

U.R.A. 169 du C.N.R.S.

Systemes dynamiques : le premier retour

Journées X-UPS 1996

suivi de (réédition)

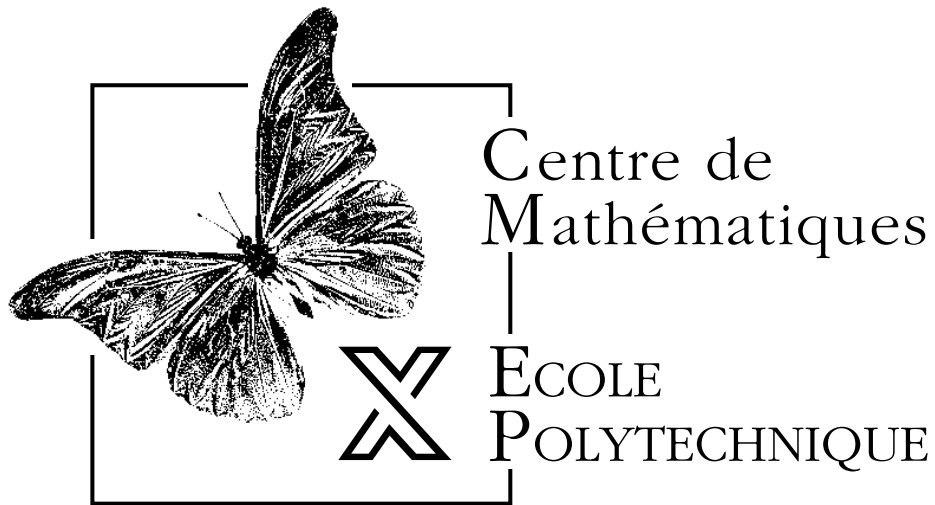
**Aspects des systemes dynamiques :
des equations differentielles
aux iterations de fonctions**

Journées X-UPS 1994

F-91128 Palaiseau Cedex

Tél. : ((33)) 01 69 33 40 88 • Fax : ((33)) 01 69 33 30 19

Courrier électronique : secret@orphee.polytechnique.fr



U.R.A. 169 du C.N.R.S.

**Systèmes dynamiques :
le premier retour**

Journées X-UPS 1996

septembre 1996

F-91128 Palaiseau Cedex
Tél. : ((33)) 01 69 33 40 88 • Fax : ((33)) 01 69 33 30 19
Internet : secret@orphee.polytechnique.fr

Sommaire

Préface	v
Bibliographie	vi
X-UPS sur Internet	vii
Equations différentielles	
<i>François Laudenbach</i>	1
1 Point de vue qualitatif	1
1.1 Equation différentielle du premier ordre autonome	1
1.2 Equation différentielle linéaire	2
1.3 Un exemple d'équation différentielle non linéaire provenant de la mécanique	4
1.4 Autre exemple dans le plan	5
1.5 Théorèmes généraux	5
1.6 Conjugaison topologique d'un foyer et d'un nœud	7
2 Stabilité des équilibres	8
2.1 Dynamique de gradient	8
2.2 Critère spectral pour la stabilité asymptotique	11
2.3 Points d'équilibre instables sur deux exemples	12
2.4 Orbites périodiques attractantes	13
Bibliographie	16
Systèmes dynamiques discrets	
<i>Albert Fathi</i>	17
1 Quelques généralités et quelques exemples	17
1.1 Définitions	17
1.2 Les rotations sur le cercle	18
1.3 Les décalages de Bernoulli	18
1.4 Un exemple de semi-conjugaison	20
1.5 Remords final : Les applications linéaires	21
2 Systèmes dynamiques discrets : stabilité structurelle	22
2.1 Conjugaison topologique et stabilité structurelle	23
2.2 Stabilité structurelle des dilatations linéaires	24
2.3 Stabilité structurelle de $m_p, p \geq 2$	25
Bibliographie	26

Systèmes dynamiques hyperboliques

<i>Patrick Foulon</i>	29
Introduction	29
1 Les automorphismes linéaires hyperboliques	29
1.1 Le cadre géométrique, les tores	29
1.2 La mesure de Haar sur les tores	31
1.3 Les automorphismes linéaires des tores	31
1.4 Les automorphismes linéaires hyperboliques des tores	33
1.5 Variétés stables et instables	36
1.6 Transitivité et mélange topologique	39
1.7 Les problèmes de moyennes	40
1.8 Ergodicité	41
2 Non linéarité et stabilité structurelle	43
2.1 Le fer à cheval	43
2.2 Difféomorphismes d'Anosov - Ensembles hyperboliques	45
2.3 Dynamique symbolique	46
2.4 Codage et partitions de Markov	47
2.5 Stabilité des automorphismes hyperboliques	48
Bibliographie	52

Propriétés spectrales de systèmes dynamiques discrets

<i>Martine Queffelec</i>	53
1 Systèmes dynamiques discrets : propriétés statistiques	53
1.1 Mesures invariantes	55
1.2 Ergodicité	58
1.3 Isomorphismes de systèmes et codage	61
1.4 Système associé à une suite	65
2 Propriétés spectrales	69
2.1 Généralités sur la théorie spectrale	70
2.2 Classification spectrale de suites	74
Bibliographie	79

Le doublement de l'angle

<i>Adrien Douady</i>	81
Introduction (à lire en dernier)	81
1 Types d'orbites fermées	82
1.1 Orbites finies	82
1.2 Interprétation de \mathbf{q} comme décalage	83
1.3 Exemples d'orbites non denses	83
1.4 Exemples d'orbite dense	84
1.5 Exemple d'orbite fermée dénombrable	85
1.6 Toute orbite fermée différente de \mathbf{T} est de mesure nulle	85

1.7	Presque tout point a une orbite dense (!)	86
1.8	Orbites uniformément réparties et loi des grands nombres (!!)	86
2	Orbites tournantes	87
2.1	Ordre cyclique	87
2.2	Angle de rotation	88
2.3	L'abaque de l'escalier	89
2.4	Le cas r rationnel	90
2.5	Interprétation pour l'ensemble de Mandelbrot (!!)	90
2.6	Une propriété de transcendance	91
3	Propriétés hyperboliques de \mathbf{q}	92
3.1	Ordre orbital	92
3.2	Conjugaison à \mathbf{q}	92
3.3	Lemme de poursuite	93

Courbes de Julia sans tangente

<i>Adrien Douady</i>	95
Introduction	95
1 La courbe de Julia	96
1.1 Mise en place	96
1.2 Construction du lacet γ	97
1.3 Injectivité de γ	98
1.4 Points qui ne sont pas sur J	99
2 Points fixes ou périodiques à multiplicateur non réel	100
2.1 Points fixes, points périodiques, multiplicateur	100
2.2 Existence d'un point sans tangente : cas c non réel	100
2.3 Cas c réel	101
2.4 Densité des points sans tangente	103
3 Distorsion bornée	104
3.1 Introduction, fonctions holomorphes	104
3.2 Distorsion	104
3.3 Majoration de la distorsion	105
3.4 Contradiction en supposant l'existence d'une tangente	106

Préface

La théorie des systèmes dynamiques avait initialement pour objet l'étude du comportement qualitatif des trajectoires d'un champ de vecteurs sur une variété (espace des phases en physique par exemple). On s'intéresse ensuite au flot au temps 1 de ce champ de vecteurs : c'est un difféomorphisme de la variété. On remplace l'étude des trajectoires par l'étude du comportement des itérés de ce difféomorphisme : une discrétisation du temps en quelque sorte (voir [1] ou [3] par exemple). Un tel difféomorphisme peut aussi apparaître comme application de premier retour d'une trajectoire au voisinage d'une trajectoire périodique.

Par extension, l'étude du système dynamique associé à une application f d'un espace dans lui-même est celle du comportement de certaines parties de l'espace sous l'effet des itérées $f \circ f \circ \dots \circ f$ lorsque le nombre d'itérations tend vers l'infini.

Les textes présentés dans ce volume regroupent d'une part les *conférences d'introduction* (Laudenbach, Fathi) données dans le cadre d'une préparation aux TIPE à l'Ecole Polytechnique en février et à l'ENS-Lyon en mars 1996, et d'autre part les conférences des journées de mai (Douady, Foulon, Queffélec). Les deux premiers textes se veulent introductifs et très élémentaires. Ils peuvent aussi servir d'introduction aux textes des journées X-UPS 1994. Les suivants restent assez élémentaires et peuvent aussi être lus avant ceux des journées 1994.

Les conférences d'Adrien Douady ont été suivies de la projection d'un film¹ intitulé "La dynamique du lapin" et qui est aussi un excellent outil d'introduction aux systèmes dynamiques.

Nous tenons à remercier la direction de l'Ecole Polytechnique, et tout particulièrement la direction des Etudes, pour l'aide matérielle importante qu'elles ont apportée à la préparation de ces journées et à la publication de ce volume.

Nicole Berline et Claude Sabbah

¹produit par l'association EcoutezVoir, 4, square Vermeuzouze, 75005 Paris (tel. 47 07 25 23, Fax. 47 07 85 57)

Bibliographie

- [1] V.I. ARNOLD, *Equations différentielles ordinaires*, Mir, Moscou, 1974.
- [2] V.I. ARNOLD, *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*, Mir, Moscou, 1987.
- [3] V.I. ARNOLD, *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*, Mir, Moscou.
- [4] A. CHENCINER, *Systèmes dynamiques différentiables*, Encyclopedia Universalis.
- [5] H.-O. PEITGEN, P. RICHTER, *the Beauty of Fractals*, Springer-Verlag, 1986.

X-UPS sur Internet

A partir des Journées 1991 (et sauf 1992), les volumes existent sous forme de fichier postscript² et sont téléchargeables. Ce fichier est présenté sous deux formes : la version pleine page et la version demi-page, cette dernière permettant d'économiser du papier à l'impression. Ils sont disponibles sur Internet et sont accessibles par *ftp*.

- Accès par Internet :

`http://math.polytechnique.fr`

puis cliquer sur "Journées X-UPS" (vous pourrez trouver sur cette page d'autres informations).

- Accès par ftp : ouvrir une session ftp sur `math.polytechnique.fr` (login = ftp, mot de passe = votre adresse électronique), puis

`cd pub/ups`

et lire le fichier README (car les fichiers sont comprimés avec la procédure "gzip").

Pour obtenir par exemple le volume des journées 1991 :

`get x-ups91.ps.gz`

et la version demi-format de ce même volume :

`get x-ups91demi.ps.gz`

qui est mal lisible à l'écran.

Rappel

Vous pouvez aussi obtenir la liste des volumes des Journées X-UPS disponibles en écrivant à

Journées X-UPS
Secrétariat du centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
91128 Palaiseau

volumes que vous pouvez obtenir en envoyant à l'adresse ci-dessus 20FF en timbres poste pour frais d'envoi par volume demandé (PAS DE CHÈQUE NI D'ARGENT LIQUIDE).

Nicole Berline et Claude Sabbah

²A l'heure actuelle certains dessins sont absents ou incomplets dans la version postscript; ceci sera amélioré prochainement.

Equations différentielles

FRANÇOIS LAUDENBACH

1. Point de vue qualitatif

Avec son mémoire *sur les courbes définies par une équation différentielle*, publié entre 1881 et 1886, Henri Poincaré a ouvert la voie pour une approche des équations différentielles où la priorité n'est plus donnée à la *résolution* mais à une étude plus géométrique (ou topologique) des solutions, en particulier de leurs propriétés asymptotiques.

1.1. Equation différentielle du premier ordre autonome

On se donne :

- un ouvert Ω de \mathbf{R}^n ,
- une application $X : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ de classe C^1 .

Le \mathbf{R}^n contenant la source est un espace affine (ensemble de points). Le \mathbf{R}^n but en est l'espace vectoriel sous-jacent. L'application X est un *champ de vecteurs* défini sur l'ouvert Ω . Le vecteur $X(x)$ est souvent représenté par le bipoint $(x, x + X(x))$.

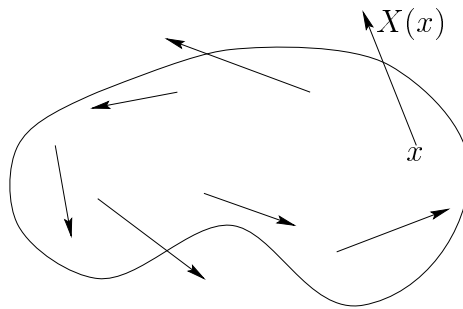


Figure 1

L'équation différentielle associée s'écrit

$$\dot{x} = X(x).$$

Une solution γ est une application différentiable $\gamma : I \rightarrow \Omega$, définie sur un intervalle $I \subset \mathbf{R}$ de la *droite du temps*, telle que

$$\frac{d\gamma}{dt}(t) = X(\gamma(t)).$$

Remarques.

(1) Par la composition $X \circ \gamma$, on voit d'abord que γ est de classe C^1 , puis que γ est C^{k+1} lorsque X est C^k ($k = 1, 2, \dots, +\infty$).

(2) Si γ_0 est une solution définie sur I_0 et si $t_0 \in \mathbf{R}$, alors $\gamma_1(t) = \gamma_0(t - t_0)$ est une solution définie sur $I_1 = I_0 + t_0$. Que la translation dans le temps envoie l'ensemble des solutions en lui-même manifeste le caractère autonome de l'équation différentielle, c'est-à-dire que les vecteurs $X(x)$ ne dépendent que de la position x et pas du temps.

(3) La restriction d'une solution $\gamma : I \rightarrow \Omega$ à un sous-intervalle ouvert J donne évidemment une solution $\gamma|_J : J \rightarrow \Omega$.

Une *solution maximale* est une solution qui n'est pas la restriction stricte d'une autre solution ou encore qui n'admet aucun prolongement. On établit que toute solution est "contenue" dans une solution maximale; cela résulte du lemme de Zorn, si on tient à ce résultat avant d'avoir le théorème d'unicité locale, celui-ci le donnant à peu de frais. Une *orbite* est l'image d'une solution maximale.

Le *portrait de phases* est la figure formée par l'ensemble des orbites. Du point de vue topologique, une orbite peut être

- un point d'*équilibre* (zéro du champ de vecteurs),
- une orbite *périodique*, image d'une solution maximale périodique de période non nulle (dans ce cas l'orbite est homéomorphe à un cercle),
- l'image d'une solution maximale injective (ce qui n'implique pas que l'orbite soit homéomorphe à \mathbf{R} ; elle peut être *récurrente*, c'est-à-dire repasser une infinité de fois arbitrairement près de chacun de ses points, comme le fait une ligne partout dense dans un tore, et, dans ce cas, un voisinage d'un point dans l'orbite n'est jamais connexe pour la topologie induite).

Cette classification nécessite un argument qui est laissé au lecteur. Par ailleurs, grâce aux arguments de Baire, on peut établir qu'une orbite compacte, non réduite à un point, est une orbite périodique.

THÉORÈME FONDAMENTAL (forme faible). — *Les orbites forment une partition de Ω . Chaque orbite non réduite à un point est une courbe lisse (sans point double ni point de rebroussement).*

1.2. Equation différentielle linéaire

On se donne $A \in \text{End}(\mathbf{R}^n)$ et on considère sur \mathbf{R}^n l'équation différentielle

$$\dot{x} = Ax.$$

Les solutions maximales sont $\gamma(t) = e^{tA}x_0$, $t \in \mathbf{R}$. L'allure du portrait de phases ne dépend que du spectre, à quelques détails ou exceptions près. La figure suivante

rassemble la terminologie en vigueur pour le portrait de phases correspondant à un couple $(\text{trace}(A), \text{dét}(A))$. La parabole correspond aux zéros du discriminant Δ de l'équation caractéristique de A .

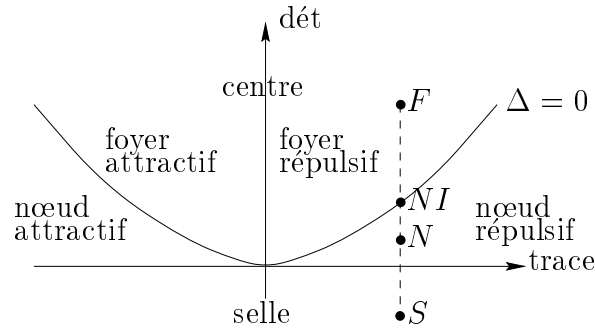
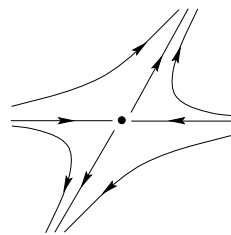
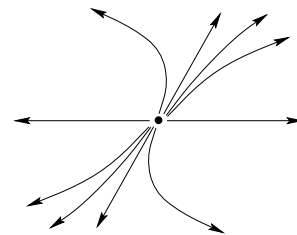


Figure 2

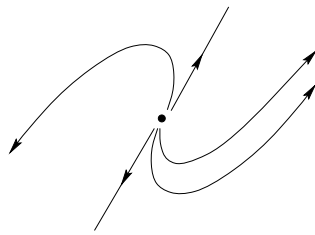
La figure suivante présente les portraits de phases pour chacun des points marqués sur la verticale en pointillés : S, N, NI, F.



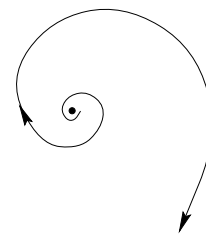
S : selle



N : nœud



NI : en général, nœud impropre



F : foyer ou miroir

Le spectre de A ne dépend pas de l'orientation du plan et donc ne détermine pas le sens de rotation des spirales d'un foyer. Aussi peut-on avoir la figure *miroir* de celle dessinée ci-dessus. La diagonalisabilité n'est pas non plus une propriété spectrale ; si la valeur propre est double, le *nœud impropre* correspond au cas non diagonalisable. Enfin il y a quelques cas particuliers :

– si $\text{trace}(A)=0$, le point d'équilibre est un *centre* ; toutes les orbites, autres que 0, sont périodiques (ellipses) ;

– si A est scalaire, les orbites, autres que 0, sont les demi-droites ouvertes issues de l'origine.

Fait remarquable. — Les portaits de phases N, NI et F sont deux à deux *topologiquement conjugués* : il existe un homéomorphisme de \mathbf{R}^2 envoyant les orbites de l'un sur les orbites de l'autre.

1.3. Un exemple d'équation différentielle non linéaire provenant de la mécanique

L'équation différentielle (du second ordre) du *pendule sans frottement* est

$$\ddot{x} = -\sin x;$$

ici toutes les constantes physiques sont égales à 1. En traitant la vitesse (angulaire) comme une variable indépendante, on se ramène à une équation différentielle du premier ordre dans \mathbf{R}^2 :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\sin x\end{aligned}$$

Le plan des (x, y) est l'espace des *phases* (ou des états du système). La variable x parcourt l'espace des *configurations* (ou des positions). Le champ de vecteurs correspondant est noté (x, y) .

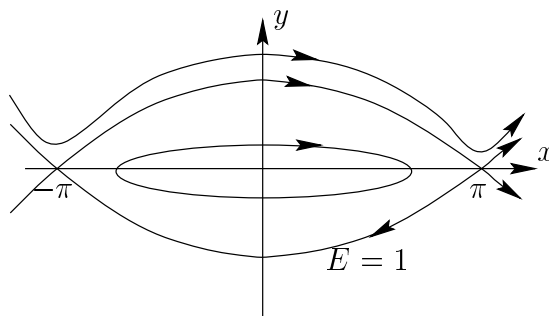


Figure 3

Soit $E(x, y) = \frac{y^2}{2} - \cos x$ la fonction *énergie*. Comme $\langle \text{grad } E(x, y), X(x, y) \rangle = 0$ identiquement, la fonction E est une *intégrale première* du champ : les orbites sont contenues dans les niveaux $E = \text{constante}$. En fait dans cet exemple chaque orbite s'identifie à une composante connexe par arcs de l'ensemble $\{E(x, y) = \text{const.}\}$ privé des points d'équilibre.

Faisons-le par exemple pour l'arc α , composante de $\{E = +1\}$ dans $\{y > 0\}$ ayant les points $(-\pi, 0)$ et $(\pi, 0)$ dans son adhérence (voir plus loin, critère de complétude). Comme α est d'adhérence compacte, une solution maximale contenue dans α est définie pour tout temps de $-\infty$ à $+\infty$. Si elle ne tendait pas vers les points d'équilibre pour $t \rightarrow \pm\infty$, la vitesse serait minorée en module et la longueur de α serait infinie, ce qui est clairement faux puisque l'adhérence de α est le graphe d'une fonction différentiable au-dessus d'un intervalle fermé borné.

1.4. Autre exemple dans le plan

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y + x(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} &= x + y(1 - x^2 - y^2) \end{cases}$$

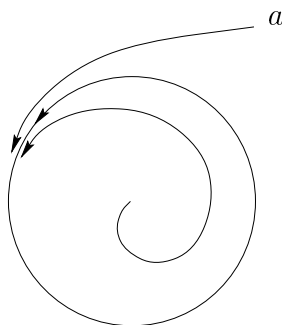


Figure 4

Pour $a \in \mathbf{R}^2$ hors du cercle unité, une solution maximale telle que $\gamma(0) = a$ est définie sur un intervalle $]t_-, +\infty[$ avec $t_- > -\infty$ (*durée de vie finie dans le passé*).

Le théorème de Poincaré-Bendixson énonce que, pour tout champ de vecteurs X de classe C^1 dans le plan ayant des zéros isolés, les orbites ont un comportement asymptotique analogue à ceux rencontrés sur les figures précédentes. Précisément, si γ est une solution de $\dot{x} = X(x)$ (définie jusqu'à $t = +\infty$), on définit son ensemble ω -limite comme l'ensemble des valeurs d'adhérence des suites $\gamma(t_n)$, $t_n \rightarrow +\infty$. Le théorème énonce que si un tel ensemble est compact, non vide et qu'il ne contient pas de zéros de X , alors il est formé d'une orbite périodique.

En revanche, à partir de la dimension 3, on a des phénomènes beaucoup plus compliqués ; les orbites périodiques d'un champ de vecteurs sont loin en général de donner tous ses ensembles ω -limites sans zéros. Par exemple il existe un champ de vecteurs X dans \mathbf{R}^3 avec les propriétés suivantes :

- X est tangent à un tore de révolution $T \cong S^1 \times S^1$.
- Pour tout $a \in T$, l'orbite \mathcal{O}_a est partout dense dans T .
- Le champ X n'a ni zéros ni orbites périodiques dans le tore plein bordé par T (K. Kupferberg, 1993). Ce dernier résultat met un terme à de longues recherches sur une question soulevée par H. Seifert en 1950 concernant la nécessité pour un champ de vecteurs sur la sphère de dimension 3 d'avoir une orbite périodique.
- Même propriété à l'extérieur du tore plein (très facile à obtenir).

1.5. Théorèmes généraux

(1) THÉORÈME LOCAL. — Pour tout $x_0 \in \Omega$, il existe $\varepsilon > 0$ et $r > 0$ avec les propriétés suivantes : - la boule fermée $B(x_0, r)$ est contenue dans Ω ;

– pour tout $x \in B(x_0, r)$ il existe une solution $\gamma :]-\varepsilon, +\varepsilon[\rightarrow \Omega$ de condition initiale $\gamma(0) = x$;

– pour tout $\varepsilon' \in]0, \varepsilon]$, toute solution $\gamma' :]-\varepsilon', +\varepsilon'[\rightarrow \Omega$ de condition initiale x est la restriction de γ .

Remarque. — Par translation dans le temps, mutatis mutandis, le temps $t = 0$ de la condition initiale peut être remplacé par $t = t_0$.

CONSÉQUENCE. — Pour tout $x \in \Omega$, il existe une unique solution maximale $\gamma :]t_-(x), t_+(x)[\rightarrow \Omega$ de condition initiale x .

En effet, si γ_1 et γ_2 sont deux solutions maximales de même condition initiale $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = x$ définies respectivement sur des intervalles I_1 et I_2 , il y a un plus grand intervalle J , $0 \in J \subset I_1 \cap I_2$, sur lequel $\gamma_1(t) = \gamma_2(t)$. L'intervalle J est fermé dans $I_1 \cap I_2$. Par l'unicité locale, il est impossible que γ_1 et γ_2 diffèrent au-delà d'un temps t_0 . Donc $\sup J = \sup I_i$ pour $i = 1$ ou 2 ; autrement dit, une solution prolonge l'autre. Mais comme les deux solutions sont maximales elles coïncident dans le futur de 0 (idem dans le passé).

Le flot. — On note $t \mapsto \varphi(x, t)$ la solution maximale de $\dot{x} = X(x)$ de condition initiale x . Elle vérifie :

$$\begin{cases} \varphi(x, 0) = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) = X(\varphi(x, t)) \end{cases}$$

Considérer le flot, c'est envisager d'un même coup d'œil toutes les solutions ; en particulier, pour autant qu'elle soit définie pour un certain t , l'application $x \mapsto \varphi(x, t)$ décrit la position au temps t des domaines de Ω entraînés par la dynamique du champ de vecteurs.

Le domaine de définition du flot est $\mathcal{D} \subset \Omega \times \mathbf{R}$:

$$\mathcal{D} = \bigcup_{x \in \Omega} \{x\} \times]t_-(x), t_+(x)[.$$

Le domaine \mathcal{D} est un voisinage de chacun de ses points, donc un ouvert de $\Omega \times \mathbf{R}$. C'est vrai pour $(x, 0)$ d'après le théorème local puis pour (x, t_0) d'après la remarque.

