priori seulement formelles en les masses planétaires — qui définissent les solutions quasi-périodiques recherchées. Cette construction est indiquée dans le paragraphe 5 pour le Problème des trois corps dans le plan que la complète intégrabilité du système séculaire qui lui est associé rend plus simple que le problème général : loin des résonances en moyens mouvements et des résonances séculaires, on obtient des séries formelles en les masses planétaires. Dans le cas général, il faut également effectuer des développements formels en excentricités et inclinaisons.

Tout ceci n’est que formel bien qu’une démonstration de ce fait soit difficile (paragraphe 6). Les arguments de Poincaré montrent que la divergence de ces séries est très probable dans la situation dégénérée qui nous intéresse, et ce bien que l’existence de solutions quasi-périodiques du Problème des trois corps dans le plan soit prouvée par Arnold et que la convergence ait lieu lorsque la non-dégénérescence permet de fixer les fréquences indépendamment des masses planétaires (Moser, Zehnder). De toute façon, les résultats semi-numériques de Jacques Laskar sur deux cents millions d’années indiquent que nous ne sommes probablement pas sur une solution quasi-périodique des équations de Newton.

1. Forme hamiltonienne des équations dans un repère héliocentrique ; approximation keplerienne

Soient m_0, m_1, \dots, m_n les masses, y_0, y_1, \dots, y_n les positions de $n + 1$ corps ponctuels dans l’espace identifié à \mathbf{R}^3 par le choix d’un repère galiléen. Les équations de Newton s’écrivent

$$m_j \frac{d^2 y_j}{dt^2} = \gamma \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \neq j}} \frac{m_j m_k}{|y_j - y_k|^3} (y_k - y_j) \quad (j = 0, \dots, n),$$

où (y_0, \dots, y_n) appartient au complémentaire dans $(\mathbf{R}^3)^{n+1}$ de l’union des *diagonales* d’équations $y_j = y_k$. Définissant les *moments*

$$x_i = m_i \frac{dy_i}{dt},$$

on obtient la forme *hamiltonienne* de ces équations :

$$(\mathcal{H}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_j}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y_j} \\ \frac{dy_j}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_j} \end{array} \right. \quad (j = 0, \dots, n),$$

$$\mathcal{H}(x, y) = \sum_{j=0}^n \frac{|x_j|^2}{2m_j} - \gamma \sum_{0 \leq j < k \leq n} \frac{m_j m_k}{|y_k - y_j|},$$

où l'on a noté

$$\begin{aligned} x &= (x_1, \dots, x_n) \\ x_j &= (x_{j1}, x_{j2}, x_{j3}) \quad (j = 0, \dots, n), \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_j} &= \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_{j1}}, \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_{j2}}, \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_{j3}} \right), \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

\mathcal{H} est le *Hamiltonien* ou énergie totale, somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle.

Introduisons la 2-forme *symplectique standard* sur $\mathbf{R}^{3(n+1)} \times \mathbf{R}^{3(n+1)}$

$$\omega = \sum_{j=0}^n \sum_{k=1}^3 dx_{jk} \wedge dy_{jk},$$

encore notée $\omega = dx \wedge dy$. Les équations (\mathcal{H}) s'écrivent encore

$$\frac{d}{dt}(x_j, y_j) = \left(-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y_j}, \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_j} \right) = \text{grad}_\omega \mathcal{H},$$

où le *gradient symplectique* grad_ω est défini par l'identité, valable pour tout champ de vecteurs X ,

$$\omega(X, \text{grad}_\omega \mathcal{H}) = d\mathcal{H} \cdot X.$$

On comparera bien entendu au gradient *riemannien* défini par

$$\langle X, \text{grad} \mathcal{H} \rangle = d\mathcal{H} \cdot X,$$

dont le gradient symplectique ne diffère que par une rotation de $\pi/2$ dans chaque 2-plan (x_{jk}, y_{jk}) (à condition bien entendu d'avoir choisi le produit scalaire euclidien dans $\mathbf{R}^{6(n+1)}$). La *conservation de l'énergie* par le flot d'un gradient symplectique s'en déduit immédiatement (figure 1, schématique).

De même qu'une isométrie transforme un gradient en gradient, un changement de coordonnées dans \mathbf{R}^{2N}

$$\Phi : (a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N) \longmapsto (p_1, \dots, p_N, q_1, \dots, q_N)$$

qui préserve $\omega : \sum_{i=1}^N da_i \wedge db_i = \sum_{i=1}^N dp_i \wedge dq_i$, transforme le gradient symplectique de $\mathcal{H}(p, q)$ en celui de la fonction correspondante $H = \mathcal{H} \circ \Phi$. Un tel Φ est dit *symplectique* ou *canonique*.

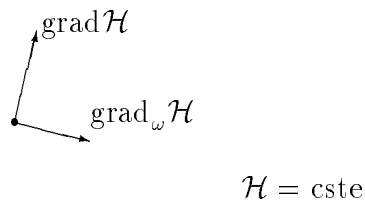


Figure 1

Dans les nouvelles coordonnées, les équations du mouvement conservent donc la forme hamiltonienne.

Tous les changements de coordonnées que nous ferons seront canoniques ; une méthode générale de construction sera donnée dans le paragraphe 4, mais nous commençons par un exemple élémentaire, la *réduction du centre de masse* par les coordonnées *héliocentriques* de Poincaré. Posons

$$\begin{aligned} X_0 &= x_0 + \cdots + x_n, \\ X_j &= x_j \quad (j = 1, \dots, n), \\ Y_0 &= y_0, \\ Y_j &= y_j - y_0 \quad (j = 1, \dots, n). \end{aligned}$$

Le caractère symplectique de la transformation est évident. Puisque

$$\sum_{j=0}^n m_j \frac{d^2 y_j}{dt^2} = 0,$$

on peut choisir le repère galiléen de façon que $X_0 = 0$. On peut alors oublier les variables X_0, Y_0 (réduction) et définir le mouvement des n masses m_1, \dots, m_n (planè-

tes) autour de la masse m_o (soleil) par le système hamiltonien dans \mathbf{R}^{6n}

$$(H) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dX_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y_j} \\ \frac{dY_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x_j} \quad (j = 1, \dots, n), \\ H = H_0 + H_1, \\ H_0(X, Y) = \sum_{j=1}^n \left[\frac{|X_j|^2}{2\mu_j} - \gamma \frac{\mu_j M_j}{|Y_j|} \right], \\ H_1(X, Y) = -\gamma \sum_{1 \leq j < k \leq n} \frac{m_j m_k}{|Y_j - Y_k|} + \sum_{1 \leq j < k \leq n} \frac{X_j \cdot X_k}{m_0}, \end{array} \right.$$

où $\mu_j = m_0 m_j / (m_0 + m_j)$, $M_j = m_0 + m_j$.

Le terme H_0 , encore appelé Hamiltonien *non perturbé* décrit une somme de problèmes à 2 corps (m_0 et m_j) non couplés en coordonnées héliocentriques canoniques ; on peut l'interpréter comme une somme de *problèmes de Kepler* dans lesquels un centre fixe de masse M_j attire une particule mobile de masse μ_j . Nous ne nous intéresserons qu'aux solutions elliptiques de ces problèmes de Kepler.

Si les m_j , $j = 1, \dots, n$, sont beaucoup plus petites que m_0 , ce qu'on supposera, et si les mouvements des planètes restent proches de mouvements circulaires coplanaires de rayons bien distincts, ce qu'on supposera également, le terme H_1 reste au cours du mouvement très inférieur à H_0 . On l'appelle la *fonction perturbatrice* (le premier et le deuxième terme sont appelés respectivement *partie principale* et *partie complémentaire* de la fonction perturbatrice).