Loi du flot. — Si $t_1, t_2, t_1 + t_2 \in]t_-(x), t_+(x)[$, on a

$$\varphi(x, t_1 + t_2) = \varphi(\varphi(x, t_1), t_2).$$

En effet $\varphi(x, t_1 + t)$ et $\varphi(\varphi(x, t_1), t)$ sont solutions de l'équation différentielle et coïncident pour $t = 0$.

(2) THÉORÈME DE RÉGULARITÉ. — *Le flot est de classe C^1 .*

La différentiabilité est difficile mais la continuité résulte de techniques assez élémentaires de majoration a priori (lemme de Gronwall).

Le champ de vecteurs X est dit *complet* si le flot est défini pour tout temps : $\mathcal{D} = \Omega \times \mathbf{R}$. Soit $t \in \mathbf{R}$ fixé ; on pose $\varphi_t(x) = \varphi(x, t)$. Alors :

1. φ_t est un difféomorphisme de Ω
 - bijectif car $\varphi_{-t} \circ \varphi_t = \varphi_t \circ \varphi_{-t} = \text{Id}_\Omega$,
 - différentiable comme l'est le flot,
 - d'inverse différentiable car φ_{-t} est différentiable.
2. $t \mapsto \varphi_t$ est un homomorphisme de groupes $\mathbf{R} \rightarrow \text{Diff}(\Omega)$.

CRITÈRE DE COMPLÉTUDE. — *Si l'orbite $\mathcal{O}_x = \cup_{t \in]t_-(x), t_+(x)[} \varphi(x, t)$ est d'adhérence compacte, alors $]t_-(x), t_+(x)[= \mathbf{R}$; autrement dit, la durée de vie de l'orbite est infinie dans le futur comme dans le passé.*

Démonstration. — Supposons $t_+(x) < +\infty$. Par l'hypothèse de compacité il existe une suite $t_n \rightarrow t_+(x)$ telle que la suite $x_n = \varphi(x, t_n)$ converge ; soit $a = \lim x_n$. On sait que \mathcal{D} contient un voisinage $V \times]-\varepsilon, +\varepsilon[$ de $(a, 0)$. Pour n assez grand, $x_n \in V$ et $t_+(x) - t_n < \varepsilon$. Les formules

$$\begin{aligned} t &\mapsto \varphi(x, t) \quad t \in]t_-(x), t_+(x)[\\ t &\mapsto \varphi(x_n, t - t_n) \quad \text{si } t \in]t_n - \varepsilon, t_n + \varepsilon[\end{aligned}$$

donnent deux solutions coïncidant pour $t = t_n$. Donc elles se laissent réunir pour donner une solution de condition initiale x définie sur $]t_-(x), t_n + \varepsilon[$. C'est une contradiction puisque $t_n + \varepsilon > t_+(x)$. \square

1.6. Conjugaison topologique d'un foyer et d'un nœud

Soit $\dot{x} = Ax$ où A est une matrice de similitude dilatante ; le flot est $\phi(x, t) = e^{At}x$. Soit $\dot{y} = By$ où B est une matrice diagonale à valeurs propres positives ; soit $\psi(y, t) = e^{Bt}y$. On prouve ci-dessous qu'il existe un homéomorphisme h conjuguant les deux flots : pour tout $x \in \mathbf{R}^n$ et tout $t \in \mathbf{R}$,

$$\psi(h(x), t) = h(\phi(x, t)).$$

Pour tout $x \neq 0$, il existe un unique temps $\theta(x)$ tel que $\phi(x, \theta(x))$ appartienne au cercle unité S^1 . En effet un calcul simple donne :

$$\frac{\partial}{\partial t} \|\phi(x, t)\|^2 > 0, \quad \|\phi(x, t)\| \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0 \quad \text{et} \quad \|\phi(x, t)\| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty;$$

la première inégalité traduit le fait géométrique que le champ de vecteurs, *générateur infinitésimal* du flot ϕ , n'est jamais tangent aux cercles centrés à l'origine. Par le théorème des valeurs intermédiaires, $\theta(x)$ existe et est unique. Le théorème

des fonctions implicites, appliqué à l'équation $\|\phi(x, t)\|^2 - 1 = 0$, donne que θ est C^∞ . Sur $\mathbf{R}^2 \setminus 0$ la conjugaison cherchée est donnée par

$$h(x) = \psi(\phi(x, \theta(x)), -\theta(x)).$$

Quand $\|x\| \rightarrow 0$, $\theta(x)$ tend vers $+\infty$ et donc $h(x)$ tend vers 0, parce qu'il appartient à $\psi(S^1, -\theta(x))$. Ainsi h se prolonge en un homéomorphisme de \mathbf{R}^2 , différentiable partout sauf en 0, en posant $h(0) = 0$. Par construction cet homéomorphisme conjugue les deux flots et donc les portraits de phases.

En revanche, h n'est en général pas différentiable à l'origine. S'il l'est, par dérivation d'application composée, on a

$$Dh(0) \cdot A = B \cdot Dh(0)$$

Comme les spectres de A et de B sont disjoints, cette relation implique $Dh(0) = 0$. Donc même si h est différentiable à l'origine, son inverse ne l'est pas.

La conjugaison topologique entre un foyer et un nœud impropre sera abordée dans la partie suivante.

2. Stabilité des équilibres

Les champs de vecteurs gradients donnent un bon exemple où la dynamique est complètement comprise, d'ailleurs très simple : les ensembles limites sont les points d'équilibre. Pour un tel champ, la stabilité des points d'équilibre consiste seulement à savoir si un point critique de fonction est un minimum local ou non. La discussion de la stabilité des points d'équilibre pour les champs de vecteurs qui ne sont pas des gradients relève d'idées similaires. L'exposé se terminera par un bref aperçu sur la stabilité des orbites périodiques; on se demandera par exemple à quelle condition une orbite périodique est un *attracteur*, question qui fera entrer dans le monde des dynamiques discrètes.

2.1. Dynamique de gradient

Soit $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe C^2 . On suppose que les sous-niveaux de f sont compacts. (Par définition, le sous-niveau de la valeur $c \in \mathbf{R}$ est $E(c) = f^{-1}(]-\infty, c])$). Soit $X = -\text{grad } f$ (le signe $-$ est l'usage des *topologues*); c'est un champ de classe C^1 . Soit ϕ son flot. On a

$$\frac{\partial}{\partial t}(f \circ \phi(x, t)) = -\|\text{grad } f(\phi(x, t))\|^2$$

qui est strictement négatif sauf si x est un point critique de f , c'est-à-dire un point où $\text{grad } f(x) = 0$. Pour x fixé, la demi-orbite des temps ≥ 0 est contenue dans le compact $E(f(x))$. Donc $\phi(x, t)$ est défini pour tout $t > 0$ en vertu du critère de complétude donné précédemment.

THÉORÈME. — *On suppose que f n'a qu'un nombre fini de points critiques dans toute partie compacte. Alors $\phi(x, t)$ tend vers un point critique pour $t \rightarrow +\infty$.*

Démonstration.

(1) On établit d'abord le fait suivant :

si $t_n \rightarrow +\infty$ et si $x_n = \phi(x, t_n) \rightarrow a$, alors $\text{grad } f(a) = 0$.

En effet la suite $f(x_n)$ tend en décroissant vers $f(a)$. Comme $t \mapsto f(\phi(x, t))$ est monotone décroissante, on a $f(\phi(x, t)) > f(a)$ pour tout $t \geq 0$.

Par ailleurs, si a n'est pas un point critique, $f(\phi(a, 1)) < f(a)$. Par continuité du flot, $f(\phi(x_n, 1)) \rightarrow f(\phi(a, 1)) < f(a)$. Mais par la loi du flot, $f(\phi(x_n, 1)) = f(\phi(x, t_n + 1)) > f(a)$. Contradiction.

(2) Si $(\phi(x, t))_{t \geq 0}$ a deux valeurs d'adhérence a_0 et a_1 , on a la figure suivante :

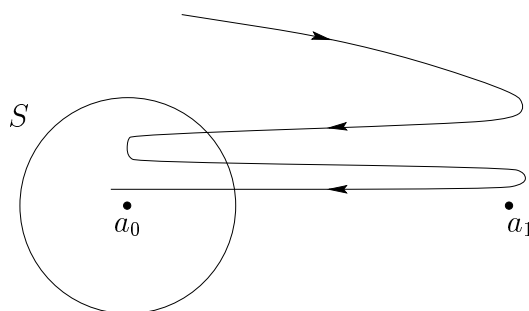


Figure 5

Soit S une petite sphère centrée en a_0 évitant tous les points critiques. Par le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à $t \mapsto \|\phi(x, t) - a_0\|^2$, on voit que l'orbite \mathcal{O}_x coupe S une infinité de fois. Comme S est compact, S contient une valeur d'adhérence de \mathcal{O}_x , c'est-à-dire un point critique en vertu du point (1). Contradiction. \square

Les minimums locaux sont des points d'équilibre *asymptotiquement stables*. Les points critiques qui ne sont pas des minimums locaux sont *instables*. Ces concepts sont expliqués ci-dessous.

DÉFINITION. — Soit X un champ de vecteurs C^1 et soit ϕ son flot. Un point d'équilibre est stable si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|x - a\| \leq \delta \implies \|\phi(x, t) - a\| \leq \varepsilon$$

pour tout $t > 0$ (en particulier $t_+(x) = +\infty$). Le point d'équilibre est *asymptotiquement stable*, s'il est stable et si, pour tout x assez proche de a , $\phi(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} a$.

Exemple. — Pour le pendule sans frottement, le point $(x = 0, y = 0)$ est un point d'équilibre stable et non asymptotiquement stable. Les orbites des points voisins de l'origine sont des courbes fermées dont le diamètre tend vers 0 quand le niveau d'énergie correspondant tend vers le minimum absolu.

CRITÈRE DE LIAPOUNOV. — Soit $L : V \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue, définie sur un voisinage V de a et admettant a pour minimum local strict. On suppose que, pour tout $x \neq a$, $t \mapsto L \circ \phi(x, t)$ est strictement décroissante (sur l'intervalle contenant 0 où elle est définie). Alors a est un point d'équilibre asymptotiquement stable.

La démonstration est en tout point analogue à celle donnée pour les dynamiques de gradient et n'est pas reproduite ici. Une fonction de Liapounov est une fonction qui satisfait aux hypothèses de ce critère.

Exemple. — Le pendule avec frottement, dont le mouvement est régi par l'équation différentielle :

$$\ddot{x} = -\sin x - k\dot{x} \quad (k > 0),$$

qui équivaut au système du premier ordre

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin x - ky. \end{cases}$$

La fonction énergie $E(x, y) = \frac{y^2}{2} - \cos x$ est une fonction de Liapounov ; en effet

$$\langle \text{grad } E, X \rangle = -ky^2 \leq 0$$

et, hors des points d'équilibre, aucune solution de l'équation différentielle n'est contenue dans un niveau constant de E . D'après le critère, l'origine est un point d'équilibre asymptotiquement stable.

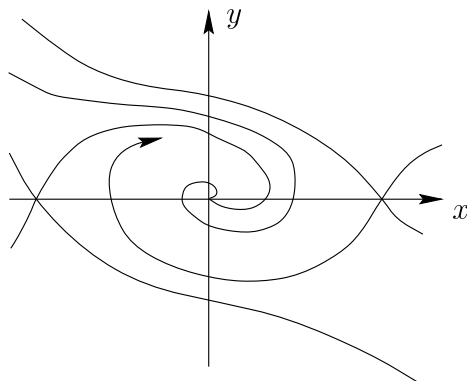


Figure 6 : $0 < k < 2$

2.2. Critère spectral pour la stabilité asymptotique

On suppose que $0 \in \mathbf{R}^n$ est un point d'équilibre. Par un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0, on peut écrire

$$X(x) = Ax + X_1(x)$$

avec $X_1(x) = \left(\int_0^1 [DX(tx) - A] dt \right) x = o(\|x\|)$.

THÉORÈME. — *Si les valeurs propres de A sont de parties réelles < 0 , l'origine est un point d'équilibre asymptotiquement stable.*

Démonstration (d'après Pontryagin). — Dans le cas d'un champ linéaire ($X_1(x) = 0$), les solutions sont $x(t) = e^{tA}x_0$. Grâce à la réduction de Jordan de A sur \mathbf{C} on établit que, si les valeurs propres sont majorées par $-a < 0$, il vient

$$\|e^{tA}\| \leq \text{const. } e^{-at} \quad (*)$$

Donc, pour $t \rightarrow +\infty$, on a $\|x(t)\| \rightarrow 0$, ce qui donne le résultat dans le cas linéaire.

Par ailleurs, il existe une fonction de Liapounov naturelle pour le champ $X_0(x) = Ax$, à savoir :

$$L(x) = \int_0^{+\infty} \|e^{tA}x\|^2 dt.$$

Cette intégrale est convergente d'après (*). La fonction L est une forme quadratique définie positive. Enfin,

$$\begin{aligned} \langle \text{grad } L(x), X_0(x) \rangle &= 2 \int_0^{+\infty} \langle e^{tA}x, e^{tA}Ax \rangle dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt} (\|e^{tA}x\|^2) dt \\ &= -\|x\|^2, \end{aligned}$$

est < 0 si $x \neq 0$, ce qui prouve que L est une fonction de Liapounov pour X_0 . La même fonction est une fonction de Liapounov pour X au voisinage de l'origine. En effet

$$\begin{aligned} \langle \text{grad } L(x), X_1(x) \rangle &= 2 \int_0^{+\infty} \langle e^{tA}x, e^{tA}X_1(x) \rangle dt \\ &= o(\|x\|^2). \end{aligned}$$

Donc $\langle \text{grad } L(x), X(x) \rangle = -\|x\|^2 + o(\|x\|^2)$ est strictement négatif pour x voisin de 0 distinct de 0.

Remarque. — En considérant une telle fonction de Liapounov on peut construire une conjugaison topologique entre un nœud impropre et un nœud propre.

Précisément soit X et Y deux champs de vecteurs linéaires dont les portraits de phases sont respectivement un nœud impropre et un nœud propre. Quitte à changer l'un ou l'autre de ces champs en son opposé, on peut supposer que l'origine est stable pour les deux. Soit ϕ et ψ les flots respectifs. Soit alors L la fonction donnée par

$$L(x) = \int_0^{+\infty} \|\phi(x, t)\|^2 dt.$$

Il existe une unique fonction $\theta : \mathbf{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$ telle que $\phi(x, \theta(x)) \in L^{-1}(1)$ et cette fonction est différentiable par les mêmes arguments que dans l'exposé précédent. On choisit un difféomorphisme $h_0 : L^{-1}(1) \xrightarrow{\cong} S^1$ entre l'ellipse $L^{-1}(1)$ et le cercle unité. La conjugaison cherchée est donnée sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ par la formule suivante :

$$h(x) = \psi \left[h_0 \left(\phi(x, \theta(x)) \right), -\theta(x) \right]$$

Elle s'étend continûment à tout le plan en posant $h(0) = 0$.

2.3. Points d'équilibre instables sur deux exemples

(a) *Pendule sans frottement.* — Pour connaître le portrait de phases au voisinage du point d'équilibre $(\pi, 0)$, il suffit d'y tracer les courbes d'énergie constante. La fonction énergie E admet $(\pi, 0)$ comme point critique et en ce point la forme quadratique $D^2E(\pi, 0)$ est non dégénérée de signature $(-, +)$. Le lemme de Morse assure qu'il existe un difféomorphisme $g : V \rightarrow W$, où V et W sont des voisinages respectivement de $(\pi, 0)$ et de $(0, 0)$ dans le plan, tel que :

$$\begin{aligned} g(\pi, 0) &= (0, 0) \\ Dg(\pi, 0) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ E(x, y) &= q \circ g(x, y), \quad \forall x, y \in V \end{aligned}$$

où $q(x, y) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$.

(b) *Pendule avec frottement.* — Au voisinage de $(\pi, 0)$ on peut écrire un développement limité du champ de vecteurs :

$$X(x, y) = A \begin{pmatrix} x - \pi \\ y \end{pmatrix} + o(|x - \pi| + |y|), \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -k \end{pmatrix}.$$

Le champ de vecteurs $X_0(x, y) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est le champ de vecteurs dit *linéarisé* du champ X au point d'équilibre. Le point d'équilibre $(\pi, 0)$ est *hyperbolique*, ce qui signifie que toutes les valeurs propres de A sont de parties réelles non nulles ; ici l'une est réelle positive et l'autre réelle négative. L'hypothèse d'hyperbolicité permet d'appliquer les deux théorèmes suivants :

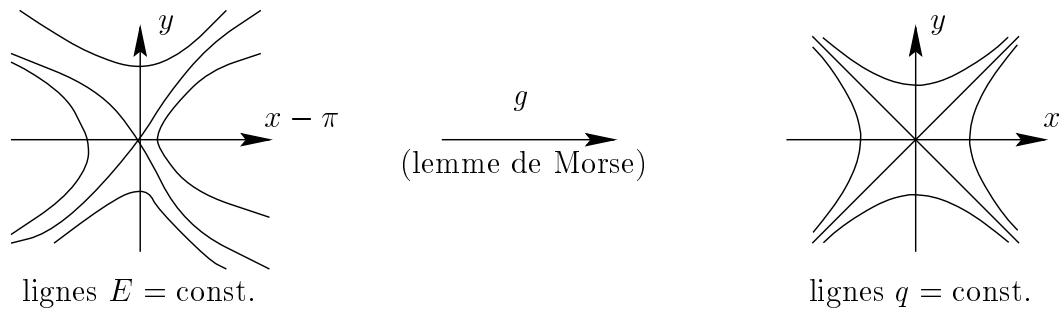


Figure 7

(1) *Le théorème de la variété stable.* — Énoncé en dimension 2 avec deux valeurs propres réelles de signes opposés, il affirme l'existence de 4 *séparatrices* formant deux courbes lisses tangentes au champ X et aux directions propres de A au point d'équilibre. Le théorème général est dû à Hartman, mais on trouve un traitement du cas particulier de la dimension 2 dans le livre de Pontryagin.

(2) *Le théorème de Hartman–Grobman.* — Le portrait de phases au voisinage du point d'équilibre est topologiquement conjugué au portrait de phases du champ de vecteurs linéarisé X_0 . En fait il existe un homéomorphisme d'un voisinage du point $(\pi, 0)$ sur un voisinage de $(0, 0)$ conjuguant les flots locaux de X et de X_0 .

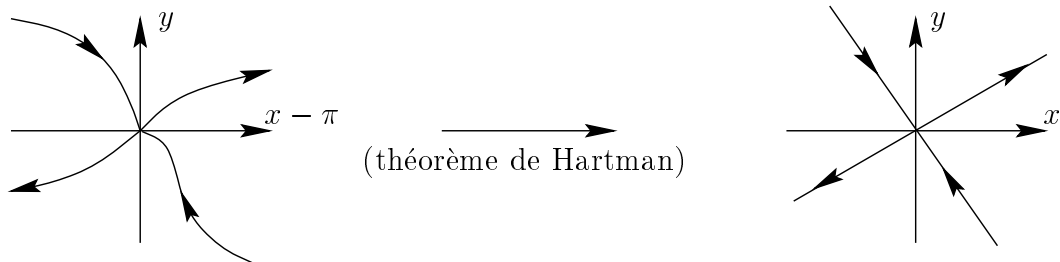


Figure 8

La question de la conjugaison différentiable met en jeu des conditions de *non-résonance* entre les valeurs propres du linéarisé (théorème de S. Sternberg); en un certain sens cette question est au-delà de l'étude qualitative des équations différentielles.

2.4. Orbites périodiques attractantes

Il s'agit de reconnaître quand une orbite périodique est asymptotiquement stable au sens de Liapounov. On se donne un champ de vecteurs X sur un domaine de \mathbf{R}^n .

On suppose que l'orbite \mathcal{O}_a du point a est périodique de période T . Soit ϕ le flot de X . La question est de savoir sous quelle condition on peut trouver un voisinage V de \mathcal{O}_a tel que, pour tout $x \in V$, la distance de $\phi(x, t)$ à \mathcal{O}_a tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$. On introduit pour cela l'application de Poincaré dite de *premier retour*.

L'application de Poincaré. — Soit H un hyperplan affine passant par a et transverse à $X(a)$, ce qui signifie que $X(a)$ dirige un supplémentaire de l'espace vectoriel \vec{H} sous-jacent à H .

PROPOSITION. — *Il existe un voisinage ouvert V de a dans H et une fonction C^1 , $\theta : V \rightarrow \mathbf{R}$, telle que $\phi(x, \theta(x)) \in H$, pour tout $x \in V$, et que $\theta(a) = T$.*

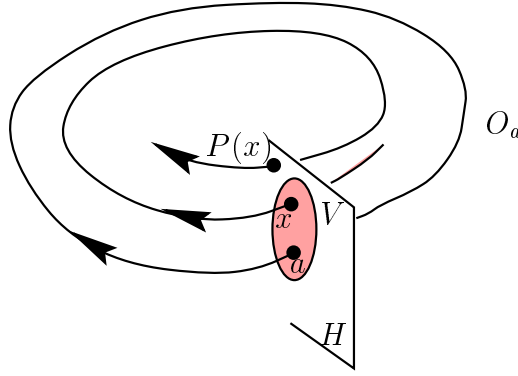


Figure 9

Partant d'un point de H proche de a la solution recoupe H au bout d'un temps voisin de T . L'application $x \in V \mapsto \phi(x, \theta(x))$ est notée P et est appelée l'application de Poincaré de premier retour sur la transversale H .

Démonstration.

(1) On commence par trouver un ouvert W de H , voisinage de a , et $\varepsilon > 0$ tels que $\psi := \phi|_{W \times]-\varepsilon, +\varepsilon[} \rightarrow \mathbf{R}^n$ soit un difféomorphisme sur un ouvert de \mathbf{R}^n . Cela est donné par le théorème d'inversion locale. Il s'applique car la différentielle $D\psi(a, 0)$ induit l'identité sur \vec{H} et vérifie $\frac{\partial \psi}{\partial t}(a, 0) = X(a)$. L'hypothèse de transversalité assure que $D\psi(a, 0)$ est surjective, donc inversible.

(2) Soit U l'image de ψ . Par continuité de $x \mapsto \phi(x, T)$ on trouve un voisinage ouvert V de a dans W tel que $x \in V$ implique $\phi(x, T) \in U$. Donc

$$\phi(x, T) = \psi(y, \tau)$$

pour un couple $y \in W$, $\tau \in]-\varepsilon, +\varepsilon[$. Comme ψ est un difféomorphisme, $x \mapsto \tau$ est C^1 . Prenons alors $\theta(x) = T - \tau(x)$. Par la loi du flot, il vient $y = \phi(x, \theta(x))$. \square

La différentielle de P en a est reliée à la différentielle en a de $x \mapsto \phi_T(x) = \phi(x, T)$ de la façon suivante. Dans une base de \mathbf{R}^n dont les premiers vecteurs appartiennent à \overrightarrow{H} et dont le dernier est $X(a)$, la matrice jacobienne $D\phi_T(a)$ prend la forme

$$D\phi_T(a) = \begin{pmatrix} & & 0 \\ & DP(a) & \vdots \\ \times & \cdots & \times 1 \end{pmatrix}$$

où $DP(a)$ désigne la matrice jacobienne en a de l'application de Poincaré P .

Par ailleurs, $D\phi_T(a)$ est la solution au temps T de l'équation différentielle linéaire (non autonome, c.-à-d. dépendant du temps) dans l'espace des matrices réelles $n \times n$

$$\dot{M} = DX(\phi(a, t)) \circ M$$

de condition initiale $M(0) = \text{Id}$. Ici \circ désigne le produit matriciel et $DX(\cdot)$ désigne la différentielle de X au point indiqué, c'est-à-dire la matrice des dérivées partielles $\frac{\partial X_i}{\partial x_j}(\cdot)$ où X_1, \dots, X_n sont les composantes de X .

En général, on ne sait pas résoudre explicitement cette équation différentielle. On a seulement le théorème de la *divergence* (théorème de Liouville) :

$\det D\phi_T(a)$ est la solution au temps T de l'équation différentielle linéaire dans \mathbf{R} , dépendant du temps,

$$\dot{y} = \text{div} X(\phi(a, t))y$$

de condition initiale $y(0) = 1$. Donc :

$$\det D\phi_T(a) = e^{\int_0^T \text{div} X(\phi(a, t)) dt}.$$

Par exemple si $n = 2$ et si la divergence du champ X est strictement négative le long de l'orbite \mathcal{O}_a , on déduit que $DP(a)$ (qui est un nombre réel, strictement positif parce que $D\phi_T(a) \in Gl_+(n)$) est < 1 . L'orbite périodique est alors attractante ; c'est ce qui se passe dans l'exposé I ("autre exemple dans le plan").

THÉORÈME DE STABILITÉ. — *Si le spectre de $DP(a)$ est contenu dans l'intérieur du disque unité, alors il existe un voisinage V de a dans la transversale H avec les propriétés suivantes :*

1. $P(V)$ est contenu dans V , ainsi $P^n = P \circ \dots \circ P$ est défini sur V pour tout $n > 0$.
2. Si $x \in V$, $P^n(x) \rightarrow a$ pour $n \rightarrow +\infty$ et la distance $\phi(x, t)$ à \mathcal{O}_a tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$.

Cet énoncé est une version discrète du critère de Liapounov sur la stabilité des équilibres. On notera qu'il y a une exponentielle entre la condition spectrale de Liapounov et la condition ci-dessus. Cela n'a rien d'étonnant car, si a est un point d'équilibre, on a :

$$D\phi_T(a) = e^{TDX(a)}.$$

Bibliographie

- [Ar] V. I. ARNOLD, *Equations différentielles ordinaires*, Editions Mir, Moscou, traduction française 1974.
- [Av] A. AVEZ, *Calcul différentiel*, Masson, Paris, 1983.
- [Ca] H. CARTAN, *Calcul différentiel*, Hermann, Paris, 1977.
- [D] J.-P. DEMAILLY, *Analyse numérique et équations différentielles*, Presses universitaires de Grenoble, 1991.
- [Dem] M. DEMAURE, *Catastrophes et bifurcations*, Ellipses, Paris, 1989.
- [H-S] M. HIRSCH, S. SMALE, *Differential equations, dynamical systems and linear algebra*, Academic Press, 1974.
- [I] M. C. IRWIN, *Smooth dynamical systems*, Academic Press, 1974.
- [L] S. LEFSCHETZ, *Differential equations : geometric theory*, Dover Pub., New-York, 1977.
- [P] L. S. PONTRYAGIN, *Ordinary differential equations*, Pergamon Press, 1962, *Equations différentielles*, Mir, Moscou, traduction française 1969.

Centre de Mathématiques
URA 169 du C.N.R.S.
Ecole Polytechnique
91128 Palaiseau cedex

Adresse électronique : laudenba@math.polytechnique.fr

Systèmes dynamiques discrets

ALBERT FATHI

1. Quelques généralités et quelques exemples

Dans ce chapitre nous allons introduire la notion de système dynamique et expliquer l'objet de la théorie sur quelques exemples afin d'illustrer quelques uns des concepts.

1.1. Définitions

DÉFINITION 1.1.1. — *Un système dynamique discret est une application continue $f : X \rightarrow X$ de l'espace topologique X dans lui-même.*

Le fait que f envoie X dans lui-même permet de considérer les itérées f^n , $n \in \mathbf{N}$, où

$$f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_n.$$

On peut alors définir les trajectoires ou orbites d'un point :

DÉFINITION 1.1.2 (Orbite d'un point). — *Si $f : X \rightarrow X$ est un système dynamique, l'orbite positive de x par f est*

$$\mathcal{O}_+^f(x) = \{f^n(x) \mid n \in \mathbf{N}\}.$$

Si f est bijective, on définit l'orbite de x par $\mathcal{O}^f(x) = \{f^n(x) \mid n \in \mathbf{Z}\}$ ainsi que l'orbite négative $\mathcal{O}_-^f(x) = \{f^{-n}(x) \mid n \in \mathbf{N}\}$.

L'objet de la théorie des systèmes dynamiques est l'étude du comportement des orbites et de la façon dont elles varient avec le point initial.

Pour étudier la suite $\mathcal{O}_+^f(x)$, on fait ce que l'on fait d'habitude avec une suite, c'est-à-dire que l'on regarde ses points d'accumulation.

Si il existe $n \geq 1$ tel que $f^n(x) = x$, on dit que x est périodique, la période d'un point périodique x est le plus petit entier $n \geq 1$ tel que $f^n(x) = x$.

On note $\omega_f(x)$ l'ensemble des points d'accumulation de la suite $f^n(x)$, $n \in \mathbf{N}$. Si $x \in \omega_f(x)$, on dit que x est récurrent. Si $\omega_f(x) = X$, on dit que x est d'orbite dense. Si tout point de X est d'orbite dense, on dit que f est minimal.

La meilleure façon de comprendre les notions est de les tester sur des exemples.

1.2. Les rotations sur le cercle

Commençons par un des exemples les plus connus, les rotations.

PROPOSITION 1.2.1. — *Soit \mathbf{S} le cercle unité dans \mathbf{C} . Si $\alpha \in \mathbf{S}$, on définit $R_\alpha : \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S}$ par $R_\alpha(z) = \alpha z$. Si $\arg(\alpha) \in 2\pi\mathbf{Q}$, toutes les orbites de R_α sont périodiques de même période. Si $\arg(\alpha) \notin 2\pi\mathbf{Q}$, alors R_α est minimal.*

Démonstration. — On a $R_\alpha^n = R_{\alpha^n}$ d'où le résultat dans le cas où $\arg(\alpha) \in \mathbf{Q}$.

Dans le cas où $\arg(\alpha) \notin 2\pi\mathbf{Q}$, posons $\beta = \arg(\alpha)/2\pi \notin \mathbf{Q}$. Le sous-groupe additif de \mathbf{R} engendré par 1 et β est dense dans \mathbf{R} . Soit alors $z \in \mathbf{S}$ et $x \in \mathbf{R}$ tel que $z = e^{2i\pi x}$. On peut trouver des suites d'entiers $(n_j)_{j \in \mathbf{N}}$ et $(p_j)_{j \in \mathbf{N}}$, tels que $x = \lim_{j \rightarrow \infty} n_j \beta + p_j$ donc $z = \lim_{j \rightarrow \infty} e^{2i\pi(n_j \beta + p_j)} = \lim_{j \rightarrow \infty} \alpha^{n_j} = \lim_{j \rightarrow \infty} R_\alpha^{n_j}(1)$. Par conséquent l'orbite de 1 est dense. Or pour tout $z \in \mathbf{S}$, on a $R_\alpha^n(z) = \alpha^n z = z R_\alpha^n(1)$, ce qui montre la densité des autres orbites. \square

L'exemple des rotations nous donne des systèmes où le comportement d'une orbite est essentiellement le même quelque soit le point dont on part.

Une autre propriété de ce système, due au fait que les rotations sont des isométries, est que deux points proches restent proches pour tous les itérés. Une telle propriété est évidemment idéale pour les modélisations de systèmes physiques ou biologiques, car on ne connaît dans ce cas la condition initiale qu'à l'erreur de sa mesure près et le fait que cette erreur n'explose pas par itération permet donc de faire des prédictions à long terme. Malheureusement, il résulte de la théorie des systèmes dynamiques qu'en général les systèmes n'ont pas ce genre de propriété.

1.3. Les décalages de Bernoulli

Soit p un entier ≥ 1 . On considère l'espace :

$$\Sigma_p^+ = \{1, \dots, p\}^{\mathbf{N}}.$$

On notera un point de Σ_p^+ par \underline{x} . Un tel point \mathbf{x} est la donnée d'une suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ avec $x_n \in \{1, \dots, p\}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. x_n est appelé la n ième coordonnée de \mathbf{x} .

On munit Σ_p^+ la topologie produit. Cette topologie est définie par la métrique

$$d((x_n)_{n \in \mathbf{N}}, (y_n)_{n \in \mathbf{N}}) = \sum_{n \in \mathbf{N}} \frac{|x_n - y_n|}{2^n}.$$

Si $d((x_n)_{n \in \mathbf{N}}, (y_n)_{n \in \mathbf{N}}) < \delta$, alors $x_i = y_i$ pour tout $i \in \mathbf{N}$ tel que $2^{-i} \geq \delta$. Si $x_i = y_i$ pour tout i avec $0 \leq i \leq q$ alors $d((x_n)_{n \in \mathbf{N}}, (y_n)_{n \in \mathbf{N}}) \leq p2^{-q}$. Donc, on peut rendre deux suites de Σ_p^+ proches en rendant un grand nombre de leurs premières coordonnées égales.

Le décalage de Bernoulli $\sigma_p^+ : \Sigma_p^+ \rightarrow \Sigma_p^+$ est défini par :

$$\sigma_p^+ [(x_n)_{n \in \mathbf{N}}] = (y_n)_{n \in \mathbf{N}}, \text{ où } y_n = x_{n+1}.$$

PROPOSITION 1.3.1. — *Les points périodiques de σ_p^+ sont denses dans Σ_p^+ . Il y a un point de Σ_p^+ dont l'orbite (positive) par σ_p^+ est dense dans Σ_p^+ . On a la sensibilité par rapport aux conditions initiales. Plus précisément si $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, alors $\sup_{n \in \mathbf{N}} d((\sigma_p^+)^n(\mathbf{x}), (\sigma_p^+)^n(\mathbf{y})) \geq 1$.*

Démonstration. — Remarquons qu'un point $\mathbf{y} = (y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est périodique pour σ_p^+ , si la suite $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est périodique. Pour approcher $\underline{\mathbf{x}} = (x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ par un point périodique, il suffit de tronquer la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ assez loin et de la rendre périodique.

Un point $\mathbf{x} = (x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est d'orbite dense si toute suite finie d'éléments de $\{1, \dots, p\}$ apparaît comme sous-suite de $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$. Comme l'ensemble des suites finies à valeurs dans $\{1, \dots, p\}$ est dénombrable, il n'est pas difficile en mettant l'ensemble de toutes ces suites finies bout à bout de fabriquer un point d'orbite dense.

Si $\mathbf{x} = (x_n)_{n \in \mathbf{N}} \neq \mathbf{y} = (y_n)_{n \in \mathbf{N}}$, il existe un n avec $x_n \neq y_n$. Il en résulte que les coordonnées d'ordre 0 de $(\sigma_p^+)^n(\mathbf{x})$ et $(\sigma_p^+)^n(\mathbf{y})$ diffèrent, par conséquent $d((\sigma_p^+)^n(\mathbf{x}), (\sigma_p^+)^n(\mathbf{y})) \geq 1$. \square

Nous ne donnons pas ici de définition formelle de la sensibilité aux conditions initiales. Nous la prenons au sens intuitif : les prédictions précises de comportement à long terme des orbites ne peuvent se faire qu'en connaissant la condition initiale avec une précision de plus en plus grande. Par exemple, si $f : X \rightarrow X$ satisfait à la propriété suivante :

$$\exists \varepsilon_0, \forall x, x' \in X, x \neq x' \Rightarrow \sup_{n \in \mathbf{N}} d(f^n(x), f^n(x')) \geq \varepsilon_0, \quad (\clubsuit)$$

alors, il est clair que f est sensible aux conditions initiales. La propriété (\clubsuit) est appelée expansivité. Dans le cas où f est un homéomorphisme, si on veut obtenir des exemples avec X non fini, il faut remplacer, dans la condition (\clubsuit) , le sup sur \mathbf{N} par un sup sur \mathbf{Z} .

On peut aussi considérer $\Sigma_p = \{1, \dots, p\}^{\mathbf{Z}}$, muni de la topologie produit. Le décalage $\sigma_p : \Sigma_p \rightarrow \Sigma_p$ est aussi défini par :

$$\sigma_p[(x_n)_{n \in \mathbf{Z}}] = (y_n)_{n \in \mathbf{Z}}, \text{ où } y_n = x_{n+1}.$$

A la différence de σ_p^+ , l'application σ_p est inversible. On peut voir de la même manière que les points périodiques de σ_p sont denses dans Σ_p et qu'il y a un point d'orbite dense. De même σ_p est sensible aux conditions initiales.

Smale a montré que, sous des conditions assez générales, il y a une copie d'un décalage de Bernoulli dans pratiquement tous les systèmes dynamiques sur un espace de dimension supérieure ou égale à 2. Ce qui montre qu'en général un système est sensible aux conditions initiales.

1.4. Un exemple de semi-conjugaison

Considérons le système dynamique $m_p : \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S}$, $z \mapsto z^p$, où p est un entier ≥ 2 . Nous allons voir que m_p a une dynamique très riche. En fait m_p est “pratiquement” une version du système dynamique σ_p^+ .

Définissons $\theta_p : \Sigma_p^+ \rightarrow [0, 1]$ par :

$$\theta_p[(x_n)_{n \in \mathbf{N}}] = \sum_{n \in \mathbf{N}} \frac{x_n - 1}{p^{n+1}},$$

c'est-à-dire que l'on fait correspondre à $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ le réel dont le développement en base p est $0, x'_0 x'_1 \dots x'_n \dots$ avec $x'_n = x_n - 1 \in \{0, \dots, p-1\}$. On voit donc que θ_p est surjective. Il n'est pas difficile de montrer qu'elle est continue et même lipschitzienne :

$$|\theta_p(\mathbf{x}) - \theta_p(\mathbf{y})| \leq \sum_{n \in \mathbf{N}} \left| \frac{x_n - 1}{p^{n+1}} - \frac{y_n - 1}{p^{n+1}} \right| \leq \sum_{n \in \mathbf{N}} \frac{|x_n - y_n|}{p^{n+1}} = \frac{d(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{p}.$$

Il est clair sur la formule que $\theta(\sigma_p^+(\mathbf{x}))$ est la partie fractionnaire de $p\theta(\mathbf{x})$. Si on définit alors $\psi_p : \Sigma_p^+ \rightarrow \mathbf{S}$ par :

$$\psi_p(\mathbf{x}) = e^{2i\pi\theta(\mathbf{x})},$$

on en déduit que l'on a $\psi_p \circ \sigma_p^+(\mathbf{x}) = m_p \circ \psi_p(\mathbf{x})$, ce qui s'exprime par la commutativité du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_p^+ & \xrightarrow{\sigma_p^+} & \Sigma_p^+ \\ \psi_p \downarrow & & \downarrow \psi_p \\ \mathbf{S} & \xrightarrow{m_p} & \mathbf{S} \end{array}$$

ce qui nous amène à la définition :

DÉFINITION 1.4.1 (Semi-conjugaison topologique). — *Si $h : X \rightarrow X$ et $f : Y \rightarrow Y$ sont des applications continues des espaces topologiques X et Y . On dit que l'application continue surjective $\psi : X \rightarrow Y$ est une semi-conjugaison topologique entre f et h si $f \circ \psi = \psi \circ h$, c'est-à-dire que le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & X \\ \psi \downarrow & & \downarrow \psi \\ Y & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Par récurrence sur n , on voit que l'on a $f^n \circ \psi = \psi \circ h^n$. Il en résulte qu'une telle semi-conjugaison topologique envoie les orbites de h sur les orbites de f . En particulier, elle envoie les orbites périodiques de h sur des orbites périodiques de f . Comme ψ est continue et surjective, elle envoie un point d'orbite dense sur un point d'orbite dense. En appliquant ces remarques à ψ_p , on obtient la proposition :

PROPOSITION 1.4.2. — *Les points périodiques de $m_p, p \geq 2$, sont denses dans \mathbf{S} . Il y a un point de \mathbf{S} dont l'orbite (positive) par m_p est dense dans \mathbf{S} .*

Montrons que l'on a la sensibilité aux conditions initiales pour $m_p, p \geq 2$.

PROPOSITION 1.4.3. — *Le système dynamique $m_p : \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S}, p \geq 2$ est expansif, donc sensible aux conditions initiales.*

Démonstration. — Nous avons besoin d'un inverse local de l'exponentielle. Définissons $\widetilde{\text{exp}} : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ par :

$$\widetilde{\text{exp}}(z) = e^{2i\pi z}.$$

On a $\widetilde{\text{exp}}(z) = \widetilde{\text{exp}}(z')$ si et seulement si $z - z' \in \mathbf{Z}$ et $\widetilde{\text{exp}}^{-1}(\mathbf{S}) = \mathbf{R}$; de plus, c'est un difféomorphisme local. Choisissons alors $\delta \in]0, 1[$, assez petit pour que l'inverse κ de $\widetilde{\text{exp}}$ soit défini sur $\overline{B}(1, \delta) = \{z \mid z \in \mathbf{C}, |z - 1| \leq \delta\}$. On choisit la détermination avec $\kappa(1) = 0$. On a $\kappa(\mathbf{S} \cap \overline{B}(1, \delta)) =]-\alpha_0, \alpha_0[$. Fixons alors $p \geq 1$ et choisissons $\delta_p < \delta$ tel que $z \in \mathbf{S}$ et $|z - 1| < \delta_p$ implique $|p\kappa(z)| < \alpha_0$. Supposons alors que $z_1, z_2 \in \mathbf{S}$ vérifient $|z_1^{p^n} - z_2^{p^n}| < \delta_p$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. En posant $z = z_1/z_2$, on trouve $|z^{p^n} - 1| < \delta_p$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. En posant $x_n = \kappa(z^{p^n})$, on a $p|x_n| < \alpha_0$, de plus $\widetilde{\text{exp}}(px_n) = (\widetilde{\text{exp}}(x_n))^p = \widetilde{\text{exp}}(x_{n+1})$. Donc $px_n = x_{n+1}$ car $|px_n|$ et $|x_{n+1}|$ sont tous les deux $< \alpha_0$. On voit alors par récurrence que $|x_0| = p^{-n}|x_n| < p^{-n}\alpha_0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ donc $x_0 = 0$ et $z = 1$; par conséquent $z_1 = z_2$. \square

1.5. Remords final : Les applications linéaires

Les applications linéaires sont certainement, en dimension finie, les applications que l'on comprend le mieux au niveau des classes préparatoires (du moins, c'est ce que nous espérons tous!). Il serait évidemment intéressant de voir ce que donnent, dans ce cas, les notions introduites.

Soit $A : E \rightarrow E$ une application linéaire du K espace vectoriel E , avec $K = \mathbf{R}$ ou \mathbf{C} . Les points périodiques de période divisant n sont 0 ainsi que les vecteurs propres de A^n associées à la valeur propre 1.

Qu'en est-il des points d'orbite dense? Pour cela, il faut avoir une topologie sur E . Donc on suppose maintenant que E est un espace vectoriel topologique et que A est continue. Pour rester dans le cadre des programmes, supposons par exemple E normé. On a alors la proposition suivante :

PROPOSITION 1.5.1. — *Soit $f : E \rightarrow E$ une application K -linéaire du K -espace normé E , avec $K = \mathbf{R}$ ou \mathbf{C} . Notons $E'_{\mathbf{C}}$ le \mathbf{C} -espace vectoriel formé des applications K -linéaires continues de E dans \mathbf{C} . Si f a une orbite dense dans E , alors l'application transposée $f^* : E'_{\mathbf{C}} \rightarrow E'_{\mathbf{C}}, \varphi \mapsto \varphi \circ f$ n'a pas de valeur propre. Par conséquent E est nécessairement de dimension infinie.*

Démonstration. — Un vecteur propre non nul de f^* associé à la valeur propre λ est une application continue K -linéaire non-nulle $\varphi : E \rightarrow \mathbf{C}$, telle que $\forall x \in E, \varphi \circ f(x) = \lambda\varphi(x)$. Si $x_0 \in E$ a une orbite dense dans E , il s'ensuit par continuité de φ que $\{\varphi \circ f^n(x_0) \mid n \in \mathbf{N}\} = \{\lambda^n \varphi(x_0) \mid n \in \mathbf{N}\}$ est dense dans le K -espace vectoriel non-nul $\varphi(E) \subset \mathbf{C}$. Il n'est pas difficile de voir que ceci n'est pas possible (par exemple en remarquant que l'ensemble des valeurs de la suite $|\lambda^n \varphi(x_0)|$ est discret dans $[0, \infty[$). \square

Cette proposition montre qu'il n'y a pas d'application linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie dans lui-même ayant une orbite dense. On peut aussi démontrer ce fait en utilisant une décomposition en blocs de Jordan et en analysant le comportement des orbites pour chaque bloc.

En dimension infinie, Rolewicz a montré dans les années 60 qu'il y a des applications linéaires qui ont des orbites denses. Le théorème suivant peut être laissé en exercice afin d'animer la discussion pendant votre repas :

THÉORÈME 1.5.2 (Théorème de Rolewicz). — *Considérons l'espace de Hilbert de suites $\ell^2 = \{(a_n)_{n \in \mathbf{Z}} \mid \sum_{n \in \mathbf{Z}} |a_n|^2 < +\infty\}$. Soit $\lambda \in]0, 1[$, définissons l'opérateur linéaire continu $T : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ par $T[(a_n)_{n \in \mathbf{N}}] = (b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ où :*

$$b_n = \begin{cases} \lambda a_{n-1}, & \text{si } n \geq 0 \\ \lambda^{-1} a_{n-1}, & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

Alors T a une orbite dense dans ℓ^2 .

En fait, il y a un exemple plus naturel en dimension infinie et que vous connaissez très bien. Notons $\mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbf{R})$ l'espace des fonctions indéfiniment dérivables. On munit $\mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbf{R})$ de la topologie de convergence uniforme de toutes les dérivées. Ce n'est pas un espace normé, mais c'est quand même un espace vectoriel topologique et même ce que l'on appelle un espace de Fréchet.

PROPOSITION 1.5.3. — *La dérivation $\mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbf{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbf{R}), \varphi \mapsto \varphi'$ est une application linéaire continue ayant une orbite dense.*

Cette proposition vous est laissée en exercice afin d'égayer le reste de votre week-end. Il faudra évidemment utiliser le théorème de Weierstrass de densité des polynômes dans l'espace des fonctions indéfiniment dérivables. L'inverse à droite de la dérivation $B : \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbf{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbf{R})$ donné par intégration $B(\varphi)(x) = \int_0^x \varphi(t) dt$ est aussi utile.

2. Systèmes dynamiques discrets : stabilité structurelle

Le but de ce chapitre est l'introduction de la notion de stabilité structurelle et l'étude d'un exemple simple où elle intervient.

2.1. Conjugaison topologique et stabilité structurelle

DÉFINITION 2.1.1 (Conjugaison topologique). — *Si $h : X \rightarrow X$ et $f : Y \rightarrow Y$ sont des applications continues des espaces topologiques X et Y . Une conjugaison topologique entre f et h est semi-conjugaison topologique $\theta : X \rightarrow Y$ où θ est un homéomorphisme de X sur Y .*

Il est clair que l'on tient là la notion raisonnable d'isomorphisme pour les systèmes dynamiques.

2.1.2. Exemple. — Considérons l'homothétie $h_\lambda : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, où $\lambda \in]0, 1[$. Montrons que deux telles applications sont topologiquement conjuguées. En effet, si λ_1 et λ_2 appartiennent à $]0, 1[$, alors, il existe $\alpha > 0$ avec $\lambda_1^\alpha = \lambda_2$. Définissons l'homéomorphisme $\theta : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ par $\theta(x) = x^\alpha$, si $x \geq 0$ et $\theta(x) = -|x|^\alpha$, si $x \leq 0$. On vérifie que $h_{\lambda_2} \circ \theta = \theta \circ h_{\lambda_1}$.

A titre d'exercice instructif, on pourra montrer que deux homéomorphismes de l'intervalle $[0, 1]$ sur lui-même n'ayant que 0 et 1 comme points fixes sont toujours topologiquement conjugués.

Si on repense au problème de modélisation de systèmes physiques ou biologiques, même quand on est arrivé à la loi qui gouverne le phénomène, en général, cette loi va nous donner un système dynamique $f : X \rightarrow X$ qui n'est pas complètement connu car la forme exacte va dépendre de la mesure de certaines constantes qui interviennent dans f . Par conséquent, une situation idéale est celle où une petite erreur sur f redonne un système topologiquement conjugué. Ceci nous mène à une définition de la stabilité structurelle. Afin de pouvoir la donner simplement, nous allons ne considérer que des systèmes dynamiques définis sur une partie d'un espace normé.

DÉFINITION 2.1.3 (Stabilité structurelle). — *Supposons que X soit une partie de l'espace normé E . Un système dynamique $f : X \rightarrow X$ est structurellement stable, s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que toute application $g : X \rightarrow X$ vérifiant $\|g - f\|_0 = \sup_{x \in X} \|g(x) - f(x)\| < \varepsilon$ et $\text{Lip}(g - f) < \varepsilon$ est topologiquement conjuguée à f .*

Nous utilisons la notation $\text{Lip}(\varphi)$ pour désigner la constante lipschitzienne de $\varphi : X \rightarrow Y$ application entre espaces métriques :

$$\text{Lip}(\varphi) = \sup \left\{ \frac{d(\varphi(x), \varphi(x'))}{d(x, x')} \mid x, x' \in X, x \neq x' \right\}.$$

La définition que nous venons de donner de la stabilité structurelle est adaptée à notre contexte.

On peut se demander pourquoi on impose une condition de proximité lipschitzienne et pas seulement une proximité dans la topologie C^0 . Pour comprendre la nécessité de cette condition, nous proposons, l'exercice suivant :

2.1.4. *Exercice.* — Soit h un homéomorphisme strictement croissant de $[0, 1]$ sur lui-même. Montrer qu'il existe pour tout $\varepsilon > 0$ deux homéomorphismes $h_1, h_2 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tels que $\sup_{x \in [0, 1]} |h_i(x) - h(x)| < \varepsilon, i = 1, 2$, que h_1 soit l'identité sur un voisinage de 0 et que h_2 admette 0 comme point fixe isolé.

2.2. Stabilité structurelle des dilatations linéaires

THÉORÈME 2.2.1. — Soit $A : E \rightarrow E$ un isomorphisme linéaire de l'espace de Banach E . Si $\|A^{-1}\| < 1$, alors A est structurellement stable.

Démonstration. — Nous allons appliquer le théorème de point fixe de Banach. Introduisons $\mathcal{C}_b(E, E)$ des fonctions continues $\theta : E \rightarrow E$ bornées, c'est-à-dire vérifiant :

$$\|\theta\|_0 = \sup\{\|\theta(x)\| \mid x \in E\} < \infty.$$

L'espace $\mathcal{C}_b(E, E)$ est un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\|_0$.

Commençons par le lemme :

LEMME 2.2.2. — Pour tout $\eta \in \mathcal{C}_b(E, E)$, il existe (un unique) $\psi \in \mathcal{C}_b(E, E)$ tel que $A \circ (\text{Id}_E + \psi) = (\text{Id}_E + \psi) \circ (A + \eta)$. De plus, dans le cas où $E = \mathbf{R}^n$, si $A(\mathbf{Z}^n) \subset \mathbf{Z}^n$ et η est \mathbf{Z}^n -périodique, alors ψ est aussi \mathbf{Z}^n -périodique.