2. Variation des constantes

On fabrique des coordonnées avec les diverses *constantes* des mouvements keplériens elliptiques décrits par les solutions de (H_0) , c'est à dire avec les *éléments* des ellipses parcourues ; on complète par des angles paramétrant ces ellipses. Le Hamiltonien non perturbé H_0 prend alors une forme particulièrement simple et résoudre (H) revient à comprendre la *variation des constantes* (à la Lagrange) au cours des mouvements réels : variation de la taille (demi-grand axe), de l'excentricité, de l'inclinaison, précession des nœuds et des périhélie.

Plus précisément, nous utiliserons deux systèmes de coordonnées dûs à Poincaré, qui ont entre eux la relation des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes, à ceci près qu'il s'agit de coordonnées *polaires symplectiques* ($dx \wedge dy = dr \wedge d\theta$) :

$$x = \sqrt{2r} \cos \theta, y = \sqrt{2r} \sin \theta.$$

Issues des classiques *coordonnées de Delaunay*^(*), ces *coordonnées de Poincaré* sont particulièrement bien adaptées à la description des mouvements planétaires proches de mouvements horizontaux et circulaires.

^(*)que l'on peut retrouver en appliquant la *méthode de Hamilton-Jacobi* au problème de Kepler.

Notations : \mathbf{T}^n désigne le tore $(\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z})^n$, produit de n cercles.

Coordonnées de Poincaré cartésiennes :

$$(\Lambda_j, \lambda_j, u_j = \xi_j + i\eta_j, z_j = p_j + iq_j)_{j=1, \dots, n} \in (\mathbf{R}_+)^n \times \mathbf{T}^n \times \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n,$$

Coordonnées de Poincaré polaires :

$$(\Lambda_j, \lambda_j, H_j, h_j, Z_j, \zeta_j)_{j=1, \dots, n} \in (\mathbf{R}_+)^n \times \mathbf{T}^n \times (\mathbf{R}_+)^n \times \mathbf{T}^n \times (\mathbf{R}_+)^n \times \mathbf{T}^n,$$

où l'on a posé

$$\Lambda_j = \sqrt{\gamma} \mu_j \sqrt{M_j} \sqrt{a_j} \quad (a_j = 1/2 \text{ grand axe de la } j^{\text{ème}} \text{ ellipse keplerienne),}$$

$$\lambda_j = \ell_j + g_j + \theta_j \quad (\text{longitude moyenne),}$$

$$H_j = \Lambda_j (1 - \sqrt{1 - e_j^2}),$$

$$Z_j = \Lambda_j \sqrt{1 - e_j^2} (1 - \cos i_j),$$

$$-h_j = g_j + \theta_j \quad (\text{longitude du périhélie),}$$

$$-\zeta_j = \theta_j \quad (\text{longitude du nœud ascendant),}$$

$$u_j = \xi_j + i\eta_j = \sqrt{2H_j} e^{ih_j} = \sqrt{\Lambda_j} e_j (1 + O(e_j^2)) e^{ih_j},$$

$$z_j = p_j + iq_j = \sqrt{2Z_j} e^{i\zeta_j} = \sqrt{\Lambda_j} i_j (1 + O(e_j^2) + O(i_j^2)) e^{i\zeta_j}.$$

Les coordonnées u_j, z_j sont l'avatar symplectique des coordonnées $e_j e^{ih_j}, i_j e^{i\zeta_j}$ utilisées par les astronomes.

Dans l'un ou l'autre des systèmes de coordonnées de Poincaré le Hamiltonien H s'écrit $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 + \mathcal{F}_1$, où

$$\mathcal{F}_0 = \sum_{j=1}^n \left(\frac{-\gamma^2 \mu_j^3 M_j^2}{2\Lambda_j^2} \right),$$

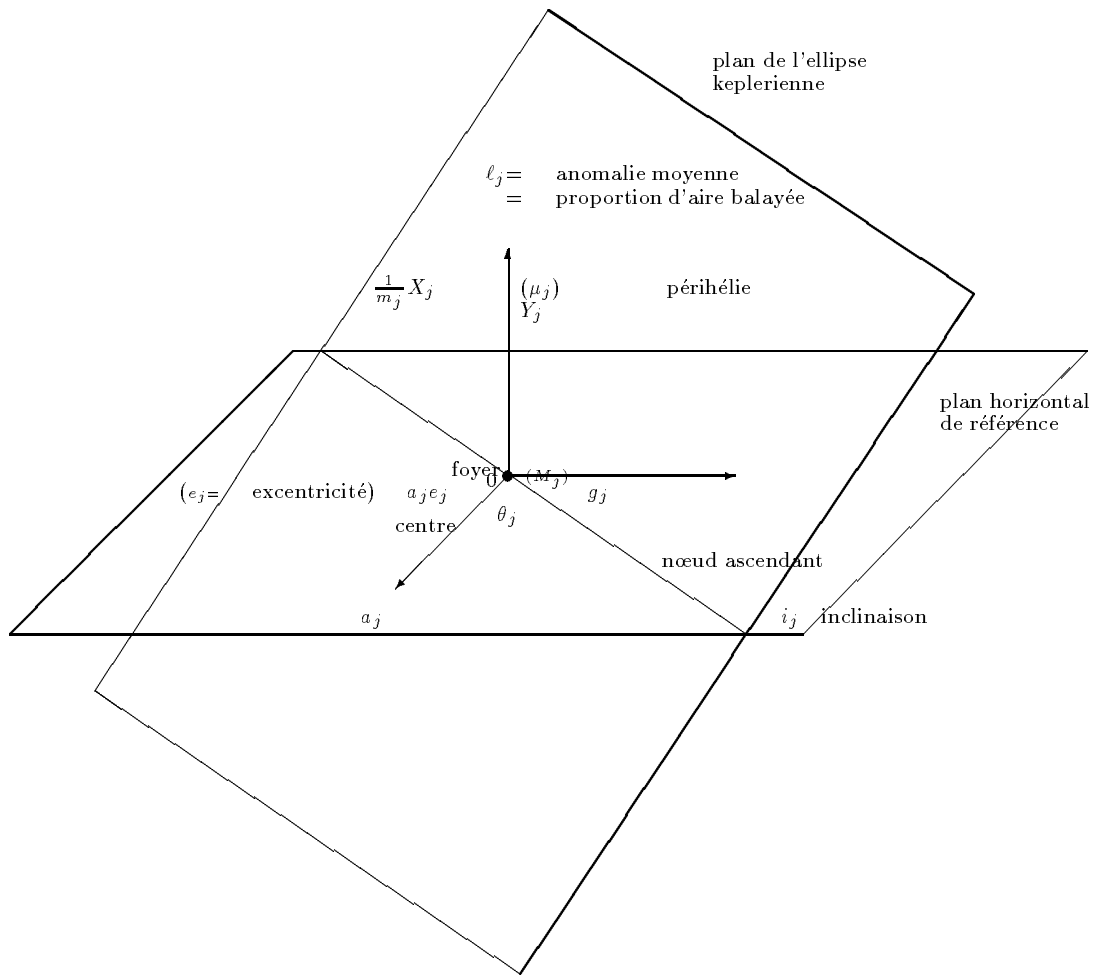


Figure 2

et les équations (H) deviennent

$$(\mathcal{F})_{\text{cart.}} \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\Lambda_j}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda_j}, \\ \frac{d\lambda_j}{dt} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Lambda_j}, \\ \\ \frac{d\xi_j}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \eta_j}, \\ \frac{d\eta_j}{dt} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \xi_j}, \\ \\ \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q_j}, \\ \frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p_j}, \end{array} \right. \quad (j = 1, \dots, n)$$

en coordonnées cartésiennes, et

$$(\mathcal{F})_{\text{pol.}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\Lambda_j}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda_j}, \\ \frac{d\lambda_j}{dt} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Lambda_j}, \\ \\ \frac{dH_j}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial h_j}, \\ \frac{dh_j}{dt} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial H_j}, \\ \\ \frac{dZ_j}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \zeta_j}, \\ \frac{d\zeta_j}{dt} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial Z_j}, \end{array} \right. \quad (j = 1, \dots, n)$$

en coordonnées polaires. Notons que la deuxième famille d'équations de $(\mathcal{F})_{\text{cart.}}$ prend en coordonnées complexes la forme particulièrement agréable

$$\begin{aligned} \frac{du_j}{dt} &= i \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \bar{u}_j} \\ \frac{dz_j}{dt} &= i \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \bar{z}_j}. \end{aligned} \quad (j = 1, \dots, n)$$

Dans les deux cas, les solutions de (\mathcal{F}_0) sont comme on s'y attendait de la forme

$$\begin{aligned} \Lambda_j &= \text{constante}, \\ \lambda_j &= \text{constante} + n_j t \quad (\text{2ème loi de Kepler}), \end{aligned}$$

les autres coordonnées étant constantes, et telles que $n_j^2 a_j^3 = \gamma M_j$ (3ème loi de Kepler).