Démonstration. — L'équation $A \circ (\text{Id}_E + \psi) = (\text{Id}_E + \psi) \circ (A + \eta)$ s'écrit

$$\text{Id}_E + \psi = A^{-1} \circ (\text{Id}_E + \psi) \circ (A + \eta) = \text{Id}_E + A^{-1} \circ \psi \circ (A + \eta) + A^{-1} \circ \eta$$

ou encore $\psi = A^{-1} \circ \psi \circ (A + \eta) + A^{-1} \circ \eta$. Il suffit alors de montrer que l'application

$$\begin{aligned} \Theta : \mathcal{C}_b(E, E) &\longrightarrow \mathcal{C}_b(E, E) \\ \psi &\longmapsto A^{-1} \circ \psi \circ (A + \eta) + A^{-1} \circ \eta \end{aligned}$$

est une contraction. Or

$$\begin{aligned} \|\Theta(\psi_1) - \Theta(\psi_2)\|_0 &= \|A^{-1} \circ \psi_1 \circ (A + \eta) - A^{-1} \circ \psi_2 \circ (A + \eta)\|_0 \\ &\leq \|A^{-1}\| \|\psi_1 - \psi_2\|_0. \end{aligned}$$

Dans le cas, où $E = \mathbf{R}^n$, $A(\mathbf{Z}^n) \subset \mathbf{Z}^n$ et η est \mathbf{Z}^n -périodique le sous-espace de $\mathcal{C}_b(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ constitué par les fonctions \mathbf{Z}^n -périodiques est fermé et invariant par Θ donc le point fixe de Θ est dans ce sous-espace. \square

LEMME 2.2.3. — Avec les notations du lemme ci-dessus, si l'on a $\text{Lip}(\eta) < \|A^{-1}\|^{-1} - 1$ alors $\text{Id}_E + \psi$ est injective.

Démonstration. — Commençons par remarquer que l'on a, pour tout $x, y \in E$,

$$\|Ax - Ay\| \geq \|A^{-1}\|^{-1}\|x - y\|.$$

En posant $f = A + \eta$, on trouve

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\| &\geq \|Ax - Ay\| - \|\eta(x) - \eta(y)\| \\ &\geq (\|A^{-1}\|^{-1} - \text{Lip}(\eta))\|x - y\|. \end{aligned}$$

Notons alors $k = \|A^{-1}\|^{-1} - \text{Lip}(\eta) > 1$, on a donc $\|f(x) - f(y)\| \geq k\|x - y\|$, pour tout $x, y \in E$. Par récurrence, on obtient $\|f^n(x) - f^n(y)\| \geq k^n\|x - y\|$, pour tout $x, y \in E$ et tout $n \in \mathbf{N}$. Comme $k > 1$, ceci nous donne :

$$\forall x, y \in E, x \neq y \Rightarrow \sup_{n \in \mathbf{N}} \|f^n(x) - f^n(y)\| = \infty. \quad (\spadesuit)$$

Posons $h = \text{Id}_E + \psi$. Pour tout $x \in E$, on a $\|h(x) - x\| \leq \|\psi\|_0$. De plus pour tout $n \geq 0$, on a $A^n \circ h = h \circ f^n$. Si $h(x) = h(y)$, on trouve que $h \circ f^n(x) = h \circ f^n(y)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ et par conséquent $\sup_{n \in \mathbf{N}} \|f^n(x) - f^n(y)\| \leq 2\|\psi\|_0 < \infty$, par (\spadesuit) , on en conclut $x = y$. \square

Pour conclure que $A + \eta$ est topologiquement conjugué à A , il reste à voir que $h = \text{Id}_E + \psi$ est surjectif avec un inverse continu. Il faut, en fait, raffiner l'argument donné plus haut en échangeant le rôle de A et f et en jouant sur l'unicité de ψ . Plutôt que de s'embarquer dans un raffinement technique de ce qui précède, nous allons donner un argument direct dans le cas où $E = \mathbf{R}$; c'est ce seul cas que nous utiliserons dans la prochaine section pour établir la stabilité structurelle de $\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S}, z \mapsto z^p, p \geq 2$.

LEMME 2.2.4. — *Toute application continue $h : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, vérifiant l'inégalité $\sup_{t \in \mathbf{R}} |h(t) - t| < \infty$, est surjective.*

Démonstration. — Soit $K = \sup_{t \in \mathbf{R}} |h(t) - t|$. On a $h([-n, n]) \supset [h(-n), h(n)]$. Or $h(n) \geq n - K$ et $h(-n) \leq -n + K$, par conséquent pour n grand $h([-n, n]) \supset [-n + K, n - K]$. \square

Remarque. — L'argument précédent repose sur la connexité. Le même lemme est vrai pour une application continue $h : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, vérifiant $\sup_{x \in \mathbf{R}^n} |h(x) - x| < \infty$, mais la démonstration repose sur le théorème du point fixe de Brouwer (en fait, c'est équivalent au théorème de Brouwer).

2.3. Stabilité structurelle de $m_p, p \geq 2$

Le but de cette section est de démontrer le théorème :

THÉORÈME 2.3.1. — *Si $p \geq 2$, l'application $m_p : \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S}$ est structurellement stable.*

Soit $f : \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S}$ une application continue telle que $\|f - m_p\|_0 < \varepsilon_1$ et $\text{Lip}(f - m_p) < \varepsilon_2$. On a donc

$$\left| \frac{f(z)}{z^p} - 1 \right| = |f(z) - z^p| < \varepsilon_1.$$

En prenant ε_1 assez petit, on peut définir $\eta : \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{R}$ par $\eta(z) = \kappa(f(z)z^{-p})$, où κ est l'inverse de $\widetilde{\text{exp}}$ introduit à la fin de la section 3.4. Si on pose $\bar{\eta} = \eta \circ \widetilde{\text{exp}} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, on a que $\bar{\eta}$ est continue, \mathbf{Z} -périodique et $\|\bar{\eta}\|_0 \rightarrow 0$ quand $\varepsilon_1 \rightarrow 0$. De plus, si on pose $\bar{f}(x) = px + \bar{\eta}(x)$, on voit que $\widetilde{\text{exp}} \circ \bar{f} = f \circ \widetilde{\text{exp}}$, c'est-à-dire que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \xrightarrow{\bar{f}} & \mathbf{R} \\ \widetilde{\text{exp}} \downarrow & & \downarrow \widetilde{\text{exp}} \\ \mathbf{S} & \xrightarrow{f} & \mathbf{S} \end{array}$$

On peut aussi voir que $\text{Lip}(\bar{\eta}) \rightarrow 0$ quand ε_1 et ε_2 tendent vers 0. Comme $p \geq 2$, l'application linéaire $A_p : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto px$ a un inverse qui est une contraction, par conséquent, pour ε_1 et ε_2 assez petit, on trouve un homéomorphisme $\bar{h} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ de la forme $\text{Id}_{\mathbf{R}} + \psi$ tel que $A_p \circ \bar{h} = \bar{h} \circ \bar{f}$. Comme $\bar{\eta}$ est \mathbf{Z} -périodique et $A_p(\mathbf{Z}) = p\mathbf{Z} \subset \mathbf{Z}$, on a que ψ est \mathbf{Z} -périodique. Par conséquent l'homéomorphisme \bar{h} vérifie $\bar{h}(x+1) = \bar{h}(x) + 1$. Il en résulte que l'on peut définir un homéomorphisme $h : \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S}$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \xrightarrow{\bar{h}} & \mathbf{R} \\ \widetilde{\text{exp}} \downarrow & & \downarrow \widetilde{\text{exp}} \\ \mathbf{S} & \xrightarrow{h} & \mathbf{S} \end{array}$$

On vérifie sans peine que la relation $A_p \circ \bar{h} = \bar{h} \circ \bar{f}$ se traduit par le fait que h est une conjugaison topologique entre f et m_p .

Pour ceux qui savent ce qu'est la notion d'homotopie, nous proposons de résoudre l'exercice suivant :

2.3.2. *Exercice.* — Si $f : \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S}$ est continue et homotope à m_p , avec $p \geq 2$, montrer qu'il y a une semi-conjugaison entre f et m_p .

Bibliographie

- [Ch] A. CHENCINER, *Systèmes Dynamiques Différentiables*, Encyclopaedia Universalis **17** (1985), 594–630.
- [Dev] R. L. DEVANEY, *An introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Benjamin/Cummings, 1986.

- [HK] B. HASSELBLATT, A. KATOK, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, 1995.
- [Sh] M. SHUB, *Stabilité globale des systèmes dynamiques*, Astérisque vol. 56, Société Mathématique de France, 1978.

Département de Mathématiques et Informatique
Ecole Normale Supérieure de Lyon
46, Allée d'Italie
69364 Lyon cedex 07

Adresse électronique : afathi@umpa.ens-lyon.fr

Systèmes dynamiques hyperboliques

PATRICK FOULON

Introduction

Pour produire des systèmes dynamiques avec un comportement riche et complexe, il faut de la récurrence. Presque toute orbite doit revisiter souvent (indéfiniment) un voisinage de son origine. C'est pour forcer ce retour (de Poincaré) que nous allons travailler avec des modèles linéaires "compactifiés". Mais ce n'est pas suffisant : il faut aussi une forte sensibilité aux conditions initiales. Les modèles hyperboliques qui présentent une sensibilité exponentielle uniforme sont les exemples les plus simples.

1. Les automorphismes linéaires hyperboliques

1.1. Le cadre géométrique, les tores

Dans cette partie nous présentons brièvement les tores. Plusieurs résultats sont admis ou laissés en exercice.

Le tore \mathbf{T}^k de dimension $k \geq 1$ est le groupe abélien quotient de $(\mathbf{R}^k, +)$ par le sous-groupe abélien $(\mathbf{Z}^k, +)$. On note $\pi : \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}^k/\mathbf{Z}^k$ la projection sur les classes. Comme d'habitude on considère \mathbf{R}^k muni de sa structure euclidienne canonique qui détermine sa topologie. Le tore \mathbf{T}^k est, lui, muni de la *topologie quotient* correspondante, pour laquelle notamment π est continue. Cette topologie est aussi définie par la distance d sur le tore :

$$d(a, b) = \inf\{\|x - x'\|_{\mathbf{R}^k}, \pi(x) = a, \pi(x') = b\}.$$

Nous aurons à considérer des applications continues $f : \mathbf{T}^k \rightarrow \mathbf{T}^k$. Il est bon de remarquer qu'il existe alors $F = f \circ \pi : \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{T}^k$ elle aussi continue. Nous admettrons (ou exercice)

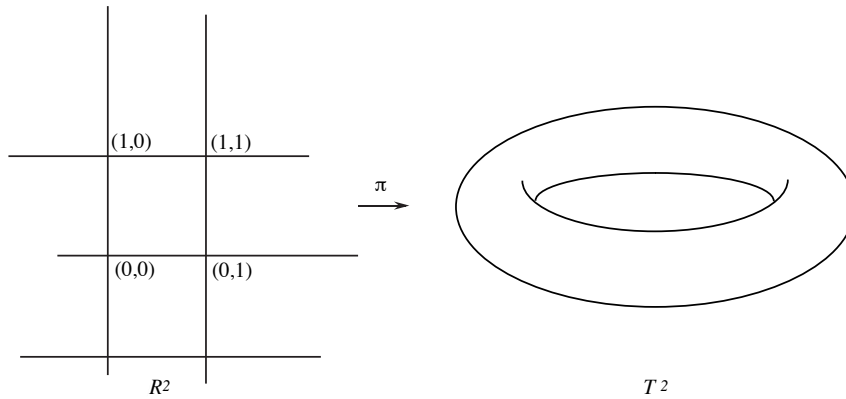


FIG 1

Figure 1

PROPOSITION 1.1.1. — Soit $f : \mathbf{T}^k \rightarrow \mathbf{T}^k$ une application continue. Il existe un relèvement $\tilde{f} : \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}^k$ de f , c'est à dire une application continue telle que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{R}^k & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbf{R}^k \\
 \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\
 \mathbf{T}^k & \xrightarrow{f} & \mathbf{T}^k
 \end{array}
 \quad \pi \circ \tilde{f} = f \circ \pi.$$

Deux relèvements \tilde{f}_1, \tilde{f}_2 d'une même application f diffèrent par un entier :

$$\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2 + z_0, \quad z_0 \in \mathbf{Z}^k,$$

d'après la relation de commutation.

Pour faire du *calcul différentiel* sur le tore \mathbf{T}^k , il nous faudrait le munir d'une structure de variété différentiable. Par faute de temps et de place nous dirons qu'une application $f : \mathbf{T}^k \rightarrow \mathbf{T}^k$ est dans $C^1(\mathbf{T}^k, \mathbf{T}^k)$ si un quelconque de ses relèvements \tilde{f} est continuellement différentiable. Nous noterons que la *différentielle* $D_p f$ de f en un point p du tore \mathbf{T}^k est donnée par l'endomorphisme linéaire de \mathbf{R}^k

$$D_p f = D_x \tilde{f}$$

pour un quelconque $x \in \mathbf{R}^k$ tel que $\pi(x) = p$.

Exercice. — Vérifier que le terme de droite de cette égalité est bien indépendant du représentant x .

Les mêmes définitions et notations s'étendent sans peine aux applications de classe C^k , et aux fonctions $g : \mathbf{T}^k \rightarrow \mathbf{C}$ à valeurs dans \mathbf{C} (ou \mathbf{R}).

A plusieurs reprises un point p du tore sera représenté par ses “*coordonnées*” notées

$$p = (x_1, \dots, x_k) \pmod{(1)},$$

où $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbf{R}^k$ et $\pi(x) = p$.

1.2. La mesure de Haar sur les tores

Pour calculer des moyennes il nous sera utile de disposer d’une *mesure* sur le tore \mathbf{T}^k qui présente des propriétés analogues à celle de la mesure de Lebesgue de \mathbf{R}^k (nous utiliserons sans le dire l’identification donnée par le *théorème de représentation* de Riesz).

THÉORÈME 1.2.1. — *Il existe une unique mesure de Radon (forme linéaire sur l’espace des fonctions continues à support compact) sur le tore \mathbf{T}^k qui soit invariante par les translations et de masse totale 1.*

On la note m , on l’appelle *mesure de Haar* de \mathbf{T}^k . Elle est donnée par la relation

$$\forall \varphi \in C^0(\mathbf{T}^k, \mathbf{C}), \quad m(\varphi) = \int_{\mathbf{T}^k} \varphi \cdot dm = \int \cdots \int_{[0,1]^k} \varphi \circ \pi(x) \cdot dx_1 \cdots dx_n$$

Idée de la démonstration. — La formule définissante nous donne évidemment une forme linéaire sur $C^0(\mathbf{T}^k, \mathbf{C})$. De plus, comme $\varphi \circ \pi$ est une fonction \mathbf{Z}^k -périodique, nous avons, pour tout $\beta \in \mathbf{R}^k$,

$$\int \cdots \int_{[0,1]^k} \varphi \circ \pi(x + \beta) dx_1 \cdots dx_n = \int \cdots \int_{[0,1]^k} \varphi \circ \pi(x) dx_1 \cdots dx_n.$$

Il en résulte que la mesure de Haar est invariante par les translations car pour tout $\alpha \in \mathbf{T}^k$, si τ_α est la translation de α , il existe $\beta \in \mathbf{R}^k$ tel que $\pi(\beta) = \alpha$ (voir 1.1.1) et

$$\tau_\alpha \circ \pi = \pi \circ \tilde{\tau}_\alpha = \pi \circ \tau_\beta.$$

Nous admettrons l’unicité. Enfin, $m(\mathbf{T}^k) = \int_{\mathbf{T}^k} 1 dm = 1$. \square

1.3. Les automorphismes linéaires des tores

Le modèle linéaire servira de fil conducteur tout au long de cet exposé. Tout endomorphisme linéaire L de \mathbf{R}^k tel que $L(\mathbf{Z}^k) \subset \mathbf{Z}^k$ induit naturellement un homomorphisme F_L de \mathbf{T}^k . L’ensemble de ces homomorphismes sera noté $\text{End}(\mathbf{T}^k)$. Remarquons que

$$F \in \text{End}(\mathbf{T}^k) \iff \exists! L \in \text{End}(\mathbf{R}^k), L = \tilde{F}.$$

De plus nous avons

PROPOSITION 1.3.1. — Si $F_L \in \text{End}(\mathbf{T}^k)$, alors

(i) F_L est continue,

(ii) F_L est un homéomorphisme si et seulement si $\det L = \pm 1$.

Nous dirons qu'un homomorphisme F_L est dans l'ensemble $\text{Aut}(\mathbf{T}^k)$ des *automorphismes* linéaires du tore si F_L est un *homéomorphisme*.

Démonstration.

(i) Soit U un ouvert de \mathbf{T}^k . Sa préimage est, par définition de la topologie induite, un ouvert de \mathbf{R}^k . La projection est ici une application ouverte et il n'y a plus qu'à invoquer la continuité de L .

(ii) Si F_L est un homéomorphisme de \mathbf{T}^k son inverse F_L^{-1} admet un unique relèvement linéaire $B = L^{-1}$. Par conséquent $L^{-1}(\mathbf{Z}^k) \subset \mathbf{Z}^k$. Ainsi L et L^{-1} sont à coefficients entiers dans la base canonique de \mathbf{R}^k . On conclut en remarquant que $\det(L^{-1}) = 1/\det L$ doit lui aussi être un entier.

Réciproquement si $\det L = \pm 1$ alors L^{-1} est à coefficients entiers, et, d'après (i) l'application induite $F_{L^{-1}}$ est continue ainsi que F_L . Elles sont inverses l'une de l'autre. \square

Un automorphisme linéaire du tore nous fournit un nouvelle exemple de transformation préservant la mesure de Haar. Plus précisément nous avons

PROPOSITION 1.3.2. — Si $F_L \in \text{Aut}(\mathbf{T}^k)$ alors $F_{L*}m = m$.

Démonstration. — D'après le théorème de Riesz il faut vérifier que pour toute $g \in C^0(\mathbf{T}^k, \mathbf{R})$ nous avons

$$\int_{\mathbf{T}^k} g \circ F_L \cdot dm = \int_{\mathbf{T}^k} g \cdot dm.$$

En se référant au théorème 1.2.1, il suffit en fait d'observer que $F_{L*}m$ est invariante par translation. Pour tout $\alpha \in \mathbf{T}^k$, et $\beta \in \mathbf{R}^k$ tel que $\pi(\beta) = \alpha$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{T}^k} g \circ \tau_\alpha \circ F_L \cdot dm &= \int \cdots \int_{[0,1]^k} g \circ \tau_\alpha \circ F_L(\pi(x)) \cdot dx_1 \cdots dx_n \\ &= \int \cdots \int_{[0,1]^k} g \circ \tau_\alpha \cdot \pi(L(x)) \cdot dx_1 \cdots dx_n \\ &= \int \cdots \int_{[0,1]^k} g(\pi(L(x) + \beta)) \cdot dx_1 \cdots dx_n \\ &= \int \cdots \int_{[0,1]^k} g(F_L(\pi(x + L^{-1}(\beta)))) \cdot dx_1 \cdots dx_n \\ &= \int_{\mathbf{T}^k} g \circ F_L \cdot dm. \end{aligned}$$

L'invariance de la masse est évidente par surjectivité. \square

Encore une propriété générale, les automorphismes linéaires des tores ont beaucoup d'orbites périodiques. Elles sont mêmes partout denses.

PROPOSITION 1.3.3. — *Pour tout $F_L \in \text{Aut}(\mathbf{T}^k)$*

- (i) $\mathbf{Q}^k/\mathbf{Z}^k \subset \text{Per}(F_L)$,
- (ii) $\overline{\text{Per}(F_L)} = \mathbf{T}^k$.

Démonstration.

(i) L'ensemble défini pour $q \in \mathbf{Z}$ par

$$\Lambda_q = \left\{ \pi \left(\frac{P_1}{q}, \dots, \frac{P_k}{q} \right), (P_1, \dots, P_k) \in \mathbf{Z}^k \right\}$$

contient q^k éléments. Il est invariant par F_L puisque L est à coefficients entiers et

$$F_L \left(\pi \left(\frac{P_1}{q}, \dots, \frac{P_n}{q} \right) \right) = \pi \left(\frac{1}{q} L(P_1, \dots, P_n) \right).$$

Par conséquent, pour tout $x \in \Lambda_q$ il existe $n_1 < n_2$ dans \mathbf{N} tels que $F_L^{n_2}(x) = F_L^{n_1}(x)$, donc $F_L^{n_2}(x) = x$.

(ii) est dès lors évident.

1.4. Les automorphismes linéaires hyperboliques des tores

Ils vont constituer notre principal exemple de système dynamique. Mais auparavant nous allons faire une digression justifiée par leurs actions, elles aussi hyperboliques, sur certains espaces fonctionnels.

DÉFINITION 1.4.1. — *Un endomorphisme continu $L : E \rightarrow E$ de l'espace de Banach E est dit hyperbolique, s'il existe :*

- *une décomposition invariante par L en somme de sous-espaces fermés $E = E^s \oplus E^u$,*
- *une norme $\| \cdot \|$ dite adaptée et qui définit la topologie,*

telles que

- (i) *l'endomorphisme $L|_{E^u} : E^u \rightarrow E^u$ est inversible, d'inverse continu,*
- (ii) *les endomorphismes $L|_{E^s}$ et $(L|_{E^u})^{-1}$ sont des contractions (c'est-à-dire que l'on a $\|L|_{E^s}\|, \|(L|_{E^u})^{-1}\| < 1$),*
- (iii) *pour tout $x \in E$, si on écrit $x = x^s + x^u$ avec $x^s \in E^s$, $x^u \in E^u$, alors $\|x\| = \max(\|x^s\|, \|x^u\|)$.*

Par exemple, un automorphisme linéaire de \mathbf{R}^k est hyperbolique si et seulement s'il n'a pas de valeurs propres sur \mathbf{C} de module 1.

Exercice. — Le démontrer.

Pour celà, on pourra aussi faire l'exercice suivant.

Exercice. — Soient $A \in \text{End}(\mathbf{R}^k)$, $\rho(A)$ le maximum des modules des valeurs propres réelles ou complexes de A . Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver une norme sur \mathbf{R}^k pour laquelle $\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon$.

DÉFINITION 1.4.2. — Une automorphisme linéaire F_L du tore \mathbf{T}^k est dit hyperbolique s'il est induit par un automorphisme linéaire hyperbolique de \mathbf{R}^k . On notera $H(\mathbf{T}^k)$ leur ensemble.

Un exemple bien connu sur le tore T^2 :

$$F_L(x, y) = (2x + y, x + y) \pmod{1}, \quad \text{avec } L(x, y) = (2x + y, x + y).$$

Les valeurs propres de L sont

$$\lambda_2 = \lambda_1^{-1} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} < 1 < \lambda_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

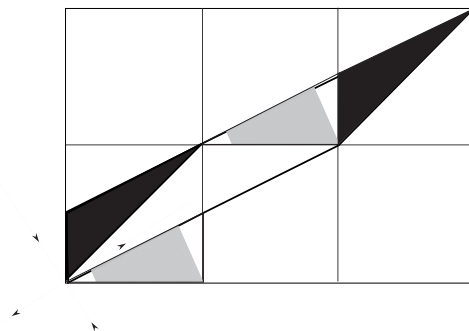


Figure 2

Leurs propriétés dynamiques s'apparentent à celles de l'application expansive sur le cercle unité $z \rightarrow z^p$, elles sont plus complexes que celles des translations des tores, comme nous allons l'observer. Quand on essaye de dénombrer les orbites périodiques, on s'aperçoit que leur nombre croît (asymptotiquement) exponentiellement. En effet

PROPOSITION 1.4.3. — Soit F_L un automorphisme linéaire hyperbolique du tore \mathbf{T}^k . Si $N_p(F_L)$ est le nombre de points périodiques de période qui divise l'entier $p > 1$ alors

$$(i) \quad N_p(F_L) = |\det(L^p - \text{Id}_{\mathbf{R}^k})|$$

$$(ii) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \log N_p(F_L) = \sum_{i=1}^r \mu_i \log |\lambda_i|$$

où les λ_i sont les valeurs propres de L de module $|\lambda_i| > 1$, et μ_i sont les multiplicités correspondantes.

Démonstration.

(i) Un point $x \in \mathbf{T}^k$ est périodique de période p si $(F_L^p - \text{Id}_{\mathbf{T}^k})(x) = 0$. L'automorphisme F_L étant hyperbolique, L l'est et par conséquent L^p aussi. Donc $F_L^p - \text{Id}_{\mathbf{T}^k}$ est induit par un automorphisme linéaire de \mathbf{R}^k . Il va nous falloir un lemme (assez amusant) pour compter les préimages.

LEMME. — Soit $F_A \in \text{End}(\mathbf{T}^k)$, tel que de plus $\det A \neq 0$. Alors, pour tout $x \in \mathbf{T}^k$ on a $\#F_A^{-1}\{x\} = |\det A|$.

Preuve du lemme. — Comme A est bijective, F_A est surjective donc pour tout $x \in \mathbf{T}^k$, il existe un point $y \in \mathbf{T}^k$ tel que $F_A(x) = y$. Par conséquent $F_A^{-1}\{x\} = y + F_A^{-1}\{0\}$ a un cardinal qui ne dépend pas de x .

Utilisons maintenant le fait que F_A est localement injective. Plus précisément soit $B = B(0, R)$ la boule ouverte dans \mathbf{R}^k de centre 0 de rayon $R < \inf(1/2, 1/2\|A\|)$. La projection π est injective en restriction aux ouverts $V = B \cap A^{-1}(B)$ et $A(V)$. Pour $X \in V$, si $0 = F_A(\pi(X)) = \pi(A(X))$ alors $A(X) = 0$. Par injectivité de A il vient $X = 0$. Nous en déduisons que si $y, y' \in F_A^{-1}\{x\}$ sont distincts, alors $(y + \pi(V)) \cap (y' + \pi(V)) = \emptyset$. En effet sinon il existe x et x' dans V tels que $y + \pi(x) = y' + \pi(x')$. En appliquant F_A il vient $F_A(\pi(x)) = F_A(\pi(x'))$, soit $\pi(A(x)) = \pi(A(x'))$. Par injectivité de π sur $A(V)$ il vient $A(x) = A(x')$, soit $x = x'$.