Les développements en séries que nous avons en vue nous amènent à choisir^(*) un petit paramètre μ qui mesure la *distance* de \mathcal{F} au hamiltonien non perturbé \mathcal{F}_0 . Le plus simple est de poser $m_j = \mu \tilde{m}_j$ où m_o et les \tilde{m}_j , $j = 1, \dots, n$, sont considérés comme $O(1)$, et de choisir de nouvelles coordonnées $(\tilde{\Lambda}_j, \tilde{\lambda}_j, \tilde{u}_j, \tilde{z}_j)$ [*resp.* $(\tilde{\Lambda}_j, \tilde{\lambda}_j, \tilde{H}_j, \tilde{h}_j, \tilde{Z}_j, \tilde{\zeta}_j)$], définies par

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_j &= \frac{1}{\mu} \Lambda_j, \\ \tilde{\lambda}_j &= \lambda_j, \\ (\tilde{u}_j, \tilde{z}_j) &= \frac{1}{\sqrt{\mu}} (u_j, z_j). \end{aligned}$$

^(*)c'est un point faible de cette théorie ; le choix est assez arbitraire.

Ces coordonnées ne conservent la forme symplectique qu'à homothétie près, ce qu'on rétablit en remplaçant \mathcal{F} (qui est d'ordre 1 en μ) par $F = \frac{1}{\mu}\mathcal{F}$, c'est à dire en changeant l'échelle de temps.

Développant F par rapport à μ , on met le Hamiltonien du mouvement des planètes sous la forme de ce que Poincaré nomme "le problème fondamental de la dynamique" :

$$F = F_0 + \mu F_1 + O(\mu^2),$$

où

$$F_0 = \sum_{j=1}^n \left(\frac{-m_0^2 \tilde{m}_j^3}{\tilde{\Lambda}_j^2} \right)$$

(attention, ce n'est $\frac{1}{\mu}\mathcal{F}_0$ qu'à $O(\mu)$ près) et F_1 est somme d'une fonction des $\tilde{\Lambda}_j$ (qui provient de $\frac{1}{\mu}\mathcal{F}_0$) et de la fonction perturbatrice

$$-\gamma \sum_{1 \leq j < k \leq n} \frac{\tilde{m}_j \tilde{m}_k}{|Y_k - Y_j|} + \sum_{1 \leq j < k \leq n} \frac{\tilde{X}_j \cdot \tilde{X}_k}{m_0}$$

écrite dans les nouvelles variables (on a noté $\tilde{X}_j = \frac{1}{\mu}X_j$).

3. Mouvements séculaires dans l'approximation de Laplace

A l'ordre 0 ($\mu = 0$), F se réduit à F_0 qui décrit l'évolution de n mouvements kepleriens indépendants. Dans l'espace des phases de dimension $6n$, chaque courbe intégrale appartient à un tore de dimension n d'équations

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_j &= \text{constante,} \\ \tilde{u}_j &= \text{constante,} \quad (j = 1, \dots, n) \\ \tilde{z}_j &= \text{constante,} \end{aligned}$$

sur lequel les $\tilde{\lambda}_j$ sont coordonnées globales; la restriction à un tel tore du système (F_0) est simplement

$$\frac{d\tilde{\lambda}_j}{dt} = n_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

les fréquences n_j dépendant des constantes choisies. Suivant les rapports de dépendance sur le corps \mathbf{Q} des nombres rationnels des $n_j/2\pi$, l'adhérence de chaque courbe intégrale dans un tore donné est un tore dont la dimension peut varier de 1 (orbite périodique si tous les n_j sont multiples entiers d'une même fréquence) à n (si les $n_j/2\pi$ ($j = 1, \dots, n$) sont indépendants sur \mathbf{Q}). La figure 3 est une représentation grossière de la situation. A l'ordre 1 (oubli des termes $O(\mu^2)$) le problème possède déjà la complexité du cas général mais on peut, comme Laplace et les astronomes à sa suite, considérer le *système moyenné* ou *système séculaire à l'ordre 1*, de Hamiltonien

$$\begin{aligned} F_0 + \mu R &= F_0 + \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbf{T}^n} F_1 d\tilde{\lambda} \\ &= F_0 - \frac{\mu}{(2\pi)^n} \int_{\mathbf{T}^n} \gamma \sum_{1 \leq j < k \leq n} \frac{\tilde{m}_j \tilde{m}_k}{|Y_j - Y_k|} d\tilde{\lambda} \end{aligned}$$

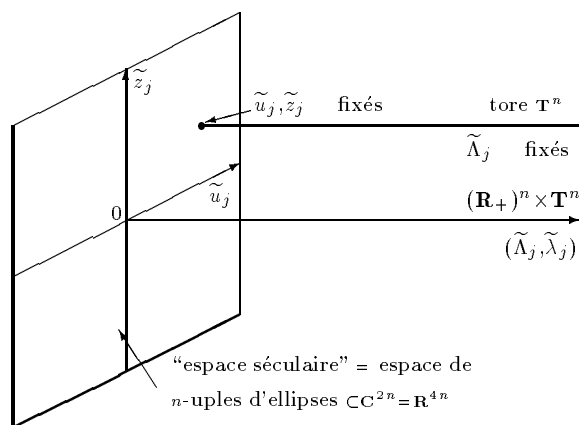


Figure 3 (ordre 0)

dans lequel on ne retient des variations à *courtes périodes* (*i.e.* celles des $\tilde{\lambda}_j$) que leur moyenne* pour s'intéresser exclusivement aux variations à *longues périodes* ou *séculaires* des ellipses keplériennes. Ce système décrit le mouvement sous l'attraction newtonienne de n ellipses massives dont la masse est répartie proportionnellement à l'aire balayée par le rayon vecteur issu du foyer. Il est encore assez compliqué (voir le paragraphe 5) mais si, suivant toujours Laplace, on remplace R par le début $R^{(2)}$ de son développement de Taylor en 0 (*i.e.* aux mouvements horizontaux et circulaires directs) par rapport aux variables \tilde{u}_j, \tilde{z}_j , il devient analysable et c'est sa résolution qui a fourni à Laplace son célèbre théorème sur la *stabilité* du système solaire : d'une part, les $\tilde{\lambda}_j$ n'apparaissant plus dans le Hamiltonien moyenné, *les $\tilde{\Lambda}_j$ sont des constantes du mouvement*; d'autre part, $R^{(2)}$ étant une forme quadratique en les $\tilde{\xi}_j, \tilde{\eta}_j, \tilde{p}_j, \tilde{q}_j$ (dont les coefficients dépendent des constantes $\tilde{\Lambda}_j$), les variations séculaires sont maintenant décrites par un système linéaire sur \mathbf{R}^{4n} (coordonnées $\tilde{\xi}_j, \tilde{\eta}_j, \tilde{p}_j, \tilde{q}_j$) dépendant des $\tilde{\Lambda}_j$. Le contenu du théorème de Laplace est *le caractère purement imaginaire des valeurs propres de ce système linéaire*, d'où l'on déduit la représentation de la figure 4. Dans l'espace des phases, les solutions sont maintenant contenues dans des tores de dimension $3n$ (qui est la moitié de la dimension $6n$ de l'espace des phases, ce n'est pas un hasard !) obtenus en fixant les *actions*

$$\begin{aligned} & \tilde{\Lambda}_j, \\ \widehat{H}_j &= \frac{1}{2} |\widehat{u}_j|^2, \\ \widehat{Z}_j &= \frac{1}{2} |\widehat{z}_j|^2, \end{aligned}$$

où $\widehat{H}_j, \widehat{Z}_j$ sont les analogues de $\widetilde{H}_j, \widetilde{Z}_j$ après un changement de coordonnées linéaire symplectique qui transforme la forme quadratique $R^{(2)}$ en une somme de carrés

*On montre que la moyenne de la partie complémentaire de la fonction perturbatrice est identiquement nulle

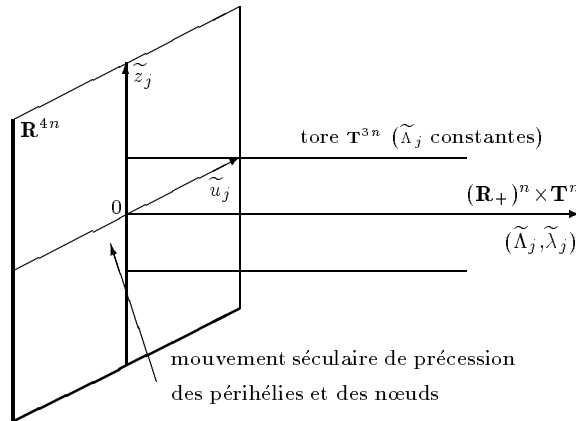


Figure 4 (ordre 1, approximation linéaire)

$\sum_{j=1}^n \alpha_j |\hat{u}_j|^2 + \beta_j |\hat{z}_j|^2$ (passage à une base propre de la matrice qui représente $R^{(2)}$).

[En fait l'adhérence des solutions dans chacun de ces tores est un tore dont la dimension n'excède pas $3n - 1$: la conservation du moment cinétique implique en effet l'existence d'une relation entre les périodes de précession des nœuds qui limite à $2n - 1$ le nombre de fréquences séculaires indépendantes. Sur le plan technique, on se débarrasse de ce problème par une *réduction du moment cinétique* qu'il est inutile de décrire ici].

L'hypothèse la plus optimiste sur les mouvements réels — la “complète intégrabilité” — peut maintenant être avancée : l'espace des phases^(*) serait feuilleté par une famille à $3n$ paramètres de tores invariants de dimension $3n$ et un changement de coordonnées symplectique existerait qui *redresse* ces tores (figure 5). Les ellipses kepleriennes seraient donc animées d'une lente précession des périhélie et des nœuds, accompagnée de variations bornées des demi-grands axes, des excentricités, et des inclinaisons.

Plus précisément, il existerait dans la région de l'espace des phases qui nous intéresse des *coordonnées actions-angles* $(\hat{\Lambda}_j, \hat{\lambda}_j, \hat{H}_j, \hat{h}_j, \hat{Z}_j, \hat{\zeta}_j)_{j=1, \dots, n}$ dans lesquelles les tores en question seraient obtenus en fixant les *actions* $\hat{\Lambda}_j, \hat{\lambda}_j, \hat{H}_j, \hat{Z}_j$ ($j = 1, \dots, n$). Une condition nécessaire et suffisante pour que ceci ait lieu est que, dans les nouvelles coordonnées, le Hamiltonien soit indépendant des angles :

$$\hat{F} = \hat{F}(\hat{\Lambda}_j, \hat{H}_j, \hat{Z}_j).$$

En effet, on aurait

$$0 = \frac{d\hat{\Lambda}_j}{dt} = -\frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{\lambda}_j}, \text{ etc.}$$

^(*)plus précisément le complémentaire d'une réunion d'hypersurfaces, elle-même feuilletée par des tores de dimension inférieure à $3n$.

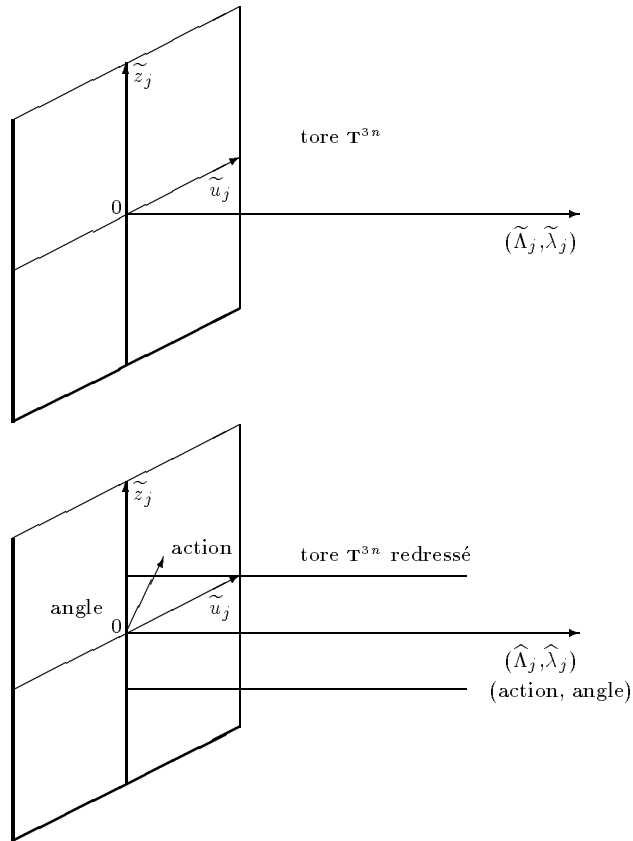


Figure 5

mais alors les fréquences

$$\hat{n}_j = \frac{d\hat{\lambda}_j}{dt} = \frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{\Lambda}_j}$$

resteraient constantes au cours du mouvement, qui serait donc *quasi-périodique*.

Si de plus la transformation des $\tilde{\Lambda}_j, \tilde{H}_j, \tilde{Z}_j, \tilde{\lambda}_j, \tilde{h}_j, \tilde{\zeta}_j$ aux $\hat{\Lambda}_j, \hat{H}_j, \hat{Z}_j, \hat{\lambda}_j, \hat{h}_j, \hat{\zeta}_j$ était analytique* et dépendait analytiquement du petit paramètre μ , les solutions de (F)

*Ceci ne peut se produire pour les coordonnées sous forme polaire que si le tore qui nous intéresse correspond à des mouvements suffisamment différents des mouvements circulaires et horizontaux (excentricités et inclinaisons ne doivent pas être trop petites par rapport aux masses)