Le cardinal de $F_A^{-1}\{x\}$ est donc, par invariance de la mesure de Haar, borné par $1/m(\pi(V))$ ($m(\pi(V)) \neq 0$).

Soient t_1, \dots, t_n les préimages de 0 par F_A . On a

$$F_A^{-1}(F_A(\pi(V))) = \bigcup_{i=1}^n (\pi(V) + t_i)$$

Ce qui nous donne $m(F_A(\pi(V))) = n \cdot m(\pi(V))$, en raison de l'invariance de la mesure de Haar par F_A . Il nous reste à appliquer la formule du changement de variable pour vérifier que $m(F_A(\pi(V))) = |\det A| m(\pi(V))$. \square

(ii) Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_{r'}) \in \mathbf{C}^{r'}$ les valeurs propres de L , (μ_i) leur multiplicités. Un simple développement nous donne

$$|\det(L^p - \text{Id})| = \left| \prod_{i=1}^{r'} (\lambda_i - 1)^{\mu_i} \right|.$$

D'où nous tirons

$$\frac{1}{p} \log |\det(L^p - \text{Id})| = \sum_{i=1}^{r'} \mu_i \frac{\log |\lambda_i^p - 1|}{p}.$$

D'autre part, pour tout nombre complexe qui n'est pas une racine de l'unité,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\lambda^n - 1| = \begin{cases} 0 & \text{si } |\lambda| < 1 \\ \log |\lambda| & \text{si } |\lambda| > 1 \end{cases}$$

d'où le résultat. \square

1.5. Variétés stables et instables

DÉFINITION 1.5.1. — Soit f un homéomorphisme d'un espace métrique X .

(i) La variété stable W_x^s du point $x \in X$ est l'ensemble

$$W_x^s = \{y \in X \mid \lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0\}.$$

(ii) La variété instable W_x^u du point x de X est l'ensemble

$$W_x^u = \{y \in X \mid \lim_{n \rightarrow \infty} d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) = 0\}.$$

Dans les applications, on souhaite en fait montrer que ces ensembles ont des propriétés plus fortes, comme par exemple d'être des variétés différentielles.

Ces notions sont particulièrement bien adaptées aux automorphismes linéaires hyperboliques des tores, puisque nous avons le

THÉORÈME 1.5.2. — Pour un automorphisme $F_L : \mathbf{T}^k \rightarrow \mathbf{T}^k$ linéaire hyperbolique du tore,

(i) les variétés stables et instables de 0 sont respectivement $W_0^s = \pi(E^s)$ et $W_0^u = \pi(E^u)$.

(ii) Pour tout point $x \in \mathbf{T}^k$ on a

$$W_x^s = x + W_0^s, \quad W_x^u = x + W_0^u.$$

(iii) Soit d une distance définissant la topologie. Pour ε assez petit on a

$$W_{x,\varepsilon}^s \stackrel{\text{déf}}{=} \{y \mid \forall n \in \mathbf{N} \, d(F_L^n(x), F_L^n(y)) \leq \varepsilon\} \subset W_x^s = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} F_L^{-n} W_{F_L^n(x), \varepsilon}^s.$$

et

$$W_{x,\varepsilon}^u \stackrel{\text{déf}}{=} \{y \mid \forall n \in \mathbf{N} \, d(F_L^{-n}(x), F_L^{-n}(y)) \leq \varepsilon\} \subset W_x^u = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} F_L^{-n} W_{F_L^n(x), \varepsilon}^u.$$

(iv) Si la distance d vient d'une norme $\|\cdot\|$ sur \mathbf{R}^k adaptée à L , alors pour tout ε assez petit,

$$W_{x,\varepsilon}^s = x + \pi(B^s(0, \varepsilon)), \quad W_{x,\varepsilon}^u = x + \pi(B^u(0, \varepsilon))$$

(où $B^s(0, \varepsilon) = \{v \in E^s \mid \|v\| \leq \varepsilon\}$, $B^u(0, \varepsilon) = \{v \in E^u \mid \|v\| \leq \varepsilon\}$).

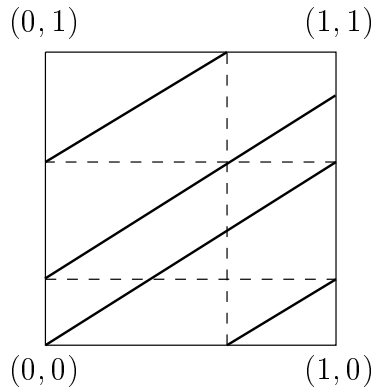


Figure 3

$$F_L(x, y) = (2x + y, x + y) \bmod (1), \quad W_0^u \text{ est la droite } y = \frac{\sqrt{5}-1}{2}x \bmod (1)$$

Démonstration.

(iv) Soit $\|\cdot\|$ une norme sur \mathbf{R}^k adaptée à L . On notera d les distances correspondantes sur \mathbf{R}^k et \mathbf{T}^k .

Soit $\delta = \min\{\|z\| \mid z \in \mathbf{Z}^k - \{0\}\}$. Si $d(0, y)$ et $d(0, F_L(y))$ sont $< \delta\|L\|^{-1}/2$, on peut trouver $v \in \mathbf{R}^k$ et $z \in \mathbf{Z}^k$ tels que :

$$\pi(v) = y; \quad \|v\| = d(0, y), \quad \|L(v) + z\| = d(0, F_L(y)).$$

Observons que $z = 0$, car

$$\begin{aligned} \|z\| &\leq \|z + L(v)\| + \|-L(v)\| \\ &\leq d(0, F_L(y)) + \|L\| \|v\| \\ &= d(0, F_L(y)) + d(0, y) \|L\| \\ &\leq (d(0, F_L(y)) + d(0, y)) \|L\| \quad \text{car } \|L\| \geq \|L|_{E^u}\| \geq \|L|_{E^u}^{-1}\|^{-1} > 1 \\ &< \delta. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\forall \varepsilon < \delta\|L\|^{-1}/2, \quad W_{x,\varepsilon}^s = \pi \left(\{v \in \mathbf{R}^k \mid \forall n \in \mathbf{N} \|L^n(v)\| \leq \varepsilon\} \right).$$

Mais tout $v \in \mathbf{R}^k$, se décompose en $v = v_s + v_u$, $v_s \in E^s$, $v_u \in E^k$. La norme étant adaptée, nous avons

$$\begin{aligned} \|L^{-n}(L^n(v_u))\| = \|v_u\| &\leq \|L|_{E^u}^{-1}\|^n \|L^n(v_u)\| \\ &\leq \|L|_{E^u}^{-1}\|^n \|L^n(v)\| \\ &\leq \|L|_{E^u}^{-1}\|^n \cdot \varepsilon. \end{aligned}$$

Le terme de droite de l'inégalité tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$. Donc $v_u = 0$ et $v \in E^s$ avec $\|v\| \leq \varepsilon$.

Ensuite on revient à la définition. Si un point $y \in W_0^s$, il existe un N tel que $n \geq N$, $d(F_L^n(y), 0) < \varepsilon$, donc $F_L^N(y)$, est dans $W_{0,\varepsilon}^s$. Ce qui prouve (iii) pour l'origine et une distance adaptée.

Par ailleurs, $E^s = \cup_{n \in \mathbf{N}} L^{-n}(B^s(0, \varepsilon))$, et donc

$$\begin{aligned} \pi(E^s) &= \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \pi(L^{-n}(B^s(0, \varepsilon))) \\ &= \bigcup_{n \in \mathbf{N}} F_L^{-n}(\pi(B^s(0, \varepsilon))) \\ &= W_0^s. \end{aligned}$$

Il ne nous reste plus qu'à considérer la feuille stable d'un point $x \neq 0$. Puisque $F_L^n(x) - F_L^n(y) = F_L^n(x - y)$, on a $y \in W_x^s$ si et seulement si $x - y \in W_0^s$.

Pour conclure (iii), remarquons que si d_1 est une distance pas nécessairement adaptée, mais qui donne la topologie, alors par la compacité de \mathbf{T}^k , il existe $\lambda > 0$, tel que $d_1 \geq \lambda d$. Il en résulte que

$$\{y \mid \forall n \in \mathbf{N} \ d_1(F_L^n(x), F_L^n(y)) \leq \lambda \varepsilon\} \subset W_x^s. \quad \square$$

Pour la suite, voici une importante propriété des feuilles stables (instables).

PROPOSITION 1.5.3. — *les variétés stables et instables d'un automorphisme linéaire hyperbolique du tore $F_L : \mathbf{T}^k \rightarrow \mathbf{T}^k$ sont denses dans \mathbf{T}^k .*

Démonstration. — Il suffit de montrer que la feuille stable (instable) de 0 est partout dense dans \mathbf{T}^k . Choisissons sur \mathbf{R}^k une norme $\| \cdot \|$ adaptée. Pour tout $x \in \mathbf{T}^k$, considérons la suite $x_n = F_L^n(x)$. On peut choisir des relevés $y_n \in [0, 1]^k$, $\pi(y_n) = x_n$. Si on écrit $y_n = y_n^s + y_n^u$ suivant la décomposition $E^s \oplus E^u$, on a, par compacité de $[0, 1]^k$, l'inégalité $\|y_n^u\| \leq \|y_n\| \leq C$. Par conséquent

$$\|L^{-n}(y_n^u)\| \leq \|L|_{E^u}^{-1}\|^n \cdot C \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} x &= \pi(L^{-n}(y_n^s) + L^{-n}(y_n^u)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \pi(L^{-n}(y_n^s)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} F_L^{-n}(\pi(y_n^s)). \end{aligned}$$

Mais $\pi(y_n^s) \in W_0^s$. \square

Cette propriété va nous donner dans le paragraphe suivant des informations sur la dynamique des automorphismes linéaires hyperboliques du tore.

1.6. Transitivité et mélange topologique

La dynamique d'une translation $\tau_\alpha : T^n \rightarrow T^n$ dépend de son vecteur de translation α . Un point $\alpha \in T^n$ est irrationnel si, quelque soit un relevé $\beta \in \mathbf{R}^n$ ($\pi(\beta) = \alpha$) et $k \in \mathbf{Z}^n$, alors $k \cdot \beta \in \mathbf{R} - \mathbf{Z}$.

Dans ce cas, la dynamique de $\tau_\alpha(x) = x + \alpha$ est minimale, ce qui signifie, rappelons-le, que toutes ses orbites sont denses. Cependant toutes les translations sont des isométries. Ce qui exclut qu'elles puissent assurer un mélange topologique comme le font les automorphismes linéaires hyperboliques.

DÉFINITION 1.6.1. — *Un système dynamique $f : X \rightarrow X$ est dit*

(i) *topologiquement mélangeant si pour toute paire d'ouverts $U, V \subset X$, il existe un entier N , tel que*

$$\forall n > N \quad f^n(U) \cap V \neq \emptyset.$$

(ii) *topologiquement transitif, si il existe $n_0 > 0$, tel que*

$$f^{n_0}(U) \cap V \neq \emptyset.$$

A l'évidence, (ii) est plus faible. Si X est un espace métrique complet, la transitivité topologique entraîne l'existence d'une orbite dense, par le théorème de Baire (exercice).

PROPOSITION 1.6.2.

(i) *Les automorphismes linéaires hyperboliques des tores sont topologiquement mélangeant.*

(ii) *Une isométrie n'est pas topologiquement mélangeante.*

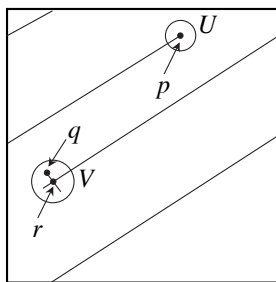


Figure 4

En particulier une translation n'est pas topologiquement mélangeante.

Démonstration.

(ii) Supposons que l'isométrie $f : \mathbf{T}^k \rightarrow \mathbf{T}^k$ est topologiquement mélangeante. Pour tout triplet x, y, z de points de \mathbf{T}^k , posons $\delta = d(y, z)$ et choisissons $\varepsilon < \delta/10$. Par hypothèse il existe N tel que pour tout $n > N$, il existe $x'_n \in f^n(B(x, \varepsilon)) \cap B(y, \varepsilon)$

et $x_n'' \in f^n(B(x, \varepsilon)) \cap B(z, \varepsilon)$. Mais alors $f^{-n}(x_n')$ et $f^{-n}(x_n'')$ sont dans $B(x, \varepsilon)$ ce qui nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} \delta = d(y, z) &\leq d(y, x_n') + d(x_n', x_n'') + d(x_n'', z) \\ &\leq \varepsilon + d(f^{-n}(x_n'), f^{-n}(x_n'')) + \varepsilon \\ &\leq 3\varepsilon ! \end{aligned}$$

(i) Soient F_L un automorphisme linéaire hyperbolique, U et V deux ouverts non vides de \mathbf{T}^k et $\varepsilon \ll 1$. Par la densité de la variété stable W_0^s de l'origine, il existe un point $x \in U \cap W_0^s$. Dès lors $F_L^n(x) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. On trouve de même un point $y \in V \cap W_0^u$, tel que $F_L^{-n}(y) \rightarrow 0$ qd $n \rightarrow \infty$. Ceci entraîne que pour n suffisamment grand $x + F_L^{-n}(y) \in U$, et $F_L^n(x + F_L^{-n}(y)) = F_L^n(x) + y \in V$. \square

Remarquons que nous avons, hormis la densité des variétés stables, et instables utilisé le fait que 0 est un point fixe.

1.7. Les problèmes de moyennes

L'exemple des automorphismes des tores nous présente une telle complexité topologique qu'il semble naturel d'étudier des moyennes de fonctions plutôt que leurs valeurs ponctuelles. On va observer un caractère "probabiliste" assez marqué de ces systèmes.

Nous supposons donné un ensemble X muni d'une mesure de probabilité μ , i.e. $\mu(X) = 1$ et une transformation $T : X \rightarrow X$ qui préserve la mesure i.e., pour tout ensemble mesurable A , $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$. Nous noterons ceci (X, μ, T) .

DÉFINITION 1.7.1. — Soit (X, μ, T) ,

(i) la moyenne temporelle d'une fonction $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ (ou \mathbf{C}) est définie lorsqu'elle existe par

$$f^*(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} f(T^p(x)), \quad x \in X, n \in \mathbf{N}.$$

(ii) La moyenne spatiale d'une fonction mesurable $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ est définie par

$$\bar{f} = \int_X f(x) d\mu.$$

Un des principaux résultats sur les moyennes est donné par le

THÉORÈME 1.7.2 (G.D. Birkhoff, théorème ergodique ponctuel).

Soit $T : X \rightarrow X$ une transformation qui préserve la mesure de probabilité μ et $f \in L^1(X, \mu)$. Alors $f^*(x)$ existe pour μ -presque tout $x \in X$, i.e. il existe $\Omega \subset X$, $\mu(\Omega) = 1$ et pour tout $x \in \Omega$, $f^*(x)$ existe. De plus f^* est sommable et

$$\int_X f^* d\mu = \int_X f d\mu.$$

Nous admettrons ce résultat. Un cas intéressant à considérer est celui où $f = \chi_A$ est la fonction caractéristique d'un ensemble $A \subset X$ mesurable. Il vient alors

$$\chi_A^*(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \#\{0 \leq j \leq n-1 \mid T^j(x) \in A\}.$$

Ce qui s'interprète naturellement comme le temps moyen passé par l'orbite \mathcal{O}_x du point x dans l'ensemble A .

Ceci conduit naturellement à la notion d'ergodicité. Mais auparavant nous suggérons au lecteur de tester l'exercice suivant.

1.7.3. *Exercice.* — Soit $F_L(x, y) \rightarrow (2x + y, x + y) \bmod (1)$ l'automorphisme linéaire hyperbolique du tore déjà rencontré. Considérons sur \mathbf{T}^2 la fonction $f(x, y) = e^{2i\pi x}$, $(x, y) \in T^2$ et W_0^s la variété stable de $(0, 0)$.

- Montrer que pour $(x, y) \in W_0^s$, $f^*(x, y) = 1$.
- Montrer que $\bar{f} = \int_{T^2} f \cdot dm = 0$. En déduire que f^* et \bar{f} sont différentes sur un ensemble dense. Comparer avec le théorème de Birkhoff et avec ce qui va suivre.

1.8. Ergodicité

Nous allons maintenant étudier la complexité, mais au niveau mesurable. La notion centrale est celle d'ergodicité.

DÉFINITION 1.8.1. — *Soit $T : X \rightarrow X$ une dynamique. Une mesure de probabilité T -invariante μ est ergodique si pour tout ensemble invariant $A \subset X$ on a $\mu(A) = 1$ ou $\mu(A) = 0$.*

Nous aurons surtout à l'esprit la proposition suivante.

PROPOSITION 1.8.2. — *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. (X, T, μ) est ergodique.
2. Si $f \in L^1(X, \mu)$ est une fonction T -invariante, alors f est presque partout constante.
3. Si $f \in L^2(X, \mu)$ est une fonction T -invariante, alors f est presque partout constante.
4. Pour toute fonction $f \in L^1(X, \mu)$ nous avons $f^*(x) = \int_X f d\mu$, μ -presque sûrement.

Remarques.

- La propriété n°4 est la plus connue. Elle est fréquemment employée par les physiciens comme base de la thermodynamique statistique.
- Si une mesure a un rôle particulier, comme dans le cas de la mesure de Haar sur les tores, on parle plutôt de transformation ergodique en oubliant souvent par rapport à quelle mesure.

Démonstration.

(2) \Rightarrow (3). Comme la mesure est finie on a $L^2(X, \mu) \subset L^1(X, \mu)$. En effet, puisque $|f(x) \cdot 1| \leq (|f(x)|^2 + |1|^2)/2$ on a

$$\int_X |f(x)| \leq \frac{1}{2} \int_X |f(x)|^2 d\mu + \frac{1}{2} \int_X 1 \cdot d\mu < \infty.$$

(3) \Rightarrow (1) Si A est un ensemble mesurable invariant, sa fonction caractéristique $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$, $\chi_A(x) = 0$ si $x \notin A$ est invariante, $\chi_A \circ T = \chi_A$ et est évidemment de carré sommable. Elle est donc presque sûrement constante, *i.e.* $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = 1$.

(1) \Rightarrow (2) Soit f une fonction réelle, T -invariante, absolument sommable (si f est à valeurs dans \mathbf{C} on fait de même avec les parties réelle et imaginaire). Pour tout $c \in \mathbf{R}$, l'ensemble $A_c = \{x \in X \mid f(x) \leq c\}$ est invariant par T . Donc $\mu(A_c) = 0$ ou 1. Ce qui permet aisément de conclure.

(2) \Rightarrow (4) Par le théorème de Birkhoff on a $f^* \in L^1(X, \mu)$. De plus $f^* \circ T = f^*$. Donc f^* est μ -presque sûrement une constante, disons égale à c . Il vient, en utilisant une nouvelle fois le théorème de Birkhoff,

$$f^* \stackrel{\mu\text{-ps}}{=} c = \int_X c d\mu = \int f^* d\mu = \overline{f}.$$

(4) \Rightarrow (3) Si une fonction $f \in L^2(X, \mu)$ est invariante, alors

$$s_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x)) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x) = f(x)$$

donc $f^*(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x)$. Mais d'après (4), $f^*(x) = \overline{f}$ μ -presque sûrement. \square

Voici enfin un résultat plus concret.

PROPOSITION 1.8.3. — *Un automorphisme linéaire hyperbolique du tore $F_L : \mathbf{T}^n \rightarrow \mathbf{T}^n$ est ergodique.*

Démonstration. — Soit donc $F_L : \mathbf{T}^n \rightarrow \mathbf{T}^n$. D'après 1.3.2, $F_{L*} m = m$. Soit par ailleurs $f \in L^2(\mathbf{T}^n, \mu)$. Si $x = (x_1, \dots, x_n) \bmod (1)$ est un point du tore et $k \in \mathbf{Z}^n$, on peut évaluer son coefficient de Fourier $c_k(f)$ qui est donné par

$$c_k(f) = \int_{\mathbf{T}^n} f(x) e^{-2i\pi \langle k, x \rangle} dm$$

où $\langle k, x \rangle$ est modulo les entiers le produit scalaire euclidien d'un relevé de x avec le vecteur entier k . On peut écrire de même

$$c_k(f \circ F_L) = \int_{\mathbf{T}^n} f(F_L(x)) e^{-2i\pi \langle k, F_L^{-1} F_L(x) \rangle} dm.$$

Par invariance de la mesure de Haar il vient

$$c_k(f \circ F_L) = \int_{\mathbf{T}^n} f(x) e^{-2i\pi(B(k),x)} dm = c_{B(k)}(f)$$

avec $B = {}^t(L^{-1})$. Si une fonction $f : \mathbf{T}^n \rightarrow \mathbf{C}$ est invariante ($f \circ F_L = f$), ses coefficients de Fourier satisfont d'après ce qui précède à

$$c_{B(k)}(f) = c_k(f \circ F_L) = c_k(f).$$

Remarquons par ailleurs que pour tout $k_0 \in \mathbf{Z}^n - \{0\}$, l'ensemble $\{B^i(k_0) \mid i \in \mathbf{N}\}$ est infini. Sinon, il existerait $i \neq j$ tel que $B^i(k_0) = B^j(k_0)$; mais, par hypothèse, B n'a pas de valeur propre sur le cercle unité. Comme $f \in L^2(\mathbf{T}^n, m)$, on peut pour tout $k_0 \in \mathbf{Z}^n - \{0\}$ écrire la majoration

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_{B^n(k_0)}(f)|^2 < \sum_{k \in \mathbf{Z}^n} |c_k(f)|^2 = \int_{\mathbf{T}^n} |f|^2 dm < \infty,$$

ce qui implique que $c_{k_0}(f) = 0$. \square

2. Non linéarité et stabilité structurelle

2.1. Le fer à cheval

En 1965 S. Smale a construit un difféomorphisme $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ du plan avec une dynamique très complexe qui admet une infinité d'orbites périodiques de périodes arbitrairement grande.

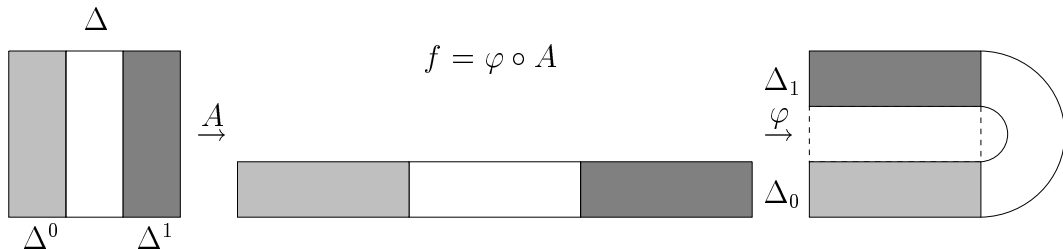


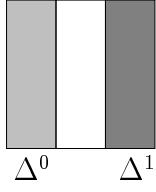
Figure 5

En fait on ne s'intéresse qu'à un difféomorphisme du rectangle $\Delta = [0, 1]^2$ sur son image. La construction s'effectue comme sur la figure par composition d'une application linéaire hyperbolique $A : (x, y) \rightarrow (3x, y/3)$ avec une transformation non linéaire φ le tout étant tel que

$$f(\Delta^0) = \Delta_0, \quad f|_{\Delta^0} : (x, y) \rightarrow (3x, \frac{1}{3}y)$$

$$f(\Delta^1) = \Delta_1, \quad f|_{\Delta^1} : (x, y) = (-3x + 3, -\frac{1}{3}y + 1).$$


Pour comprendre l'itération de f il est bon de chercher un sous ensemble Λ de Δ invariant par le difféomorphisme. Remarquons que



$$\begin{aligned}
 &= f^{-1}(\Delta) \cap \Delta = \{x \in \Delta \mid f(x) \in \Delta\} \\
 &= \Delta^1 \cup \Delta^0
 \end{aligned}$$

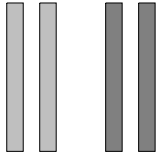


$$\Delta_0 = f(\Delta) \cap \Delta = \{x \in \Delta \mid f^{-1}(x) \in \Delta\}$$



$$\Delta_1 = \Delta_1 \cup \Delta_0 = f(\Delta^1) \cup f(\Delta^0)$$

Par itération il vient



$$\begin{aligned}
 &= f^{-2}(\Delta) \cap f^{-1}(\Delta) \cap \Delta = \{x \in \Delta \mid f(x) \in \Delta, f^2(x) \in \Delta\} \\
 &= f^{-1}(\Delta^1 \cup \Delta^0) \cap (\Delta^1 \cup \Delta^0) = \cup \Delta^{\omega_0, \omega_{-1}}, \quad \omega_0, \omega_{-1} \in \{0, 1\} \\
 &\text{avec } \Delta^{\omega_0, \omega_{-1}} = \Delta^{\omega_0} \cap f^{-1}(\Delta^{\omega_{-1}}).
 \end{aligned}$$

De la même manière nous pouvons écrire

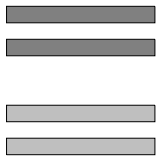
$$f^{-n}(\Delta) \cap \dots \cap \Delta = \cup \Delta^{\omega_0, \dots, \omega_{-n}}, \quad (\omega_0, \dots, \omega_{-n}) \in \{0, 1\}^{n+1}$$

et

$$\Delta^{\omega_0, \dots, \omega_{-n}} = \bigcap_{i=0}^n f^{-i}(\Delta^{\omega_{-i}}).$$

La largeur des rectangles verticaux décroît exponentiellement, et $\bigcap_{i=0}^n f^{-i}(\Delta)$ est la réunion de 2^n rectangles verticaux. Lorsque $n \rightarrow \infty$ nous obtenons $\bigcap_{i=0}^{\infty} f^{-i}(\Delta) = K \times [0, 1]$ où K est l'ensemble de Cantor triadique.