seraient données par des *séries de Lindstedt*

$$(L) \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\Lambda}_j = \tilde{\Lambda}_j^0 + \sum_{k \geq 1} \mu^k \Phi_{j,k} \left(\tilde{\lambda}_j^0 + n_j(\mu)t, \tilde{h}_j^0 + m_j(\mu)t, \tilde{\zeta}_j^0 + \kappa_j(\mu)t \right), \\ \tilde{\lambda}_j = \tilde{\lambda}_j^0 + n_j(\mu)t + \sum_{k \geq 1} \mu^k \varphi_{j,k} \left(\tilde{\lambda}_j^0 + n_j(\mu)t, \tilde{h}_j^0 + m_j(\mu)t, \tilde{\zeta}_j^0 + \kappa_j(\mu)t \right), \\ \tilde{H}_j = \tilde{H}_j^0 + \sum_{k \geq 1} \mu^k \Psi_{j,k} \left(\tilde{\lambda}_j^0 + n_j(\mu)t, \tilde{h}_j^0 + m_j(\mu)t, \tilde{\zeta}_j^0 + \kappa_j(\mu)t \right), \\ \tilde{h}_j = \tilde{h}_j^0 + m_j(\mu)t + \sum_{k \geq 1} \mu^k \psi_{j,k} \left(\tilde{\lambda}_j^0 + n_j(\mu)t, \tilde{h}_j^0 + m_j(\mu)t, \tilde{\zeta}_j^0 + \kappa_j(\mu)t \right), \\ \tilde{Z}_j = \tilde{Z}_j^0 + \sum_{k \geq 1} \mu^k \Theta_{j,k} \left(\tilde{\lambda}_j^0 + n_j(\mu)t, \tilde{h}_j^0 + m_j(\mu)t, \tilde{\zeta}_j^0 + \kappa_j(\mu)t \right), \\ \zeta_j = \tilde{\zeta}_j^0 + \kappa_j(\mu)t + \sum_{k \geq 1} \mu^k \theta_{j,k} \left(\tilde{\lambda}_j^0 + n_j(\mu)t, \tilde{h}_j^0 + m_j(\mu)t, \tilde{\zeta}_j^0 + \kappa_j(\mu)t \right), \end{array} \right.$$

où les $\Phi_{j,k}$, $\varphi_{j,k}$ etc. sont des fonctions analytiques sur le tore \mathbf{T}^{3n} et où les différentes fréquences $n_j(\mu), \dots$, sont analytiques en μ et en les constantes $\tilde{\Lambda}_j^0, \tilde{H}_j^0, \tilde{Z}_j^0$, et vérifient $m_j(0) = \kappa_j(0) = 0$.

[En développant ces expressions par rapport à μ et en regroupant les termes correspondant à une même puissance de μ , ce qu'on se gardera bien de faire, on obtiendrait les développements classiques des astronomes contenant des termes *séculaires* t^a ou $t^a \sin bt$, qui proviennent du développement de termes du type $\sin(\alpha + \mu\omega t)$].

Nous allons voir qu'au niveau formel, des solutions quasi-périodiques données par de telles séries existent, mais qu'il y a très certainement *divergence*.

Dans le cas du problème plan des 3 corps ($n = 2$), les développements en série se font comme ci-dessus par rapport au seul paramètre μ qui caractérise le rapport des masses planétaires à la masse du soleil. Dès que l'on aborde le problème de $n + 1 \geq 3$ corps dans l'espace ou de $n + 1 \geq 4$ corps dans le plan, il faut également effectuer des développements formels par rapport aux excentricités et aux inclinaisons des ellipses keplériennes.

4. Elimination des longitudes moyennes

Comme premier pas dans la construction de séries de Lindstedt, nous élucidons dans ce paragraphe le rôle du système moyenné ($F_0 + \mu R$).

Voici les notations allégées que nous utiliserons ** :

$$\begin{aligned} \Lambda &= (\tilde{\Lambda}_j)_{j=1, \dots, n} \in \mathbf{R}^n, \\ \lambda &= (\tilde{\lambda}_j)_{j=1, \dots, n} \in \mathbf{T}^n, \\ \xi &= ((\tilde{\xi}_j)_{j=1, \dots, n}, (\tilde{p}_j)_{j=1, \dots, n}) \in \mathbf{R}^{2n}, \end{aligned}$$

** On notera que (ξ, η) varie dans un certain domaine borné Δ de $\mathbf{R}^{2n} \times \mathbf{R}^{2n}$.

$$\begin{aligned}\eta &= ((\tilde{\eta}_j)_{j=1,\dots,n}, (\tilde{q}_j)_{j=1,\dots,n}) \in \mathbf{R}^{2n}, \\ F_{(\mu)} &= F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \dots\end{aligned}$$

Cherchons une famille (dépendant de μ) de difféomorphismes

$$\Phi_\mu : (\Lambda', \lambda', \xi', \eta') \longmapsto (\Lambda, \lambda, \xi, \eta)$$

telle que

$$\begin{cases} (i) & d\Lambda \wedge d\lambda + d\xi \wedge d\eta - (d\Lambda' \wedge d\lambda' + d\xi' \wedge d\eta') = 0, \\ (ii) & F_{(\mu)}(\Lambda, \lambda, \xi, \eta) = F'_{(\mu)}(\Lambda', \xi', \eta'), \end{cases}$$

où $F'_{(\mu)}$ est une fonction *indépendante des angles* λ' (i.e. ayant les mêmes symétries que $F_0 + \mu R$). La condition (i), qui exprime que Φ_μ est symplectique, s'écrit encore

$$d(\Lambda \cdot d\lambda + \xi \cdot d\eta + \lambda' \cdot d\Lambda' + \eta' \cdot d\xi') = 0,$$

où les points \cdot désignent le produit scalaire euclidien, et il suffit pour la remplir de trouver une famille de *fonctions génératrices* $S_{(\mu)}(\Lambda', \lambda, \xi', \eta)$ telles que

$$dS_{(\mu)} = \Lambda \cdot d\lambda + \xi \cdot d\eta + \lambda' \cdot d\Lambda' + \eta' \cdot d\xi',$$

c'est à dire

$$\begin{aligned}\frac{\partial S_{(\mu)}}{\partial \lambda} &= \Lambda, \\ \frac{\partial S_{(\mu)}}{\partial \eta} &= \xi, \\ \frac{\partial S_{(\mu)}}{\partial \Lambda'} &= \lambda', \\ \frac{\partial S_{(\mu)}}{\partial \xi'} &= \eta'.\end{aligned}$$

On traite ici les composantes de λ comme des nombres réels et on exige que les dérivées partielles ci-dessus soient périodiques en ces variables. On exige de plus que la matrice de dérivées secondes mixtes $\frac{\partial^2 S_{(\mu)}}{\partial a' \partial b}$ (où $a' \in (\Lambda', \xi')$, $b \in (\lambda, \eta)$) soit inversible, ce qui permet de déterminer Φ_μ par application du théorème des fonctions implicites. Enfin, puisque le Hamiltonien $F_{(0)} = F_0$ ne dépend que des variables Λ , on peut se restreindre aux Φ_μ de la forme Identité $+O(\mu)$. Une fonction génératrice de l'Identité étant évidemment $\Lambda' \cdot \lambda + \xi' \cdot \eta$, on cherchera $S_{(\mu)}$ sous la forme d'un développement formel en μ

$$S_{(\mu)}(\Lambda', \lambda, \xi', \eta) = \Lambda' \cdot \lambda + \xi' \cdot \eta + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k S_k(\Lambda', \lambda, \xi', \eta),$$

dans lequel les conditions de périodicité imposent que

$$S_k(\Lambda', \lambda, \xi', \eta) = \alpha_k \cdot \lambda + s_k(\Lambda', \lambda, \xi', \eta)$$

où $\alpha_k \in \mathbf{R}^n$ et s_k est périodique en λ .

Quant à la condition (ii), c'est une *équation de Hamilton-Jacobi*

$$F_{(\mu)}\left(\frac{\partial S_{(\mu)}}{\partial \lambda}, \lambda, \frac{\partial S_{(\mu)}}{\partial \eta}, \eta\right) = F'_{(\mu)}(\Lambda', \xi', \frac{\partial S_{(\mu)}}{\partial \xi'})$$

dans laquelle les actions Λ' apparaissent comme des paramètres.

Posons $F'_{(\mu)} = F'_0 + \mu F'_1 + \mu^2 F'_2 + \dots$

L'identification des termes d'ordre 0 en μ donne simplement

$$F_0(\Lambda') = F'_0(\Lambda', \xi', \eta'),$$

celle des termes d'ordre 1

$$\frac{\partial F_0}{\partial \Lambda}(\Lambda') \cdot \frac{\partial S_1}{\partial \lambda}(\Lambda', \lambda, \xi', \eta) + F_1(\Lambda', \lambda, \xi', \eta) = F'_1(\Lambda', \xi', \eta).$$

Egalant les valeurs moyennes sur \mathbf{T}^n (coordonnées λ) des deux membres, on voit que

$$F'_1(\Lambda', \xi', \eta') = R(\Lambda', \xi', \eta') + \frac{\partial F_0}{\partial \Lambda}(\Lambda') \cdot \alpha_1;$$

si le problème posé a une solution, on a donc nécessairement

$$F'_{(\mu)}(\Lambda', \xi', \eta') = F_0(\Lambda') + \frac{\partial F_0}{\partial \Lambda}(\Lambda') \cdot \alpha_1 + \mu R(\Lambda', \xi', \eta') + O(\mu^2),$$

qui, au terme (arbitraire) près en α_1 et modulo les termes d'ordre 2 et plus en μ , n'est autre que le système moyenné.

Pour montrer l'existence de S_1 il est naturel de développer les fonctions en séries de Fourier relativement aux variables λ : la fonction

$$s_1(\Lambda', \lambda, \xi', \eta) = \sum_{h=(h_1, \dots, h_n) \in \mathbf{Z}^n - \{0\}} \sigma_h(\Lambda', \xi', \eta) e^{ih \cdot \lambda}$$

est déterminée à partir de

$$F_1(\Lambda, \lambda, \xi, \eta) - R(\Lambda, \xi, \eta) = \sum_{h \in \mathbf{Z}^n - \{0\}} f_h(\Lambda, \xi, \eta) e^{ih \cdot \lambda}$$

par les identités

$$\sigma_h(\Lambda', \xi', \eta) = -\frac{f_h(\Lambda', \xi', \eta)}{ih \cdot \frac{\partial F_0}{\partial \Lambda}(\Lambda')}.$$

Les coefficients de la série de Fourier d'une fonction analytique décroissant plus vite qu'une puissance arbitraire de $|h| = h_1 + \dots + h_n$, la série de Fourier de s_1 définira une fonction analytique tant que la croissance des *petits dénominateurs* $h \cdot \frac{\partial F_0}{\partial \Lambda}(\Lambda')$ sera polynomiale en $|h|$, c'est à dire tant que Λ' appartiendra à l'un des sous-ensembles $D'_{\gamma, \nu}$ du domaine de définition $D' \subset \mathbf{R}^n$ de Λ' , définis par

$$D'_{\gamma, \nu} = \left\{ \Lambda' \in D', \forall h \in \mathbf{Z}^n - \{0\} \left| h \cdot \frac{\partial F_0}{\partial \Lambda}(\Lambda') \right| \geq \frac{\gamma}{|h|^\nu} \right\}.$$

Les fréquences $\omega_0(\Lambda') = \frac{\partial F_0}{\partial \Lambda}(\Lambda')$ sont celles des mouvements keplériens non perturbés décrits par F_0 , et l'appartenance à $D'_{\gamma,\nu}$ signifie que l'on ne s'approche pas trop des *résonances en moyens mouvements*, c'est à dire des commensurabilités entre les périodes de ces n mouvements keplériens.

Nous avons donc montré l'existence d'un *changement de coordonnées* symplectique de la forme Identité + $O(\mu)$ qui, à l'ordre deux près en μ , transforme $F_{(\mu)}$ en le système moyenné $F_0 + \mu R$, à ceci près cependant que cette transformation

$$(\Lambda', \lambda', \xi', \eta') \longmapsto (\Lambda, \lambda, \xi, \eta)$$

n'est définie que *suffisamment* loin des résonances en moyens mouvements, c'est à dire pour Λ' appartenant à un sous-ensemble de Cantor de \mathbf{R}^n . Cette dernière restriction n'étonnera pas le lecteur attentif qui aura noté l'analogie existant avec le phénomène de la résonance mécanique : certaines configurations des planètes se répétant périodiquement, de petits effets s'ajoutent à l'infini et font exploser les coefficients de Fourier de la transformation.

Revenant aux variables initiales, on voit qu'à la constance de Λ' le long des solutions de $(F_0 + \mu R)$ peuvent correspondre des oscillations de Λ d'autant plus grandes que l'on s'approche d'une résonance en moyens mouvements. Ces variations des demi-grands axes s'accompagnent d'*inegalités* sur les longitudes moyennes, dont la plus célèbre, découverte par Laplace, a une période d'environ 900 ans et provient de la petitesse de la combinaison

$$2 \times (\text{période de Saturne}) - 5 \times (\text{période de Jupiter})$$

(à titre de comparaison, la période de Jupiter est d'environ 12 ans).

Il est temps de remarquer que lorsque certaines variables habitent un ensemble de Cantor, la notion de changement de coordonnées pose quelques problèmes. Ne serait-ce que pour donner un sens à la formule

$$\lambda = \lambda' - \mu \frac{\partial S_1}{\partial \Lambda'} + O(\mu^2),$$

on a besoin de pouvoir dériver par rapport aux variables Λ' . Effectuant cette dérivation sur l'équation qui définit S_1 , on constate que la série de Fourier de chacune des dérivées partielles $\partial S_1 / \partial \Lambda'$ peut être calculée (par récurrence sur l'ordre de dérivation), ce qui donne au changement de coordonnées ainsi déterminé le statut de *jet d'ordre infini* de difféomorphisme le long de $D'_{\gamma,\nu} \times \mathbf{T}^n \times \mathbf{R}^{2n} \times \mathbf{R}^{2n}$ (cela signifie simplement que les dérivées par rapport à **toutes** les variables $\Lambda', \lambda', \xi', \eta'$ sont définies en tout point).

Exercice : Poursuivre le processus à tous les ordres en μ et obtenir une transformation Φ_μ sous la forme d'une série formelle en μ dont les coefficients sont définis ainsi que leurs dérivées le long d'un domaine $D'_{\gamma,\nu} \times \mathbf{T}^n \times \Delta'$, qui rende indépendant des angles λ' le Hamiltonien $F'_{(\mu)}$.

Ce dernier peut être appelé *système séculaire d'ordre infini*. On notera que contrairement au système séculaire d'ordre 1, c'est à dire au système moyenné, il n'est pas défini au voisinage des fréquences Λ' qui correspondent à des *résonances en moyens mouvements*.

5. Elimination des longitudes des nœuds et des périhélie, séries de Lindstedt

Considérons tout d'abord le problème des trois corps dans le plan. Ce cas est particulier en ce que la conservation du moment cinétique suffit, pour des raisons de dimension, à forcer l'*intégrabilité complète* du système moyenné. Autrement dit, le discours tenu dans le paragraphe 3 sur le système linéarisé ($F_0 + \mu R^{(2)}$) peut l'être sur le système moyenné ($F_0 + \mu R$) lui-même.

La différence essentielle entre les deux est l'apparition de *torsion* : le paramètre Λ étant fixé les fréquences des mouvements appartenant à un tore invariant dans l'espace \mathbf{R}^{4n} (coordonnées ξ, η) dépendent *effectivement* du tore considéré, contrairement à ce qui se passe dans le cas linéaire [pour qu'il n'en soit pas ainsi, il eût fallu que de miraculeuses identités soient satisfaites ; qu'elles ne le sont pas a été montré par Arnold en 1961 dans sa tentative de preuve de la stabilité du système solaire].

Il est alors possible (exercice demandant un peu de réflexion) d'introduire des coordonnées que nous noterons $(\Lambda, \lambda, \rho, \omega)$ sur l'espace des phases*, telles que le Hamiltonien

$$F_{(\mu)}(\Lambda, \lambda, \rho, \omega) = F_0(\Lambda) + \mu F_1(\Lambda, \lambda, \rho, \omega) + \dots$$

ait une moyenne

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbf{T}^n} F_1(\Lambda, \lambda, \rho, \omega) d\lambda = R(\Lambda, \rho)$$

indépendante des angles ω . Dans de telles coordonnées, l'existence de torsion se traduit par l'inversibilité de la matrice de dérivées partielles $\frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2}(\Lambda, \rho)$.