De la même manière nous obtenons par image directe des réunions de rectangles horizontaux



$$= \Delta \cap f(\Delta) \cap f^2(\Delta) = \cup \Delta_{\omega_1, \omega_2}, \quad (\omega_1, \omega_2) \in \{0, 1\}^2;$$

et plus généralement

$$\Delta \cap f(\Delta) \dots \cap f^n(\Delta) = \cup \Delta_{\omega_1, \dots, \omega_n} \quad (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \{0, 1\}^n$$

avec

$$\Delta_{\omega_1, \dots, \omega_n} = \bigcap_{i=1}^n f^i(\Delta^{\omega_i}).$$

A nouveau l'intersection infinie nous donne

$$\bigcap_{i=0}^{\infty} f^i(\Delta) = [0, 1] \times K.$$

L'ensemble $\Lambda = \bigcap_{-\infty}^{+\infty} f^i(\Delta)$ est un ensemble invariant par f ; de plus $\Lambda = K \times K$. Nous pouvons aussi introduire les ensembles

$$\Delta(\omega_{-n}, \dots, \omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n) = \Delta^{\omega_0, \dots, \omega_{-n}} \cap \Delta_{\omega_1, \dots, \omega_n}.$$

Ce qui nous fournit une bijection $h : \Sigma_2 = \{0, 1\}^{\mathbf{Z}} \rightarrow K \times K$. En munissant Σ_2 de la topologie produit on peut montrer que h est un homéomorphisme. On obtient surtout le résultat suivant.

PROPOSITION 2.1.2. — *Le difféomorphisme f du fer à cheval est, en restriction à l'ensemble invariant Λ , conjugué à un décalage de Bernoulli. Ce qui s'écrit*

$$f|_{\Lambda} \circ h = h \circ \sigma_2.$$

Pour ces notions on peut se reporter à l'exposé de A. Fathi aux journées X-UPS de février 1996. En utilisant la proposition 1.3.1 qui s'y trouve on obtient

COROLLAIRE 2.1.3. — *Les points périodiques de $f|_{\Lambda}$ sont denses dans Λ , $f|_{\Lambda}$ est topologiquement transitif dans Λ .*

On a même des résultats plus précis : $P_n(f|_{\Lambda}) = 2^n$ et $f|_{\Lambda}$ est topologiquement mélangeant dans Λ .

2.2. Difféomorphismes d'Anosov - Ensembles hyperboliques

Ce qui va suivre s'étendra sans peine aux tores. Mais pour l'instant conservons en tête le modèle du fer à cheval de S. Smale. Supposons que U est un ouvert de \mathbf{R}^k , $f : U \rightarrow \mathbf{R}^k$ un C^1 -difféomorphisme sur son image, et qu'il existe un sous ensemble $\Lambda \subset U$ compact f -invariant.

DÉFINITION 2.2.1. — *L'ensemble Λ est dit hyperbolique pour l'application f s'il existe $C > 0$, $\lambda \in]0, 1[$ et pour tout $x \in \Lambda$ une décomposition $\mathbf{R}^k = E_x^s \oplus E_x^u$ en sous espaces stables et instables tels que*

- (i) pour tout $v \in E_x^s$, $\|D_x f^n(v)\| \leq C\lambda^n \|v\|$ ($n \geq 0$),
- (ii) pour tout $v \in E_x^u$, $\|D_x f^{-n}(v)\| \leq C\lambda^n \|v\|$ ($n \geq 0$),
- (iii) $D_x f(E_x^s) = E_{f(x)}^s$, $D_x f(E_x^u) = E_{f(x)}^u$.

Remarque. — En fait le choix de la norme importe peu, seul C peut s'en trouver modifié. Plus généralement on choisit pour chaque x un produit scalaire défini positif, i.e. une métrique riemannienne.

Exercice. — Montrer que l'ensemble Λ du fer à cheval est un ensemble hyperbolique et que l'on peut choisir $\lambda = 1/3$; que la direction horizontale est la direction instable et la direction verticale est la direction stable.

DÉFINITION 2.2.2. — *Un difféomorphisme du tore $f : \mathbf{T}^k \rightarrow \mathbf{T}^k$ est dit d'Anosov si \mathbf{T}^k est un ensemble hyperbolique pour f .*

PROPOSITION 2.2.3. — *Un automorphisme hyperbolique du tore $F_L : \mathbf{T}^k \rightarrow \mathbf{T}^k$ est un difféomorphisme d'Anosov.*

Démonstration. — C'est presque une évidence, puisque nous avons pris dans la section 1.1 une définition qui occulte la réelle difficulté, à savoir faire du calcul différentiel sur un ensemble qui n'est pas naturellement un espace vectoriel. Mais nous n'avons pas ici le temps de développer la théorie des variétés différentiables et de leurs espaces tangents.

L'automorphisme F_L admet un relevé L qui est linéaire. Par conséquent F_L est C^∞ . D'autre part $D_x F_L : \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}^k$ est donné par $D_x F_L(v) = D_x L(v) = L(v)$, puisqu'une application linéaire est sa propre différentielle. Dans ce cas particulier notons que $E_x^s = E^s$ et $E_x^u = E^u$, de sorte que la décomposition est alors indépendante du point x .

2.3. Dynamique symbolique

Très souvent, les systèmes dynamiques sont codés par des dynamiques symboliques. Un cas particulier à déjà été rencontré avec le fer à cheval. Rappelons les notations. Soit

$$\Omega_N = \{\omega = (\dots, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \dots) \mid \omega_i \in \{0, \dots, N-1\}\}$$

où on met une topologie donnée par la distance

$$d_\lambda(\omega, \omega') = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{|\omega_n - \omega'_n|}{\lambda^{|n|}} \quad \lambda > 1$$

Exercice. — Montrer que c'est une distance.

La dynamique est donnée par le shift : $\sigma : \Omega_N \rightarrow \Omega_N$, $\sigma(\omega) = \omega'$, $\omega'_n = \omega_{n+1}$.

Les principaux exemples ne sont pas définis sur tout les mots de l'alphabet mais seulement un sous-ensemble déterminé par la donnée d'une matrice A . La procédure est la suivante. Soit $A = (a_{ij})$, $0 \leq i, j \leq N-1$, $a_{ij} = 0$ ou 1 , on considère alors

$$\Omega_A = \{\omega \in \Omega_N \mid a_{\omega_n \omega_{n+1}} = 1, \text{ pour } n \in \mathbf{Z}\}.$$

DÉFINITION 2.3.1. — *La restriction $\sigma|_{\Omega_A} = \sigma_A$ est appelée une chaîne de Markov topologique, on dit aussi souvent un sous-shift de type fini.*

2.4. Codage et partitions de Markov

De la même manière que nous avons pu trouver un codage pour le fer à cheval, nous allons développer très brièvement une approche analogue pour les automorphismes hyperboliques des tores. Des techniques semblables existent pour les difféomorphismes d'Anosov, mais cela nous conduirait un peu loin.

Reprenons notre exemple favori $F_L(x, y) = (2x + y, x + y)$ sur le tore \mathbf{T}^2 , traçons des morceaux des variétés stables W_0^s et instable W_0^u passant par l'origine jusqu'à ce qu'elles se coupent suffisamment de fois pour séparer le tore en rectangles comme par exemple sur la figure 6 extraite de [K.H]. On obtient, en tenant compte des

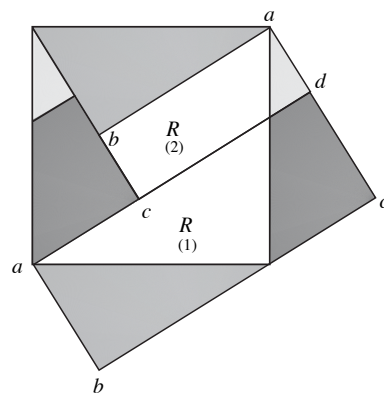


Figure 6

identifications, une partition de \mathbf{T}^2 en deux rectangles $R^{(1)}$ et $R^{(2)}$. L'image de ces deux rectangles vue dans \mathbf{R}^2 est représentée sur la figure 7 par les symboles $F(R(2))$ et $F(R(1))$. Si on fait le calcul explicite on constate, en utilisant les identifications,

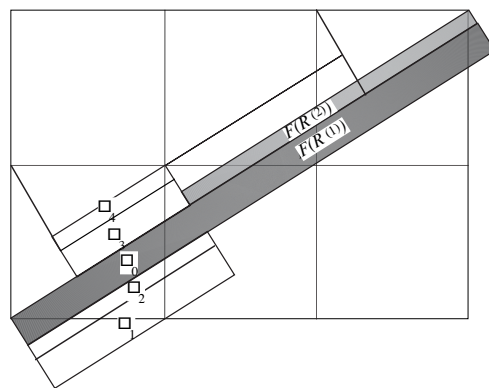


Figure 7

que $F(R^{(1)})$ est la réunion de 3 rectangles $\Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_3$, alors que $F(R(2))$ est la réunion de Σ_2 et Σ_4 . Par un calcul (assez fastidieux) on obtient une matrice $A =$

$(a_{ij}), 1 \leq i, j \leq 5$ telle que $a_{ij} = 0$ si $F(\Sigma_i) \cap \Sigma_j = \emptyset$, $a_{ij} = 1$ autrement ;

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous admettrons le résultat suivant.

PROPOSITION 2.4.1. — *L'automorphisme $F_L : (x, y) = (2x+y, x+y) \pmod{1}$ du tore \mathbf{T}^2 est semi-conjugué au sous-shift de type fini σ_A sur ω_5 .*

Un des intérêts de cet exemple est que la semi-conjugaison n'est pas une bijection car le nombre de points périodiques de σ_A de période qui divise p est donné par $N_p(\sigma_A) = \text{tr } A^p = \lambda_1^p + \lambda_1^{-p}$, avec $\lambda_1 = (3 + \sqrt{5})/2$, et satisfait, d'après 1.4.2 (i),

$$N_p(\sigma_A) = N_p(F_L) + 2.$$

Exercice. — Montrer que σ_A a trois points fixes alors que F_L n'en a qu'un seul.

2.5. Stabilité des automorphismes hyperboliques

Vous avez déjà rencontré dans le texte [Fa] les notions de semi-conjugaison et de stabilité structurelle. Le théorème 2.3.1 de l'exposé de A. Fathi montre que le système dynamique $m_p : S \rightarrow S$, $p \geq q$, $z \mapsto z^P$ est structurellement stable. La preuve s'effectue en montrant que la semi-conjugaison cherchée s'obtient comme point fixe d'un certain opérateur contractant dans un espace de fonctions continues. Nous allons développer une stratégie semblable sur le tore \mathbf{T}^n .

Nous allons juste rappeler/admettre quelques résultats sur l'homotopie que nous spécialiserons à notre contexte.

Deux applications continues $f, g : X \rightarrow Y$ où X et Y sont des espaces topologiques, sont homotopes s'il existe une application $H : [0, 1] \times X \rightarrow Y$, continue et telle que

$$H(0, x) = f(x), \quad H(1, x) = g(x).$$

PROPOSITION 2.5.1. — *Soient $f, g : \mathbf{T}^n \rightarrow \mathbf{T}^n$ deux applications continues.*

(i) *elles sont homotopes si et seulement si leur différence admet un relèvement $\tilde{f} - \tilde{g} : \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}^n$, qui est une application \mathbf{Z}^n périodique i.e. pour tout $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{Z}^n$*

$$(\tilde{f} - \tilde{g})(x_1 + z_1, \dots, x_n + z_n) = (\tilde{f} - \tilde{g})(x_1, \dots, x_n).$$

(ii) *De plus une application $f : \mathbf{T}^n \mapsto \mathbf{T}^n$ homotope à l'identité $\text{Id}_{\mathbf{T}^n}$ est surjective.*

Démonstration (partielle). — L'homotopie $H : [0, 1] \times \mathbf{T}^n \rightarrow \mathbf{T}^n$ telle que $H(0, \bullet) = f(\bullet)$, $H(1, \bullet) = g(\bullet)$ se relève aussi en une homotopie $\widetilde{H} : [0, 1] \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ telle que $\widetilde{H}(0, \bullet) = \widetilde{f}(\bullet)$ est un relevé de f , $\widetilde{H}(1, \bullet) = \widetilde{g}(\bullet)$ est un relevé de g .

On a $\widetilde{H}(t, y + z) = \widetilde{H}(t, y) + A_t(z)$, pour $t \in [0, 1]$, $y \in \mathbf{R}^n$, $z \in \mathbf{Z}^n$, et A_t est un endomorphisme de \mathbf{R}^n à coefficients nécessairement entiers. Par continuité $A_0(z) = A_1(z)$, pour tout $z \in \mathbf{Z}^n$ et donc $(\widetilde{f} - \widetilde{g})(y + z) = (\widetilde{f} - \widetilde{g})(y)$.

Pour la réciproque supposons que $\widetilde{f} - \widetilde{g} = \widetilde{h}$ est une application \mathbf{Z}^n -périodique. Définissons $\widetilde{H} : [0, 1] \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ par $\widetilde{H}(t, y) = \widetilde{g}(y) + (1-t)\widetilde{h}(y)$. On vérifie aisément que \widetilde{H} se projette en une homotopie sur \mathbf{T}^n .

Voici un premier résultat de stabilité.

THÉORÈME 2.5.2. — *Tout difféomorphisme $g : \mathbf{T}^n \rightarrow \mathbf{T}^n$ homotope à un automorphisme linéaire hyperbolique $F_L : \mathbf{T}^n \rightarrow \mathbf{T}^n$ admet F_L comme facteur i.e. il existe $h : \mathbf{T}^n \rightarrow \mathbf{T}^n$ continue surjective telle que $h \circ g = F_L \circ h$. La semi-conjugaison est unique et homotope à l'identité. De plus si g est C^0 -proche de F_L alors la semi-conjugaison est C^0 -proche de l'identité.*

Démonstration. — On cherche une application $h : \mathbf{T}^n \rightarrow \mathbf{T}^n$, homotope à l'identité et telle que $h \circ g = F_L \circ h$. D'après la proposition 2.5.1, h sera alors surjective et il existera $\widehat{h} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, \mathbf{Z}^n -périodique, telle que $\text{Id}_{\mathbf{R}^n} + \widehat{h}$ soit un relevé de h . Comme h et F_L sont homotopes, il existe une application $\widehat{g} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, continue, \mathbf{Z}^n -périodique telle que $L + \widehat{g}$ est un relèvement de g . L'équation de semi-conjugaison qui s'écrit aussi sous la forme $h = F_L^{-1} \circ h \circ g$, se traduit en termes de relèvement en

$$\text{Id}_{\mathbf{R}^n} + \widehat{h} = L^{-1} \circ (\text{Id}_{\mathbf{R}^n} + \widehat{h}) \circ (L + \widehat{g}).$$

Ce qui nous conduit à

$$(*) \quad \widehat{h} = L^{-1}\widehat{g} + L^{-1} \circ \widehat{h} \circ (L + \widehat{g}) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{L}(\widehat{h}).$$

Notre espace fonctionnel est l'ensemble \mathcal{F} des applications continues \mathbf{Z}^n -périodiques doté de la distance $\|\widehat{\psi} - \widehat{\varphi}\| = \sup_{y \in [0, 1]^n} \|\widehat{\psi}(y) - \widehat{\varphi}(y)\|$. Il est complet. Malheureusement \mathcal{L} n'est pas un opérateur contractant pour cette distance. Utilisons l'hyperbolicité de L . Il existe une décomposition $\mathbf{R}^n = E^u \oplus E^s$, et au-moins une norme adaptée que nous prenons pour définir une distance d_1 sur \mathcal{F} . Nous noterons aussi p_u et p_s le projecteur sur E^u parallèlement à E^s (respectivement sur E^s parallèlement à E^u) $\widehat{h}_u = p_u \circ \widehat{h}$, $\widehat{g}_u = p_u \circ \widehat{g}$, etc. L'équation (*) se décompose en utilisant l'invariance de la décomposition par L en

$$(**) \quad \widehat{h}_u = L_u^{-1}\widehat{g}_u + L_u^{-1} \circ \widehat{h}_u \circ (L + \widehat{g}) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{L}_u(\widehat{h}_u)$$

et

$$(***) \quad \widehat{h}_s = L_s^{-1}\widehat{g}_s + L_s^{-1} \circ \widehat{h}_s \circ (L + \widehat{g}) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{L}_s(\widehat{h}_s).$$

On vérifie que \mathcal{L}_u est un opérateur contractant car

$$\|\mathcal{L}_u(\widehat{h}'_u) - \mathcal{L}_u(\widehat{h}_u)\| = \|L_u^{-1}(\widehat{h}'_u - \widehat{h}_u) \circ (L + \widehat{g})\| \leq \|L_u^{-1}\| \cdot \|\widehat{h}'_u - \widehat{h}_u\|$$

et $\|L_u^{-1}\| = \lambda < 1$.

Il existe donc un unique point fixe \widehat{h}_u . De plus comme quand $n \rightarrow \infty$, $\mathcal{L}_u^n(0) \rightarrow \widehat{h}_u$ nous avons la majoration

$$\begin{aligned} \|\widehat{h}_u\| &\leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n\right) \cdot \|\mathcal{L}_u(0)\| \\ &\leq \frac{1}{1-\lambda} \cdot \|L_u^{-1}\| \cdot \|\widehat{g}_u\| \\ &\leq \frac{\lambda}{1-\lambda} \|\widehat{g}_u\| \end{aligned}$$

Pour résoudre l'équation (***) il vaut mieux la réécrire en utilisant le fait que $L + \widehat{g}$ est inversible puisque g est un homéomorphisme. On obtient ainsi, en posant $S = (L + \widehat{g})^{-1}$,

$$\widehat{h}_s = L_s \circ \widehat{h}_s \circ S - \widehat{g}_s \circ S \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{F}_s(\widehat{h}_s).$$

Il s'agit encore d'un opérateur contractant. Pour le point fixe on peut obtenir l'estimée

$$\|\widehat{h}_s\| \leq \frac{\|\widehat{g}_s\|}{1-\mu} \quad \text{avec} \quad \mu = \|L_s\|.$$

Finalement nous obtenons une solution unique $\widehat{h} = \widehat{h}_s + \widehat{h}_u$, qui est bien \mathbf{Z}^n -périodique, et qui se projette donc sur le tore \mathbf{T}^n .

Rappelons une définition.

DÉFINITION 2.5.3. — Soit $\|\cdot\|$ une norme sur \mathbf{R}^n , d la distance sur \mathbf{T}^n qui s'en déduit. On définit une topologie sur $C^1(\mathbf{T}^n, \mathbf{T}^n)$ par la distance $d_{C^1}(f_1, f_2) = \sup_{x \in \mathbf{T}^n} d(f_1(x), f_2(x)) + \sup_{x \in \mathbf{T}^n} \|D_x f_1 - D_x f_2\|$. Cette topologie ne dépend pas du choix de la norme $\|\cdot\|$. On l'appelle C^1 -topologie.

Avec des arguments proches de ceux du théorème on obtiendrait le résultat suivant :

PROPOSITION 2.5.4. — Toute C^1 -application $g : \mathbf{T}^n \rightarrow \mathbf{T}^n$ suffisamment proche, dans la C^1 -topologie, d'un automorphisme linéaire hyperbolique F_L du tore est un facteur pour F_L , i.e. il existe $h' : \mathbf{T}^n \rightarrow \mathbf{T}^n$ continue surjective telle que $g \circ h' = h' \circ F_L$.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le théorème de stabilité structurelle.

THÉORÈME 2.5.5 (Anosov). — Soit $F_L : \mathbf{T}^n \rightarrow \mathbf{T}^n$ un automorphisme linéaire hyperbolique du tore. Il existe un voisinage $\mathcal{U} \subset C^1(\mathbf{T}^n, \mathbf{T}^n)$ de F_L dans la C^1 -topologie, tel que toute application $f \in \mathcal{U}$ est topologiquement conjuguée à F_L .

Démonstration (indication). — En combinant le théorème 2.5.2 et la proposition 2.5.4 on obtient deux semi-conjugaisons h et h' . On vérifie aisément que $hh' = h''$ commute avec F_L . Il resterait à vérifier que ceci n'est possible que pour l'identité.

Epilogue. — Pour conclure, je voudrais citer un résultat dont les techniques sortent du cadre de cet exposé.

THÉORÈME (Franks). — *Tout difféomorphisme d'Anosov sur le tore \mathbf{T}^n est topologiquement conjugué à un automorphisme linéaire hyperbolique.*

Remarque finale. — Les notes de cet exposé doivent beaucoup à plusieurs ouvrages. Les deux principales sources ont été le livre [K.H] de A. Katok et B. Hasselblatt et le cours [F.L] “Systèmes dynamiques”.

Bibliographie

- [A] V.I. ARNOLD, *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*, Editions M.I.R., Moscou.
- [A.A] V.I. ARNOLD, A. AVEZ, *Problèmes ergodiques de la mécanique classique*, Gauthier-Villard.
- [Fa] A. FATHI, *Systèmes dynamiques discrets*, in *Introduction aux systèmes dynamiques, Journées X-UPS 1996*, Ecole Polytechnique (1996).
- [F.L] A. FATHI, F. LEDRAPPIER, *Systèmes dynamiques*, Cours de l'Ecole Polytechnique, Département de Mathématiques, Ecole Polytechnique, Palaiseau, édition 1994 (ou édition 1996 en préparation).
- [K.H] A. KATOK, B. HASSELBLATT, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, 1995.
- [M] R. MANÉ, *Ergodic Theory and Differentiable Dynamics*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Springer Verlag, 1987.
- [P.P] W. PARRY, M. POLLICOTT, *Zeta functions and the periodic orbit structure of hyperbolic dynamics*, Astérisque vol. 87-188, Société Mathématique de France, 1990.
- [S] M. SHUB, *Stabilité globale des systèmes dynamiques*, Astérisque vol. 56, Société Mathématique de France, 1978.

Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université Louis Pasteur et URA 001 du CNRS
7 rue René-Descartes
F-67084 Strasbourg cedex

Adresse électronique : foulon@math.u-strasbg.fr

Propriétés spectrales de systèmes dynamiques discrets

MARTINE QUEFFÉLEC

Cet exposé fait suite aux exposés de A. Fathi [7] et P. Arnoux [2].

Nous nous proposons d'étudier des systèmes dynamiques qui sont à l'opposé des systèmes chaotiques, et dans lesquels, en particulier, tout point est d'orbite dense (systèmes minimaux). C'est le cas de la rotation irrationnelle agissant sur le cercle. Un système minimal peut également s'obtenir en partant d'une suite à valeurs dans un ensemble fini $\{1, 2, \dots, s\}$ et en lui associant le système (X, T) où X est l'orbite fermée de la suite dans $\{1, 2, \dots, s\}^{\mathbf{N}}$ (ou $\{1, 2, \dots, s\}^{\mathbf{Z}}$), sous l'action du shift unilatéral T (ou bilatéral). Lorsque la suite initiale est récurrente et presque périodique, c'est-à-dire tout mot de la suite y apparaît avec lacunes bornées, le système est minimal. Pierre Arnoux dans [2] a défini un outil combinatoire : la *fonction complexité*, pour mesurer le degré d'imprévisibilité d'une telle suite, et par là-même la relative richesse du système associé.

On développera ici une approche spectrale de cette tentative de classification : si μ est une mesure sur X invariante par le shift T , on fait une étude fine du spectre de l'opérateur unitaire $f \rightarrow f \circ T$ sur $L^2(X, \mu)$, cette étude étant particulièrement significative lorsque le système admet une seule mesure invariante ! Cette analyse peut être menée à bout pour certaines classes de systèmes dont on choisira quelques exemples représentatifs.

Un autre point de vue, considéré initialement par les physiciens, consiste à décrire le spectre de l'opérateur de Schrödinger discret dont le potentiel est une suite à valeurs dans un ensemble fini. Rappelons que cet opérateur H est défini sur $l^2(\mathbf{Z})$ par

$$H\varphi(n) = \varphi(n+1) + \varphi(n-1) + v(n)\varphi(n)$$

où v est le potentiel de H .

Lorsque v est une suite périodique, le spectre de H est absolument continu, alors qu'il est (ps) discret dans le cas aléatoire. Que peut-on dire dans le cas d'une suite "intermédiaire" ?

1. Systèmes dynamiques discrets : propriétés statistiques

Albert Fathi a défini un système dynamique discret comme étant un couple (X, T) , où X est un espace topologique et T une application continue de X dans lui-même. Etudier la dynamique du système, c'est étudier le comportement des orbites, c'est-à-dire des itérées $T^n(x)$ suivant le point initial x .

On sera amené à élargir la notion de système dynamique au cadre mesurable et plus seulement topologique, même si les exemples intéressants sont en dynamique topologique.

Rappelons les deux exemples fondamentaux, cités dans [7], qui, du point de vue de la dynamique, sont diamétralement opposés :

- le premier, important car il permet de modéliser de nombreux phénomènes dynamiques, est celui du *shift à n symboles*. Dans ce cas X est l'espace métrique compact $\{0, 1, \dots, n-1\}^{\mathbf{N}}$, (ou $\{0, 1, \dots, n-1\}^{\mathbf{Z}}$), noté parfois Σ_n et la transformation, T , est le shift unilatéral (ou décalage) défini par

$$T(x)_k = x_{k+1}$$

(ou le même shift bilatéral). Ce système, à lui seul, possède toutes les propriétés caractéristiques du *chaos* tel qu'il est défini dans [6] : il est transitif, sensible aux conditions initiales et l'ensemble des orbites périodiques est dense dans X .