On peut alors reprendre les calculs du paragraphe précédent, en cherchant maintenant un difféomorphisme

$$\Phi_\mu : (\Lambda', \lambda', \rho', \omega') \mapsto (\Lambda, \lambda, \rho, \omega),$$

de fonction génératrice

$$S_{(\mu)}(\Lambda', \lambda, \rho', \omega) = \Lambda' \cdot \lambda + \rho' \cdot \omega + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k S_k(\Lambda', \lambda, \rho', \omega),$$

qui au lieu de (ii) vérifie

$$(iii) \quad F_{(\mu)}(\Lambda, \lambda, \xi, \eta) = F'_{(\mu)}(\Lambda', \rho'),$$

* qui est maintenant de dimension $4n$ et non $6n$ (problème plan : on oublie les variables \tilde{Z} et $\tilde{\zeta}$)

où $F'_{(\mu)}$ est une fonction indépendante de **tous** les angles λ', ω' (*i.e.* ayant les mêmes symétries que $F_0 + \mu R$). A l'ordre 0 en μ on obtient comme précédemment

$$F'_{(0)}(\Lambda', \rho') = F_0(\Lambda');$$

à l'ordre 1, on a de même

$$\frac{\partial F_0}{\partial \Lambda}(\Lambda') \cdot \frac{\partial S_1}{\partial \lambda}(\Lambda', \lambda, \rho', \omega) + F_1(\Lambda', \lambda, \rho', \omega) = F'_1(\Lambda', \rho'),$$

dont les solutions, si $\Lambda' \in D'_{\gamma, \nu}$, sont de la forme

$$S_1(\Lambda', \lambda, \rho', \omega) = \alpha_i \cdot \lambda + \beta_1 \cdot \omega + \tilde{s}_1(\Lambda', \lambda, \rho', \omega) + t_1(\Lambda', \rho', \omega),$$

où $\alpha_1 \in \mathbf{R}^n, \beta_1 \in \mathbf{R}^n$, et la fonction t_1 sont arbitraires, et \tilde{s}_1 est uniquement déterminée ainsi que ses dérivées par rapport aux Λ' .

De plus on a nécessairement

$$\frac{\partial F_0}{\partial \Lambda}(\Lambda') \cdot \alpha_1 + R(\Lambda', \rho') = F'_1(\Lambda', \rho').$$

L'identification des termes d'ordre 2 en μ donne (avec des notations évidentes)

$$\begin{aligned} F'_2(\Lambda', \rho') &= \\ &= \frac{\partial F_0}{\partial \Lambda}(\Lambda') \cdot \frac{\partial S_2}{\partial \lambda}(\Lambda', \lambda, \rho', \omega) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_0}{\partial \Lambda^2}(\Lambda') \cdot \left(\frac{\partial S_1}{\partial \lambda}(\Lambda', \lambda, \rho', \omega) \right)^2 \\ &+ \frac{\partial F_1}{\partial \Lambda}(\Lambda', \lambda, \rho', \omega) \cdot \frac{\partial S_1}{\partial \lambda}(\Lambda', \lambda, \rho', \omega) + \frac{\partial F_1}{\partial \rho}(\Lambda', \lambda, \rho', \omega) \cdot \frac{\partial S_1}{\partial \omega}(\Lambda', \lambda, \rho', \omega) \\ &+ F_2(\Lambda', \lambda, \rho', \omega). \end{aligned}$$

Si l'on groupe sous la dénomination $\Phi_2(\Lambda', \lambda, \rho', \omega)$ les termes déjà déterminés, on obtient après avoir posé

$$S_k(\Lambda', \lambda, \rho', \omega) = \alpha_k \cdot \lambda + \beta_k \cdot \omega + s_k(\Lambda', \lambda, \rho', \omega)$$

où s_k est périodique en les angles λ et ω , l'équation

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F_0}{\partial \Lambda}(\Lambda') \cdot \frac{\partial s_2}{\partial \lambda}(\Lambda', \lambda, \rho', \omega) + \frac{\partial F_1}{\partial \rho}(\Lambda', \lambda, \rho', \omega) \cdot \frac{\partial t_1}{\partial \omega}(\Lambda', \rho', \omega) + \Phi_2(\Lambda', \lambda, \rho', \omega) \\ &= F'_2(\Lambda', \rho') - \frac{\partial F_0}{\partial \Lambda}(\Lambda') \cdot \alpha_2 - \frac{\partial F_1}{\partial \rho}(\Lambda', \lambda, \rho', \omega) \cdot \beta_1, \end{aligned}$$

qui intégrée sur les angles λ devient

$$\begin{aligned} &\frac{\partial R}{\partial \rho}(\Lambda', \rho') \cdot \frac{\partial t_1}{\partial \omega}(\Lambda', \rho', \omega) + \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbf{T}^n} \Phi_2(\Lambda', \lambda, \rho', \omega) d\lambda \\ &= F'_2(\Lambda', \rho') - \frac{\partial F_0}{\partial \Lambda}(\Lambda') \cdot \alpha_2 - \frac{\partial R}{\partial \rho}(\Lambda', \rho') \cdot \beta_1. \end{aligned}$$

Si l'on est suffisamment loin des *résonances séculaires**, c'est à dire si

$$(\Lambda', \rho') \in \Delta'_{\gamma, \nu} = \left\{ (\Lambda', \rho'), \forall \ell \in \mathbf{Z}^n - \{0\}, \left| \ell \cdot \frac{\partial R}{\partial \rho}(\Lambda', \rho') \right| \geq \frac{\gamma}{|\ell|^\nu} \right\},$$

on détermine t_1 analytique en ω (et ses dérivées par rapport aux variables Λ', ρ'). L'équation non moyennée fournit alors s_2 à une fonction $t_2(\Lambda', \rho', \omega)$ près et la moyenne par rapport à tous les angles λ, ω donne

$$F'_2(\Lambda', \rho') = \frac{\partial F_0}{\partial \Lambda}(\Lambda') \cdot \alpha_2 + \frac{\partial R}{\partial \rho}(\Lambda', \rho') \cdot \beta_1 + R_2(\Lambda', \rho'),$$

où

$$R_2(\Lambda', \rho') = \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \int_{\mathbf{T}^n \times \mathbf{T}^n} \Phi_2(\Lambda', \lambda, \rho', \omega) d\lambda d\omega.$$

Les étapes suivantes sont identiques et fournissent entre les α_j , les β_j , et les $F'_k(\Lambda', \rho')$ les relations

$$F'_k(\Lambda', \rho') = \frac{\partial F_0}{\partial \Lambda}(\Lambda') \cdot \alpha_k + \frac{\partial R}{\partial \rho}(\Lambda', \rho') \cdot \beta_{k-1} + R_j(\Lambda', \rho'),$$

où $R_j(\Lambda', \rho')$ dépend du choix que l'on a fait des $\alpha_i, i \leq k-1$, et des $\beta_i, i \leq k-2$.

Maintenant, on voit par un calcul explicite que la matrice des dérivées partielles $\frac{\partial^2 F_0}{\partial \Lambda^2}(\Lambda')$ est inversible. Jointe à l'inversibilité déjà évoquée de la matrice $\frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2}(\Lambda', \rho')$ (existence de *torsion*), cette propriété montre que l'application des actions dans les fréquences

$$(\Lambda, \rho) \mapsto \left(\frac{\partial F_0}{\partial \Lambda}(\Lambda), \frac{\partial R}{\partial \rho}(\Lambda, \rho) \right)$$

est un difféomorphisme local au voisinage de tout point (Λ_0, ρ_0) . Le théorème des fonctions implicites montre alors qu'on peut choisir les α_k et les β_k (dépendant de $(\Lambda_0, \rho_0) \in D'_{\gamma, \nu} \cap \Delta'_{\gamma, \nu}$!!!) de façon à annuler les $\frac{\partial F'_k}{\partial \Lambda^k}(\Lambda_0, \rho_0)$ pour $k \geq 1$ et les $\frac{\partial F'_k}{\partial \rho^k}(\Lambda_0, \rho_0)$ pour $k \geq 2$. On obtient ainsi des séries de Lindstedt, pour les mouvements de 3 corps dans le plan, dont les fréquences $(n_j(\mu), m_j(\mu))$ sont de la forme $(\frac{\partial F_0}{\partial \Lambda}(\Lambda_0), \mu \frac{\partial R}{\partial \rho}(\Lambda_0, \rho_0))$.

Remarque. — Nous avons déjà noté que de telles séries décrivent des mouvements (formels) quasi-périodiques dans lesquels les excentricités des ellipses kepleiennes associées restent bornées inférieurement par une constante dépendant du paramètre de masse μ . Pour décrire les mouvements très voisins de mouvements circulaires, un *changement d'origine* est nécessaire, qui remplace le tore de dimension deux d'équations $\xi = \eta = 0$, invariant par le système moyenné, par un tore de dimension deux invariant par le système $F_{(\mu)}$ lui-même. Un tel tore existe et correspond

* *i.e.* des commensurabilités entre les périodes des divers périhélics (rappelons qu'il s'agit du problème des 3 corps ($n = 2$) dans le plan).

après réduction (c'est à dire après passage au quotient par le groupe des rotations du plan) à ce que Poincaré a appelé une *orbite périodique de première espèce* : les planètes décrivent autour du soleil des orbites presque circulaires et se retrouvent au bout d'une période dans la même situation à une rotation près.

S'il y a au moins quatre corps, ou s'il s'agit du problème dans l'espace, le système moyenné n'a plus de raison d'être *complètement intégrable*. Il l'est cependant à l'origine $\xi = \eta = 0$, c'est à dire dans un voisinage infinitésimal des mouvements circulaires directs et horizontaux, pourvu que les valeurs propres du système linéaire ($R^{(2)}$) vérifient des conditions de *non-résonance* (théorie de Birkhoff). Il est donc impossible d'écrire des séries de Lindstedt qui correspondent à des *fréquences séculaires* $\mu \frac{\partial R}{\partial \rho}(\Lambda_0, \rho_0)$ déterminées : ces dernières ne sont plus données que comme des séries formelles, non seulement en μ , mais également en excentricités et inclinaisons, et ce sont de tels développements qui doivent être manipulés. Quant aux mouvements formels ainsi décrits, on notera qu'ils sont du type de ceux évoqués dans la remarque précédente.

6. Divergence des séries de Lindstedt

C'est (au "M." près devant le nom propre) le titre du chapitre XIII des *Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*.

Affirmation centrale à laquelle conduit tout l'ouvrage et pourtant affirmation non mathématiquement démontrée...

Reprenons le problème des trois corps dans le plan et fixons $(\Lambda_0, \rho_0) \in D'_{\gamma, \nu} \cap \Delta'_{\gamma, \nu}$. Si les séries correspondant à cette valeur des *actions* convergent, elles décrivent des solutions quasi-périodiques dont l'ensemble (pour toutes les valeurs des angles initiaux) remplit un tore \mathcal{T}_μ de dimension 4 invariant par le système ($F_{(\mu)}$). Lorsque μ varie, ce tore varie continûment ainsi que les fréquences

$$\left(\frac{\partial F_0}{\partial \Lambda}(\Lambda_0), \mu \frac{\partial R}{\partial \rho}(\Lambda_0, \rho_0) \right)$$

des solutions qu'il contient. Il existe donc une infinité de valeurs de μ arbitrairement proches de 0 pour lesquelles ces fréquences sont *résonantes* : le tore \mathcal{T}_μ est alors feuilleté par une famille de tores invariants de dimension inférieure. Une précaution est nécessaire à ce point : à cause de l'invariance du problème par rotations, **chacun** des tores \mathcal{T}_μ est feuilleté par des tores invariants de dimension trois, ces tores étant eux-mêmes feuilletés par des tores invariants de dimension deux pour les valeurs *résonantes* de μ .

On se débarrasse de ce problème en considérant le problème *réduit* dans lequel les deux arguments des périhélie des planètes fictives sont remplacés par leur seule différence. Le nombre de degrés de liberté passe ainsi de quatre à trois, les tores invariants \mathcal{T}_μ ont maintenant la dimension trois (deux fréquences rapides $\omega_0 = \frac{\partial F_0}{\partial \Lambda}(\Lambda_0)$, une fréquence lente $\mu\omega_1$) et sont feuilletés par des tores invariants de dimension deux pour les valeurs *résonantes* de μ . Mais l'existence de telles familles continues de

tores invariants de dimension deux remplissant un tore de dimension trois est un phénomène tout à fait exceptionnel. Il ne se produit le plus souvent que forcé comme ci-dessus par une symétrie des équations, c'est à dire par une *intégrale première* (ci-dessus, le moment cinétique). Mais l'inexistence pour le problème des trois corps de telles intégrales premières autres que celles, classiques, de l'énergie, du centre de masse, et du moment cinétique, a été prouvée par Bruns dans le cadre algébrique et par Poincaré dans le cadre analytique (pour ce dernier dans un sens assez faible, il est vrai, puisque seules sont envisagées les intégrales premières dépendant analytiquement du paramètre μ). C'est ce qu'on appelle la *non-intégrabilité* du Problème des trois corps. La démonstration de Poincaré repose sur un examen approfondi du développement de Fourier de la fonction perturbatrice. Elle constitue le cœur du premier volume des *Méthodes Nouvelles*.

Malheureusement la non-intégrabilité ne suffit pas directement à assurer la divergence des séries de Lindstedt, bien qu'elle rende celle-ci très probable pour la plupart des fréquences $(\omega_0, \mu\omega_1)$: les hypothétiques tores \mathcal{T}_μ feuilletés par des tores invariants de dimension deux ont en effet toutes les chances d'être remplacés chacun par un nombre fini de tores invariants de dimension deux.

Il n'est même pas prouvé, bien qu'infiniment probable, que la non-intégrabilité soit incompatible avec la convergence, pour des fréquences diophantiennes ω_0 fixées, de **toutes** les séries de Lindstedt à fréquences de la forme $(\omega_0, \mu\omega_1)$ (il n'y a pas de condition diophantienne sur l'unique fréquence lente, ce qui est une particularité de plus du problème des trois corps dans le plan). Une telle convergence implique pourtant l'existence, comme dans le système moyenné, d'une famille à 1 paramètre ω_1 de tores de dimension trois invariants par $F_{(\mu)}$ (correspondant aux séries de fréquences $(\omega_0, \mu\omega_1)$, μ fixé) qui ne peuvent qu'*entourer* un tore invariant de dimension deux portant des mouvements quasi-périodiques de fréquences ω_0 .

Notons que tout argument prouvant la divergence devra nécessairement faire usage de la variation avec μ des fréquences en jeu, variation que force la dégénérescence du Problème de Kepler : un avatar de la théorie de Kolmogorov - Arnold - Moser (K.A.M.) dit en effet que, dans le cas d'un problème non dégénéré (absence de fréquences lentes) tel le problème des trois corps avec presque toute autre loi d'attraction en puissance de la distance que la loi de Newton, les séries de Lindstedt à fréquence diophantienne fixée ω_0 convergent toujours ! Poincaré, qui considère ce cas dans le fameux paragraphe 149 des *Méthodes Nouvelles*, ne rejette pas cette possibilité tout en la considérant comme "*fort invraisemblable*".

Nous retiendrons que les séries de Lindstedt du Problème des 3 corps dans le plan divergent très probablement, que la raison de la divergence est géométrique, et que cette géométrie est bien difficile à mettre en évidence.

Département de Mathématiques
 Université de Paris VII
 2, place Jussieu
 75250 Paris cedex 05