- Le second est celui de la rotation irrationnelle sur le cercle unité, c'est-à-dire l'application R_α définie par :

$$R_\alpha x := x + \alpha \bmod 1$$

avec α irrationnel, si on identifie le cercle unité \mathbf{T} à \mathbf{R}/\mathbf{Z} . Dans cet exemple, tout point initial est d'orbite dense. La dynamique de ce système est donc réduite, puisqu'il n'y a pas d'orbite périodique, pas de sensibilité aux conditions initiales (deux points voisins engendrent des orbites proches). Par contre, l'étude approfondie de l'orbite d'un point a soulevé de nombreuses questions de nature arithmétique (approximation diophantienne, fractions continues).

C'est aux systèmes de cette seconde espèce que nous allons nous intéresser.

DÉFINITION 1.1. — *Un système dynamique (X, T) est dit **minimal** si toute orbite est dense dans X , ou de façon équivalente, si les seuls sous-ensembles fermés E vérifiant*

$$T(E) \subseteq E$$

sont X et \emptyset .

Les problèmes qui se posent alors sont les suivants :

1. Peut-on décrire le comportement de chaque orbite, ou, tout du moins, de la plupart d'entre elles ?

2. Comment mesurer la complexité d'une orbite ? Quels outils utiliser ?

Pour tenter d'apporter des réponses, nous allons, lorsque ce sera possible, munir notre système d'une mesure invariante par T .

1.1. Mesures invariantes

Avant de définir précisément ce qu'est une mesure invariante, rappelons que la notion apparaît naturellement en physique statistique avec la *mesure d'équilibre* μ d'un système physique évoluant au cours du temps. Si le système au temps initial est dans l'état x , il est dans l'état Tx au temps suivant, et T est une transformation de l'espace des états X dans lui-même. Par exemple, lorsque le système est fini et A un ensemble d'états possibles, $\mu(A)$ est la probabilité que le système soit dans l'un de ces états, ceci indépendamment de l'instant considéré. La mesure μ est invariante par T .

Les mesures invariantes apparaissent de façon naturelle en mathématiques également comme nous allons le voir, mais commençons par en donner une définition.

DÉFINITION 1.2. — *Soit X un espace muni d'une tribu \mathcal{A} et T une application mesurable de X dans lui-même. La mesure de probabilité μ définie sur (X, \mathcal{A}) est **invariante par T** ou **T -invariante** si, pour tout ensemble A de la tribu,*

$$\mu(T^{-1}A) = \mu(A).$$

Revenons à nos deux exemples.

1. *Le shift bilatéral à n symboles.* — L'espace métrique compact

$$X = \{0, 1, \dots, n-1\}^{\mathbf{Z}}$$

est muni naturellement de la tribu de ses boréliens. Cette tribu est engendrée par les cylindres qui sont à la fois ouverts et fermés. Supposons qu'à chaque étape les valeurs $0, 1, \dots, n-1$ apparaissent avec probabilités respectives p_0, p_1, \dots, p_{n-1} (c'est-à-dire $p_i > 0$ et $\sum p_i = 1$), et ceci indépendamment d'une étape à l'autre. Cela revient à considérer sur le système la mesure produit

$$\mu = \{p_0, p_1, \dots, p_{n-1}\}^{\mathbf{Z}},$$

qui est clairement invariante par T . On parle alors de *Bernoulli-shift*.

Notons qu'il y a déjà beaucoup de mesures invariantes sur (X, T) .

2. *La rotation irrationnelle.* — On sait qu'il n'existe qu'une seule mesure de probabilité sur le cercle invariante par toutes les translations, à savoir la mesure de Haar ou de Lebesgue sur \mathbf{T} identifié à $[0, 1)$. C'est aussi la seule mesure de probabilité invariante par R_α quand α est irrationnel : il suffit en effet de prouver que la mesure de Lebesgue est la seule mesure de probabilité μ sur \mathbf{T} vérifiant

$$\int f(x + \alpha) d\mu(x) = \int f(x) d\mu(x)$$

pour n'importe quelle fonction continue f sur \mathbf{T} ; mais en itérant cette identité, μ vérifie

$$\int f(x + n\alpha) d\mu(x) = \int f(x) d\mu(x)$$

pour tout n . Par densité modulo 1 de la suite $(n\alpha)$ et en utilisant la continuité uniforme de f , on obtient, quitte à prendre une sous-suite,

$$\int f(x+t)d\mu(x) = \int f(x)d\mu(x)$$

ceci pour tout t . D'où le résultat. (On peut aussi calculer les coefficients de Fourier de la mesure μ , et vérifier qu'ils sont tous nuls sauf celui d'indice 0.)

M. Keane écrit dans [3] : "measure-preserving transformations are beautiful!". J'ajouterais "invariant measures are beautiful too". Voici donc d'autres exemples pour illustrer cette affirmation.

1. Fractions continues et mesure de Gauss.

Prenons $X := [0, 1] \setminus \mathbf{Q}$ et définissons T par

$$Tx := \left\{ \frac{1}{x} \right\} = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x} \right],$$

la partie fractionnaire de $\frac{1}{x}$. Gauss, dans une lettre à Laplace (1812), écrit qu'il a trouvé une probabilité invariante par T ; il s'agit de la mesure à densité

$$\frac{1}{\log 2} \frac{1}{1+x}$$

par rapport à la mesure de Lebesgue m sur X . Malheureusement, il n'explique pas comment il l'a trouvée et c'est beaucoup plus tard qu'on la retrouve comme point fixe d'un opérateur de Perron-Frobenius. C'est donc la seule probabilité T -invariante équivalente à la mesure de Lebesgue m (ayant les mêmes ensembles négligeables). L'opérateur de Perron-Frobenius dans ce cas est l'opérateur Φ défini sur $L^1(X, m)$ par :

$$\Phi f(x) = \sum_{n \geq 1} f\left(\frac{1}{x+n}\right) \frac{1}{(x+n)^2}$$

et Φ admet un seul point fixe f qui est tel que $\mu = f \cdot m$ est une mesure T -invariante. [3]

2. Produit de Riesz.

On s'intéresse cette fois à la transformation définie par $Tz := z^2$ sur le cercle unité, que l'on préfère voir comme la transformation $Tx := 2x \bmod 1$ sur l'espace $X := \mathbf{T}$ identifié à $[0, 1)$. Cette transformation possède de nombreuses probabilités discrètes invariantes, par exemple la probabilité de masses $\frac{1}{2}$ aux points $\left\{ \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right\}$... et une seule probabilité équivalente à la mesure de Lebesgue m , la mesure de Lebesgue elle-même! Mais elle admet de nombreuses probabilités continues, singulières par rapport à m c'est-à-dire portées par un borélien de mesure de Lebesgue nulle. Un exemple est celui-ci qui apparaîtra naturellement dans la suite. Il s'agit d'une mesure

faisant partie d'une classe d'exemples construits par M. Riesz qui, initialement, cherchait une mesure dont on connaisse de façon explicite les coefficients de Fourier.

Notons

$$P_N(t) := \prod_{n=0}^{N-1} (1 - \cos 2\pi 2^n t)$$

pour tout $N \geq 1$. La suite $(P_N) \cdot m$ converge pré-faiblement dans $M(\mathbf{T})$, espace des mesures bornées sur \mathbf{T} , vers une probabilité ρ continue, T -invariante, vérifiant

$$\hat{\rho}(2n) = \hat{\rho}(n)$$

$$\hat{\rho}(2n+1) = -\frac{\hat{\rho}(n) + \hat{\rho}(n+1)}{2}$$

pour $n \geq 0$, et

$$\hat{\rho}(-n) = \hat{\rho}(n)$$

On la note abusivement

$$\rho := \prod_{n=0}^{\infty} (1 - \cos 2\pi 2^n t).$$

3. θ -shift.

Considérons le nombre d'or $\theta = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ et la transformation

$$Tx := \theta x \bmod 1$$

définie sur $X := [0, 1)$. Il existe une unique probabilité T -invariante équivalente à la mesure de Lebesgue, qui admet la densité

$$\begin{aligned} \frac{\theta^3}{1 + \theta^2} & \text{ si } 0 \leq x < \theta^{-1} \\ \frac{\theta^2}{1 + \theta^2} & \text{ si } \theta^{-1} \leq x < 1 \end{aligned}$$

Le terme θ -shift sera justifié plus loin.

Remarque. — Le problème d'existence ou d'unicité de mesure invariante (finie ou non) reste un problème difficile et crucial puisque, en général, l'espace et la transformation sont donnés, mais pas la mesure invariante. Le problème peut d'ailleurs se poser pour une famille de transformations. Une généralisation de 1. est le résultat suivant (voir par exemple [13]) : Si X est un espace métrique compact et (T_i) une famille d'isométries de X , il existe une mesure invariante par tous les T_i .

On se restreindra aux cas où il existe une mesure de probabilité invariante.

Si X est un espace métrique compact, et T une application continue de X dans lui-même, il existe toujours des probabilités boréliennes préservées par T . Il suffit de prendre une limite pré-faible dans $M(X)$ de la suite de probabilités

$$\mu_N = \frac{1}{N} \sum_{n < N} \delta_{T^n x}$$

Problème. — Pour terminer ce paragraphe citons une conjecture partiellement résolue : une probabilité sur $[0, 1)$, continue, qui est à la fois 2- et 3-invariante est-elle nécessairement la mesure de Lebesgue ?

1.2. Ergodicité

On oublie un instant la propriété topologique de minimalité, pour s'intéresser à la propriété d'ergodicité, propriété analogue dans le cadre mesurable, mais qui dépend de la mesure invariante choisie. Soit (X, \mathcal{A}, T, μ) notre système, où, désormais, μ est T -invariante; on veut préciser l'analyse de chaque orbite d'un point de vue statistique si possible.

Question 1. — Fixons $B \in \mathcal{A}$ partie mesurable de X ; étant donné $x \in X$, visite-t-il B sous l'action de T et combien de fois ?

Une réponse partielle est fournie par le théorème de récurrence de Poincaré :

THÉORÈME 1.1 (Poincaré). — *Soit (X, \mathcal{A}, T, μ) un système dynamique et $B \in \mathcal{A}$ partie de X de mesure > 0 ; alors, pour μ -presque tout $x \in B$*

$$\mathcal{N}(x, B) := \{n \geq 0; T^n x \in B\}$$

est infini.

Commentaires.

1. Ce théorème donne une réponse pour les points de B , mais ne dit rien sur les points du complémentaire de B ;

2. La question 1, pour tout x de X , n'a d'intérêt que si X ne se décompose pas en deux morceaux de mesure positive et invariants par T , car alors les orbites pourraient être piégées dans l'un de ces morceaux. C'est l'hypothèse que nous allons faire et qui n'est pas restrictive.

DÉFINITION 1.3. — *La probabilité μ définie sur (X, \mathcal{A}, T) et T -invariante est dite **ergodique** si tout ensemble A de \mathcal{A} vérifiant*

$$T^{-1}A \subseteq A$$

est de mesure 0 ou 1.

On remarque que la propriété se teste en fait aussi bien sur les ensembles complètement invariants, c'est-à-dire vérifiant $T^{-1}A = A$.

La réponse à la question 1 est alors donnée par le théorème ergodique (qui est une généralisation de la loi forte des grands nombres) :

THÉORÈME 1.2 (ergodique de Birkhoff). — *Soit (X, \mathcal{A}, T, μ) un système dynamique où μ est une probabilité ergodique ; soit B un ensemble fixé dans \mathcal{A} . Alors, si on pose*

$$S_n(x) := \#\{0 \leq k < n; T^k x \in B\},$$

pour μ -presque tout x ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n(x) = \mu(B).$$

Plus généralement, si f est une fonction μ -intégrable sur X , alors, pour μ -presque tout x ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k < n} f(T^k x) = \int f d\mu.$$

Commentaire. — Malgré son nom, ce théorème admet une version plus générale sans l'hypothèse d'ergodicité, et fournit alors une version améliorée du théorème de Poincaré :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \#(\mathcal{N}(x, B) \cap [0, n - 1]) > 0$$

pour μ -presque tout point x de B .

Exemples.

1. La mesure de Lebesgue est ergodique pour la rotation irrationnelle ; plus généralement, lorsque T admet une unique probabilité invariante, celle-ci est automatiquement ergodique, car les probabilités ergodiques sont les points extrémaux du convexe compact $M_T(X)$ constitué des probabilités T -invariantes sur X . Un tel système (ou plus simplement l'application T) sera dit **uniquement ergodique**.

2. La mesure de Lebesgue est également ergodique pour la transformation $Tx := 2x \bmod 1$ comme on peut le vérifier en utilisant une définition équivalente de l'ergodicité :

DÉFINITION 1.4. — *Soit (X, \mathcal{A}, T, μ) un système dynamique. La probabilité μ est ergodique pour T si et seulement si, toute fonction mesurable $f : X \mapsto \mathbf{R}$ vérifiant*

$$f(Tx) = f(x)$$

μ -presque partout, est égale presque partout à une constante.

Il suffit de le vérifier pour les fonctions bornées sur \mathbf{T} et d'utiliser le développement d'une telle f en série de Fourier.

Le produit de Riesz ρ défini dans le paragraphe précédent est aussi ergodique pour cette transformation (elle possède en fait une propriété plus forte). Or on

peut vérifier que deux probabilités ergodiques distinctes du même convexe compact $M_T(X)$ sont nécessairement étrangères (elles habitent sur des boréliens disjoints). Cela prouve que cette mesure est singulière.

On pourrait déduire la singularité du théorème ergodique appliqué à $f(x) := e^{2i\pi x}$ sur $[0, 1]$ avec les mesures m et ρ successivement, en remarquant que

$$\int f dm = 0$$

alors que

$$\int f d\rho = \widehat{\rho}(1) = -\frac{1}{3}$$

3. La mesure de Gauss et la mesure associée au θ -shift sont toutes deux ergodiques et cela peut résulter du théorème de Ruelle-Perron-Frobenius. En appliquant le théorème ergodique à la transformation T de Gauss par exemple, on peut obtenir des résultats presque sûrs sur la répartition des quotients partiels : à tout $x \in [0, 1] \setminus \mathbf{Q}$ on associe la suite d'entiers $a_1 = a_1(x) = \left[\frac{1}{x} \right]$ et pour $n > 1$, $a_n = a_n(x) = a_{n-1}(Tx)$, appelés **quotients partiels** de x .

PROPOSITION 1.1. — *Pour chaque entier $k \geq 1$, pour presque tout x , la fréquence relative d'apparition de k parmi les $a_n(x)$ est*

$$\frac{1}{\log 2} \log \frac{(k+1)^2}{k(k+2)}.$$

En particulier presque tout x est à quotients partiels non bornés.

Question 2. — Peut-on décider, pour un point initial x fixé, s'il appartient ou non à cet ensemble de mesure pleine pour lequel la limite existe dans le théorème ergodique ?

DÉFINITION 1.5. — *Supposons que X soit un espace métrique compact. Le point x est dit **générique** pour le système dynamique (X, \mathcal{A}, T, μ) si*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k < n} f(T^k x) = \int f d\mu$$

pour toute f continue sur X .

Par le théorème ergodique, μ -presque tout x est générique mais il est difficile d'exhiber un seul point, comme on peut le voir par exemple avec les nombres normaux. On rappelle qu'un nombre est **normal en base q** , si la suite de ses digits en base q est une suite normale, c'est-à-dire telle que, pour chaque n , tout motif de longueur n apparaît dans la suite avec la fréquence q^{-n} . Il résulte du théorème ergodique appliqué à la transformation $x \mapsto qx \bmod 1$ que presque tout nombre est normal en base q (et même en toute base) ; mais on ne sait pas décider si le nombre $\sqrt{2}$ par exemple est normal en base 2, comme le pensait Borel.

Le résultat suivant sera précieux puisqu'il nous permettra d'étudier toute orbite :

THÉORÈME 1.3 (Oxtoby). — *Supposons l'espace métrique compact et le système uniquement ergodique. Alors tout point est générique ; plus précisément, pour toute f continue sur X*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k < n} f(T^k x) = \int f d\mu$$

uniformément sur X .

Commentaires.

1. Il y a en fait équivalence entre l'unique ergodicité du système et la convergence uniforme vers une constante des moyennes de Birkhoff de toute fonction continue. La démonstration en est assez simple (voir par exemple [14]).

2. Après cette étude (rapide) on peut dire que la minimalité est la version topologique de l'unique ergodicité, alors que la version topologique de l'ergodicité est la transitivité (existence d'un point d'orbite dense lorsque X est un compact sans point isolé.)

A noter une classe importante d'exemples [6] :

PROPOSITION 1.2. — *Tout homéomorphisme du cercle sans orbite périodique — donc de nombre de rotation irrationnel — est uniquement ergodique.*

1.3. Isomorphismes de systèmes et codage

La problème d'isomorphisme entre systèmes dynamiques est naturel : étant donné un système, n'est-il pas simplement une autre version d'un système déjà connu, dont la dynamique est plus simple à étudier ? Cela peut répondre aussi à un besoin de classification. Enfin, les systèmes symboliques sont relativement bien connus, et un outil pour comprendre un système dynamique abstrait serait une représentation symbolique d'un tel système. Fathi a défini dans [7] la notion de semi-conjugaison et de conjugaison en dynamique topologique, deux systèmes (topologiquement) conjugués ayant la même dynamique.

On va introduire une notion d'isomorphisme pour les systèmes mesurés, moins exigeante que la notion de conjugaison pour les systèmes topologiques et plus adaptée à notre préoccupation. Un tel système, rappelons-le, est muni d'une probabilité invariante.

DÉFINITION 1.6. — *Les systèmes (X, \mathcal{A}, T, μ) et $(X', \mathcal{A}', T', \mu')$ sont métriquement isomorphes s'il existe une application mesurable $h : X \mapsto X'$ vérifiant*

$$\mu(h^{-1}A') = \mu'(A') \quad \text{pour } A' \in \mathcal{A}'$$

$$h \circ T = T' \circ h$$

et s'il existe $Y \subset X$ et $Y' \subset X'$ vérifiant

$$\mu(Y) = 1 \quad \mu'(Y') = 1$$

tels que $h : Y \mapsto Y'$ soit bijective et bimesurable (h est une presque-bijection bimesurable).

La théorie ergodique s'intéresse aux propriétés préservées par ce type d'isomorphisme (ergodicité par exemple). L'exemple suivant va éclaircir et justifier cette définition.

Exemple 1. — Notons T_2 l'application $x \mapsto 2x \bmod 1$ définie sur X identifié à $[0, 1)$. Il est prouvé dans [7] que le système (X, T_2) est semi-conjugué au 2-shift, (Σ_2^+, T) , où Σ_2^+ désigne le compact $\{0, 1\}^{\mathbf{N}}$. Les rationnels dyadiques admettant deux décompositions, l'application ne peut être bijective; de toute façon, les deux systèmes ne peuvent être conjugués puisque Σ_2^+ est totalement discontinu.

Par contre, $(\Sigma_2^+, T, \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}^{\mathbf{N}})$ et (X, T_2, m) sont des systèmes métriquement isomorphes. Pour le voir, il suffit de considérer l'application de semi-conjugaison $h : \Sigma_2^+ \mapsto X$ définie par

$$h(u) := \sum_1^{\infty} \frac{u_n}{2^n}$$

Puis on la restreint au départ à l'ensemble des suites de 0 – 1 qui, à partir d'un certain rang, ne sont pas identiquement nulles ou identiquement égales à 1, et à l'arrivée, à X privé des rationnels dyadiques. Par ailleurs les mesures sont échangées par h .

La semi-conjugaison s'est révélée un excellent candidat comme isomorphisme de systèmes mesurés, ce qui sera souvent le cas.

Exemple 2. — Considérons le système (X, T, μ) où la transformation T est définie sur $X := [0, 1)$ par $Tx := \theta x \bmod 1$, θ étant le nombre d'or $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. On a exhibé sur X une probabilité T -invariante (équivalente à la mesure de Lebesgue et unique parmi celles-ci) notée μ . Ce système est (métriquement) isomorphe à un *sous-shift de type fini* appelé le θ -shift, muni d'une mesure markovienne.

Rappelons qu'un sous-shift désigne simplement un système topologique constitué d'une partie fermée Y de $X = \{0, 1, \dots, n-1\}^{\mathbf{NouZ}}$, invariante par le shift. Le complémentaire de Y dans X étant ouvert, c'est une union dénombrable de cylindres ouverts disjoints, qu'on peut, sans restriction, supposer définis par des contraintes portant sur des coordonnées consécutives ou blocs; ainsi, le fermé est défini par une liste dénombrable de blocs interdits. Le sous-shift (Y, T) est dit *sous-shift de type fini* lorsque la liste des blocs interdits est finie. A un tel sous-shift est associée une matrice de transition (à coefficients 0 – 1) M qui contient une grande partie de l'information statistique du système, et de coefficients $M_{ij} = 1$ si ij est un mot permis, 0 sinon. Ainsi $Y := \Sigma_M$ est l'ensemble

$$\{x \in \{0, 1, \dots, n-1\}^{\mathbf{NouZ}} : M_{x_i x_{i+1}} = 1\}$$

Le θ -shift est le sous-shift de Σ_2^+ constitué des suites de 0 et de 1 dans les quelles le bloc 11 n'apparaît pas. On le note Σ_θ . La matrice M correspondante est simplement

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

de polynôme caractéristique $X^2 - X - 1 = 0$. A toute suite (x_n) de Σ_θ on peut associer le réel $x = \sum x_n \theta^{-n}$; il est aussi naturel de définir l'application de X dans Σ_θ par

$$x \mapsto (x_n) \in \{0, 1\}^{\mathbf{N}} \quad \text{où} \quad x_n = \begin{cases} 0 & \text{si } T^n x \in [0, \theta^{-1}[\\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

c'est-à-dire la décomposition en base θ , qui est bien définie en dehors des réels admettant deux écritures (les réels de $\mathbf{Q}(\theta)$ ayant une écriture avec un nombre fini de termes non nuls et une se terminant par la suite 01010101...).

La mesure invariante sur Σ_θ est la mesure transportée par cette application. C'est une mesure de *Markov* définie sur les cylindres de Σ_θ par

$$\mu([\omega]) = g_{\omega_0} \cdot d_{\omega_l} \cdot \frac{1}{\theta^l}$$

si $\omega = \omega_0 \cdots \omega_l$ et si $(g_a)_a, (d_a)_a$ sont les vecteurs propres à gauche et à droite de la matrice M pour la valeur propre θ , normalisés par $\sum_a g_a d_a = 1$.

Comme application du théorème ergodique, on peut obtenir des résultats sur la fréquence d'apparition d'une lettre ou d'un mot dans le développement de presque tout nombre. Par exemple

PROPOSITION 1.3. — *Pour presque tout $x \in [0, 1)$, la fréquence d'apparition de 0 dans son développement en base θ est*

$$\frac{\theta^2}{1 + \theta^2}$$

Etant donné une partition finie de X ,

$$X = X_0 \cup X_1 \cup \cdots \cup X_p$$

on peut associer à tout x la suite $\omega(x) \in \Omega = \{a_0, a_1, \dots, a_p\}^{\mathbf{N}}$ définie par

$$\omega(x)_n = a_j \quad \text{si} \quad T^n x \in X_j.$$

On a codé l'orbite de x par une suite infinie de Ω , et on dit que la partition est **génératrice** si deux points différents de X ont des codages différents. En général le codage n'est pas défini de manière unique aux points frontières de la partition et en leurs pré-images, ce qui induit au mieux un isomorphisme métrique entre le système initial et le système symbolique.

Exemples. — C'est le cas de $x \mapsto 2x \pmod{1}$ et la partition $X_0 = [0, \frac{1}{2}[$ $X_1 = [\frac{1}{2}, 1)$ ou $x \mapsto \theta x \pmod{1}$ et la partition $X_0 = [0, \theta^{-1}[$ $X_1 = [\theta^{-1}, 1)$.

Un autre exemple important est celui du codage de fonction unimodale [6].

Le désordre est plus facile à mesurer pour les systèmes symboliques. C'est un des intérêts du codage.

Un outil pour mesurer la richesse d'un système dynamique est la notion d'entropie, **entropie topologique** h_{top} dans le cadre topologique et **entropie métrique** h_μ dans le cadre d'un système muni d'une mesure μ . Pour un sous-shift X , notons $W(X, k)$ le nombre de blocs de longueur k apparaissant dans X ; alors

$$h_{top} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log W(X, k)$$

que l'on peut adopter comme définition.

PROPOSITION 1.4. — *Soit Σ_M un sous-shift de type fini de matrice M primitive (une puissance de M a tous ses coefficients > 0). Alors l'entropie topologique est $\log \lambda$ où λ est la valeur propre dominante de la matrice.*

Démonstration. — Notons plus simplement $W(X, n)$ par $W(n)$; $W(2)$ est le nombre de 1 dans M et donc

$$W(2) = \sum_{i,j} M_{ij}$$

Maintenant si $n \geq 2$,

$$M_{ij}^{(n)} = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}} M_{ii_1} M_{i_1 i_2} \cdots M_{i_{n-1} j}$$

et $M_{ii_1} M_{i_1 i_2} \cdots M_{i_{n-1} j} = 1$ signifie que $ii_1 i_2 \cdots i_{n-1} j$ est un mot de X de longueur $n+1$; $M_{ij}^{(n)}$ est donc le nombre de mots de $W(n+1)$ commençant par i et finissant par j , et

$$W(n+1) = \sum_{i,j} M_{ij}^{(n)}$$

La proposition résulte alors du théorème de Perron-Frobenius [11] :

THÉORÈME 1.4 (Perron-Frobenius). — *Soit M une matrice carrée, à coefficients positifs, et primitive. Alors M admet une valeur propre dominante strictement positive, racine simple de son polynôme caractéristique, et admettant un vecteur propre à droite et à gauche strictement positifs.*

Si λ est cette valeur propre dominante, on a clairement

$$c \leq \frac{W(n+1)}{\lambda^n} \leq C$$

où c et C sont deux constantes positives, et la proposition suit. \diamond

La proposition reste vraie lorsque la matrice M est seulement **irréductible** (pour chaque couple (i, j) on peut trouver un entier n tel que M_{ij}^n soit > 0) en utilisant la version du théorème de Perron-Frobenius dans ce cas.

L'entropie topologique est un invariant topologique (pour la conjugaison) et l'entropie métrique un invariant pour l'isomorphisme métrique; un système d'entropie strictement positive, tel que le sous-shift de type fini, est un système dont l'aléatoire est riche.

1.4. Système associé à une suite

On s'intéresse désormais aux systèmes (X, T, μ) avec X métrique compact et d'entropie topologique nulle. Pour un tel système, l'entropie, quelque'elle soit, est un outil insuffisant pour mesurer l'aléatoire qu'il contient. (Pour un espace métrique compact X et un homéomorphisme T , $h_{top} = \sup\{h_\mu; \mu \in M_T(X)\}$, ce qui nous dispense d'introduire la notion d'entropie métrique!). De ce point de vue, les systèmes infinis les plus pauvres sont les **systèmes sturmiens**. Un système sturmien est un système engendré par une suite sturmienne, c'est-à-dire une suite de *complexité* minimale parmi les suites non-périodiques. Etant donné une suite u ne prenant qu'un nombre fini de valeurs, on considère pour tout n le nombre $p(n)$ des mots de la suite de longueur n ; la fonction p , appelée fonction complexité, a été étudiée en [2].

Le système engendré par u , est (X, T) avec $X = \overline{Orb}(u)$, T le shift (unilatéral ou bilatéral) sur X . Par construction de X , une suite x est dans X si et seulement si tout mot $x_i x_{i+1} \cdots x_j$ de x est un mot de la suite initiale.

Les systèmes sturmiens apparaissent lors du codage de la rotation irrationnelle et ont été analysés dans [2]. Rappelons un des résultats :

PROPOSITION 1.5. — *Soit R_α la rotation irrationnelle sur $X = [0, 1)$, et notons $X_0 = [0, 1 - \alpha[$, $X_1 = [1 - \alpha, 1)$. Alors le système (X, R_α, m) est métriquement isomorphe à un système sturmien.*

Exemple. — Lorsque $\alpha = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$, le codage envoie 0 sur la suite

$$u = 001001010010010100101001001010010010100101 \cdots$$

et le système initial, sur le système engendré par la suite u , c'est-à-dire (X, T, μ) où μ l'image de m .

Soit plus généralement u une suite récurrente de $A^{\mathbb{Z}}$. Le système (X, T) associé à la suite u est minimal si et seulement si tout mot de la suite (ou de n'importe quelle autre suite de X) y apparaît avec des lacunes bornées. Cela résulte d'une caractérisation plus générale de Gottschalk. En combinant ceci avec le théorème d'Oxtoby on obtient alors :

THÉORÈME 1.5. — *Le système associé à la suite u est minimal et uniquement ergodique (on dit alors **strictement ergodique**) si et seulement si tout mot de*

la suite admet une fréquence uniforme > 0 ; plus précisément, si $B = b_1 b_2 \cdots b_l$ apparaît dans u ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \#\{k; m+1 \leq k \leq m+n : u_{k+1} u_{k+2} \cdots u_{k+l} = b_1 b_2 \cdots b_l\} = d_B > 0$$

uniformément par rapport à m .

Démonstration. — B étant un mot de u , notons $[B]$ le cylindre engendré par B . Supposons le système strictement ergodique. Si μ est l'unique probabilité invariante du système, il suffit d'appliquer le théorème d'Oxtoby à la fonction continue $f = \mathbf{1}_{[B]}$ pour obtenir la limite cherchée avec $d_B = \mu([B])$. Par minimalité, cette limite est > 0 .

Réciproquement, la fonction d'ensembles d_B vérifie

$$0 \leq d_B \leq 1, \quad d_B = 1 \text{ si } B = \emptyset,$$

$$d_B = \sum_{b \in A} d_{Bb} = \sum_{b \in A} d_{bB}.$$

Il existe alors une mesure μ de probabilité T -invariante sur les boréliens de X telle que $\mu([B]) = d_B$ pour tout mot B . Le fait que (X, T) soit uniquement ergodique résulte de la caractérisation d'Oxtoby d'un tel système, et la minimalité découle de la condition $d_B > 0$ pour tout B . A noter que par minimalité, le support fermé de μ est X tout entier. \diamond

Toute l'information statistique d'un système strictement ergodique est contenue dans l'une quelconque des suites $x \in X$. On se restreint à ce type de système lorsque l'on veut étudier le désordre d'une suite ou d'une configuration bien déterminée. C'est une situation très différente de celle d'un Bernoulli-shift par exemple.

Exemples. — Certaines classes de suites ont été systématiquement étudiées ; nous allons commencer par des cas particuliers avant de tenter une généralisation.

1. *Suite de Thue-Morse.* — Considérons $A^{\mathbb{Z}}$ où $A = \{-1, +1\}$. On définit la suite $(m_n)_{n \geq 0}$ par

$$m_n = (-1)^{S_n}$$

où S_n désigne la somme des chiffres de l'entier n écrit en base 2, c'est-à-dire

$$S_n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$$

lorsque

$$n = n_1 + 2 \cdot n_2 + \cdots + 2^{k-1} \cdot n_k$$

de sorte que les n_i valent 0 ou 1. Il est facile de voir que la suite m est complètement déterminée par les relations

$$m_0 = 1, \quad m_{2n} = m_n, \quad m_{2n+1} = -m_n, \quad n \geq 0$$

ce qui implique que la suite est 2-automatique comme nous le verrons plus tard, et aussi bien par les relations

$$m_0 = 1, \quad m_{2^{n-1}+k} = -m_k, \quad k \geq 0, \quad n \geq 1$$

ce qui signifie que la suite est 2-multiplicative. Cette suite qui a été souvent étudiée et rencontrée dans différents domaines des mathématiques s'appelle **suite de Thue-Morse**.

PROPOSITION 1.6. — *La suite m prolongée aux entiers négatifs par $m_n = m_{-n-1}$ engendre sous le shift un système strictement ergodique et l'unique mesure invariante μ sur $(X = \overline{\text{Orb}}(m), T)$ vérifie*

$$\mu([1]) = \mu([-1]) = \frac{1}{2}$$

$$\mu([B]) \in \left\{ \frac{1}{3 \cdot 2^k}, \frac{1}{6 \cdot 2^k} \right\}$$

pour tout mot B de m de longueur l , $2^k + 1 \leq l \leq 2^{k+1}$, $k \geq 1$

La stricte ergodicité n'est pas plus difficile à établir dans un cadre plus général, ce qu'on verra plus loin. La description de μ sur les cylindres a été faite par Dekking et V. Berthé [4].

2. *Suite de Toeplitz.* — Considérons la suite définie pour tout $n \in \mathbf{Z}$ par

$$t_n = m_n \cdot m_{n-1}$$

Il est facile de voir que

$$t_n = \begin{cases} +1 & \text{si } n = 0, \\ -1 & \text{si } n \text{ est impair,} \\ (-1)^{k+1} & \text{si } n = 2^k(2m + 1), \quad k \geq 1. \end{cases}$$

On peut construire cette suite ainsi : on se figure les entiers comme des cases à remplir ; on place 1 en case 0, puis -1 dans toutes les cases impaires. On remplit alors une case restante sur deux par 1, puis à nouveau une case restante sur deux par -1 , une case restante sur deux par 1, *etc.* en alternant les 1 et les -1 .

Cette suite appelée **suite de Toeplitz** engendre elle aussi un système strictement ergodique, comme on le verra ci-dessous.

On s'aperçoit que le procédé de construction peut être généralisé à d'autres suites, en remplissant différemment les trous ; c'est ainsi, par exemple, qu'on peut construire les suites de *papiers pliés* [1].

3. *Suite de Fibonacci.* — Considérons $A = \{a, b\}$ et la suite dite de **Fibonacci** à valeurs dans A définie de proche en proche par la règle suivante : on part de a et on lui substitue le mot ab ; puis on recommence en remplaçant chaque a par ab et chaque b par a . On obtient une suite de mots de longueur tendant vers l'infini, chacun commençant par le précédent, qui converge donc vers la suite u

$$abaababaabaababaababaabaababaabaababa \dots$$

La suite des longueurs des mots successifs n'est autre que la suite de Fibonacci d'où le nom de la suite. De la même façon, on obtient

PROPOSITION 1.7. — *La suite u engendre sous le shift un système strictement ergodique et l'unique mesure invariante μ sur $(X = \overline{Orb}(u), T)$ vérifie*

$$\mu([a]) = \theta^{-1}, \quad \mu([b]) = \theta^{-2}$$

$$\mu([B]) \in \begin{cases} \left\{ \frac{1}{\theta^{k-1}}, \frac{1}{\theta^k} \right\} & \text{si } n = F_k - 1 \\ \left\{ \frac{1}{\theta^{k-1}}, \frac{1}{\theta^k}, \frac{1}{\theta^{k+1}} \right\} & \text{si } F_k \leq n < F_{k+1} - 1 \end{cases}$$

pour tout mot B de u de longueur $n \geq 2$, où θ désigne comme toujours le nombre d'or.

Il est facile d'établir que la fréquence d'apparition de la lettre a est θ^{-1} et celle de b , θ^{-2} . La fréquence de tout mot a été calculée par Dekking et V. Berthé ([4]) a étudié le cas plus général des suites sturmiennes.

4. *Suites substitutives.* — Les trois suites précédentes peuvent s'obtenir par un procédé de **substitution**,

$$a \rightarrow ab, \quad b \rightarrow ba$$

pour la suite de Thue-Morse, et

$$a \rightarrow ab, \quad b \rightarrow aa$$

pour la suite de Toeplitz.

Plus généralement, A étant un alphabet fini noté simplement $\{0, 1, \dots, s-1\}$, une substitution ζ est une application de A dans l'ensemble des mots construits sur A , qui se prolonge par juxtaposition, en une application encore notée ζ de $A^{\mathbf{N}}$ dans lui-même. Une suite u est substitutive si elle est point fixe d'une substitution. La substitution est de longueur constante, q , si les mots associés à chacune des lettres de A ont même longueur q ; dans ce cas on désigne par suite q -automatique toute image d'un point fixe par une application de A dans \mathbf{C} .

Un critère de Cobham permet de décider si une suite est q -automatique :

PROPOSITION 1.8. — *(u_n) est q -automatique si et seulement si l'ensemble des suites $\{u(q^k n + m)\}_{n \geq 0}$ lorsque $k \geq 0$ et $m < q^k$ est un ensemble fini.*

On définit la matrice de la substitution $M = M(\zeta)$: c'est une matrice $s \times s$ à coefficients entiers dont le coefficient M_{ij} est le nombre de i dans le mot $\zeta(j)$. Si on itère n fois la substitution ζ , $M(\zeta^n) = M(\zeta)^n$.

On suppose pour simplifier et assurer l'existence d'un point fixe u que, pour une lettre a , le mot $\zeta(a)$ commence par a , et que la suite des longueurs des mots $\zeta^n(b)$ tend vers ∞ avec n , pour $b \in A$. Alors $u = \zeta^\infty(a)$ est un point fixe de ζ . Le système associé à la suite u est comme toujours désigné par $(X = \overline{Orb}(u), T)$ où, a priori, X est une partie de $A^\mathbb{N}$. C'est un sous-shift avec beaucoup plus de contraintes que n'en possède un sous-shift de type fini ; ces contraintes d'ailleurs ne sont pas complètement décrites par la matrice M comme c'était le cas pour un sous-shift de type fini, puisqu'elle ne rend pas compte de l'ordre d'apparition des lettres dans chaque substitué ; c'est toute la différence ! Pour les décrire, il faudrait introduire la matrice des 2-mots. Cependant, on peut déjà établir avec la simple matrice M quelques résultats.

THÉORÈME 1.6. — *Si la matrice $M(\zeta)$ est primitive, le système est strictement ergodique.*

La démonstration (due à P. Michel) résulte du théorème de Perron-Frobenius et se trouve dans [10].

PROPOSITION 1.9. — *Tout système $(X = \overline{Orb}(u), T)$ est d'entropie nulle, et lorsque la matrice est primitive la fonction complexité est en $O(n)$.*

Démonstration. — La fonction complexité d'une suite substitutive est de l'une des formes suivantes : $O(1)$, $O(n)$, $O(n \log \log n)$, $O(n \log n)$, $O(n^2)$, [1] et le fait qu'elle soit de l'ordre de n pour une substitution primitive résulte une fois de plus du théorème de Perron-Frobenius [10].

5. — D'autres classes de suites sont intéressantes, telles que les suites multiplicatives, les suites de Morses généralisées ou les suites définies par itération d'un cocycle à valeurs dans un groupe fini...

2. Propriétés spectrales

On se place dans ce paragraphe, dans le cadre d'un système dynamique (X, T, μ) , avec (X, μ) espace de Lebesgue (isomorphe à l'intervalle unité muni de la tribu de Lebesgue et de la mesure de Lebesgue- ce qui n'est pas très restrictif) et T inversible. L'opérateur U_T défini sur l'espace de Hilbert $L^2(X, \mu)$ par

$$U_T(f) := f \circ T$$

est un opérateur unitaire, auquel on va appliquer la théorie de la décomposition spectrale. Ceci nous fournira un nouveau procédé de classification, qui, comme on le verra, permettra de distinguer les systèmes d'entropie nulle.

Deux systèmes sont **spectralement isomorphes**, si les opérateurs associés sont unitairement conjugués. Il est clair que l'isomorphisme métrique entraîne l'isomorphisme spectral, puisque, avec les notations du paragraphe 1.3, les opérateurs U_T et $U_{T'}$ sont conjugués par l'opérateur V_h de multiplication par h . La réciproque est vraie pour certaines classes de systèmes.

2.1. Généralités sur la théorie spectrale

Rappelons, dans le cas plus général d'un opérateur unitaire U agissant sur un espace de Hilbert séparable H , les principales caractéristiques spectrales. Il faut noter que le spectre ensembliste ne sera d'aucune utilité pour l'opérateur U_T avec T ergodique, car toujours égal à \mathbf{T} .

1. — On note $[U, h]$, l'espace cyclique engendré par h , c'est-à-dire la fermeture de l'espace vectoriel engendré par les $U^n h$, $n \in \mathbf{Z}$.

U restreint à un espace cyclique $[U, h]$ est isométriquement isomorphe à l'opérateur V de multiplication par la fonction $e^{2\pi it}$ sur le Hilbert $L^2(\mathbf{T}, \sigma_h)$ où σ_h , la mesure spectrale de h , est une mesure positive et bornée sur \mathbf{T} définie par ses coefficients de Fourier :

$$\widehat{\sigma}_h(n) := \langle U^n h, h \rangle$$

pour tout $n \in \mathbf{Z}$.

Cela résulte de l'identité

$$\langle P(U) \cdot h, P(U) \cdot h \rangle = \int_{\mathbf{T}} |P(t)|^2 d\sigma_h(t)$$

pour tout polynôme trigonométrique P et h dans H .

2. *Spectre discret.* — U est à spectre discret si l'espace vectoriel engendré par les fonctions propres est dense dans H .

3. *Spectre simple.* — U est à spectre simple s'il existe $h \in H$ tel que $[U, h] = H$.

4. *Spectre simple de Lebesgue.* — U est à spectre simple de Lebesgue, si U est unitairement conjugué à V sur $L^2(\mathbf{T}, m)$, ou encore s'il existe $h \in H$ tel que $(U^n h)_{n \in \mathbf{Z}}$ forme une base orthonormale de H . Dans ce cas, en effet, $\sigma_h = m$.

5. — On dit que U a une composante d'un certain type dans son spectre, si le spectre de la restriction de U à un sous-Hilbert invariant de H est de ce type. Ainsi, U a toujours un spectre discret en restriction à l'espace vectoriel engendré par les fonctions propres.

Le théorème de décomposition spectrale peut s'énoncer ainsi :

THÉORÈME 2.1. — *Soit U un opérateur unitaire sur un Hilbert séparable H . Il existe alors une suite $(h_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de H telle que*

a) $[U, h_n] \perp [U, h_m]$ pour tous $n \neq m$

b) $H = \bigoplus_{n \geq 1} [U, h_n]$

c) $\sigma_{h_1} \gg \sigma_{h_2} \gg \dots$

et la suite de mesures (σ_{h_n}) est unique à une équivalence près.

La **multiplicité spectrale** de U est le nombre minimal (fini ou infini) d'éléments f_1, \dots, f_m pour lesquels il existe une décomposition $H = \bigoplus_{n \geq 1} [U, f_n]$.

Revenons au cas d'un système dynamique et de l'opérateur U_T avec T ergodique. Dans ce cas, les fonctions propres, étant de module invariant par T , sont de module constant, que l'on peut choisir égal à 1. Les valeurs propres sont simples et forment un sous-groupe de \mathbf{T} , de même que la famille de fonctions propres normalisées.

Citons un premier résultat que l'on peut trouver dans [9] et qui clarifie les choses :

PROPOSITION 2.1. — *Soit (X, T, μ) avec T inversible : ou bien T est d'entropie métrique nulle, ou bien U_T a une composante de Lebesgue de multiplicité infinie.*

Autrement dit, les systèmes avec composante de Lebesgue de multiplicité infinie sont très riches du point de vue de l'aléatoire. Intuitivement, l'apparition d'une composante de Lebesgue dans le spectre dénote un certain hasard dans la description du système, alors qu'à l'opposé, un spectre discret est le fait d'un système rigide comme nous allons le voir. En fait l'étude spectrale apporte un autre éclairage à l'étude des systèmes de basse complexité, peut-être parce qu'on ne sait pas interpréter celle-ci ? Explorons quelques exemples en entropie nulle.

1. *Spectre discret.* — La rotation irrationnelle $R_\alpha x := x + \alpha \bmod 1$ agissant sur $[0, 1)$ est à spectre discret ; en effet les fonctions $e^{2\pi nit}$ avec n dans \mathbf{Z} sont fonctions propres de R_α et forment une base de $L^2(\mathbf{T}, m)$.

Le résultat suivant est dû à Halmos

PROPOSITION 2.2. — *Toute transformation ergodique à spectre discret est métriquement isomorphe à une rotation sur un groupe métrique compact abélien muni de la mesure de Haar.*

C'est un des cas où les notions d'isomorphisme spectral et d'isomorphisme métrique coïncident. Si Γ est le groupe discret des valeurs propres de la transformation T , toute translation ergodique T_g sur $G = \widehat{\Gamma}$ admet Γ comme spectre. Reste à montrer que deux systèmes discrets avec le même spectre Γ sont métriquement isomorphes ; pour cela on construit à l'aide des fonctions propres normalisées (f_γ) et (g_γ) et de leur propriété de groupe, un isomorphisme des σ -algèbres qu'on étend aux espaces eux-mêmes.

Exemple 1. — La transformation de Kakutani définie sur $([0, 1[, m)$ par

$$Tx = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & \text{si } x < \frac{1}{2}, \\ x - \frac{1}{4} & \text{si } \frac{1}{2} < x < \frac{3}{4}, \\ x - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} & \text{si } \frac{3}{4} < x < \frac{7}{8} \text{ etc.} \end{cases}$$

est à spectre discret car isomorphe à τ , l'addition de 1 avec retenue sur le groupe Ω des entiers dyadiques muni de sa mesure de Haar.

Rappelons que Ω est l'ensemble $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ muni de l'addition composante par composante avec retenue. Ω est un groupe métrique compact pour la distance dyadique $d(\omega, \omega') = \inf\{k, \omega_k \neq \omega'_k\}$. Un élément $\omega \in \Omega$ peut être représenté formellement par la somme infinie $\omega = \sum_{i=0}^{\infty} \omega_i 2^i$, de sorte que les entiers naturels, qui sont les ω avec un nombre fini de 1, sont denses dans (Ω, d) . A noter que dans cette représentation, $-1 = (1, 1, \dots, 1, \dots)$ et $(\underbrace{0, \dots, 0}_n, 1, 1, \dots) = -2^n$.

La mesure de Haar du groupe Ω n'est autre que la mesure produit $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}^{\mathbb{N}}$.

Ce système (uniquement ergodique) (Ω, τ) est appelé le *2-odomètre*.

Voir [8] pour une description géométrique de la transformation de Kakutani, et [9] pour une démonstration directe du fait que le spectre est discret.

Exemple 2. — Un exemple important est celui-ci : soit θ le nombre d'or ; on considère X_θ l'ensemble des suites de 0 – 1 sans 11 (qui a permis de définir le θ -shift) mais muni cette fois de l'addition T_θ de 1 avec retenue. Il s'agit en fait de la transformation induite par τ sur X_θ , car x étant dans X_θ , $\tau(x)$ y est encore si le mot 11 n'y apparaît pas ; sinon on définit

$$T_\theta(x) = \tau^{n(x)}(x), \quad n(x) = \inf\{n \geq 1; \tau^n(x) \in X_\theta\}.$$

On peut montrer que le système (X_θ, T_θ) est uniquement ergodique et discret (alors que le θ -shift est d'entropie positive !). On montre pour cela qu'il est isomorphe à la rotation $R_{\bar{\theta}}$ sur $[0, 1)$, où $\bar{\theta} = 1/\theta = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Notons (F_n) la suite de Fibonacci avec $F_{-1} = 0, F_0 = F_1 = 1$ et considérons pour $x \in X_\theta$,

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n (F_n \bar{\theta} - F_{n-1}) \pmod{1}.$$

(Rappelons que de la théorie des fractions continues, il résulte $|F_n \bar{\theta} - F_{n-1}| < \frac{1}{F_{n+1}}$).

On montre alors que ϕ est une application continue de X_θ dans $[0, 1)$ qui vérifie

$$\phi(T_\theta(x)) = T_\theta(x) + \bar{\theta} \pmod{1}.$$

Pour établir ce dernier point, soit $x \in X_\theta$ et notons j le premier indice pour lequel $x_j x_{j+1} = 00$; les composantes précédentes de x sont donc $0101 \dots 01$ ou $1010 \dots 01$

suivant la parité de j puisque 11 n'apparaît pas. Si j n'existe pas, on pose $T_\theta(x) = 0$. Ainsi, pour les autres, $T_\theta(x) = (0 \cdots 010x_{j+2} \cdots)$ et

$$\phi(T_\theta(x)) = F_j \bar{\theta} - F_{j-1} + \sum_{k=j+2}^{\infty} x_k (F_k \bar{\theta} - F_{k-1}),$$

alors que

$$\phi(x) = F_2 \bar{\theta} - F_1 + F_4 \bar{\theta} - F_3 + \cdots + F_{j-1} \bar{\theta} - F_{j-2} + \sum_{k=j+2}^{\infty} x_k (F_k \bar{\theta} - F_{k-1}).$$

L'identité découle de la relation $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$.

On montre enfin que ϕ est injective en dehors des suites 010101... et 101010... et surjective.

2. *Spectre continu.* — Les fonctions constantes étant invariantes par U_T , 1 est toujours valeur propre, et on se restreint à l'orthogonal des constantes. Le spectre est continu si U_T n'admet pas d'autres valeurs propres; toutes les mesures spectrales sont alors des mesures continues. Le premier exemple de transformation à spectre continu a été donné par Chacon; son idée était de détruire l'arithmétique de la rotation afin de supprimer les valeurs propres. Il s'agit d'un 3-odomètre perturbé. La construction initiale de Chacon était géométrique (voir [8]), mais on peut la décrire comme le shift d'un système symbolique, et même un système associé à une substitution primitive.

On construit une suite de 0-1 par blocs de la façon suivante : on part de $B_0 = 0$, $B_1 = 0010$, et de proche en proche, on définit $B_{n+1} = B_n B_n 1 B_n$. Cette suite de blocs converge vers une suite

$$w = 0010001010010001000101001010010001010010 \cdots$$

La longueur du bloc B_n est $\frac{3^n + 1}{2}$. La transformation de Chacon est le shift sur le système engendré par w qui est minimal puisque tout mot de w y apparaît avec lacunes bornées. Donnons une idée rapide de l'absence de valeur propre (autre que 1). Soit f une fonction propre associée à la valeur propre λ . Les suites w et $T^{\ell_n} w$ commencent par le même mot B_n et sont donc voisines pour n grand. Supposons que f puisse être choisie continue, de module 1; alors

$$f(T^{\ell_n} w) = \lambda^{\ell_n} f(w) \sim f(w)$$

pour n grand et λ^{ℓ_n} tend vers 1, ce qui, compte tenu de l'expression de ℓ_n , implique $\lambda = 1$.

Cette transformation possède d'autres propriétés : on peut établir ainsi que le spectre est simple et singulier (les mesures spectrales sont singulières pour h dans l'orthogonal des constantes). C'est le cas générique pour des transformations ergodiques d'entropie métrique nulle. L'existence d'une transformation à spectre simple de Lebesgue est un problème ouvert, et exhiber une transformation avec une composante de Lebesgue de multiplicité finie est déjà une opération difficile.

2.2. Classification spectrale de suites

On se restreint pour finir aux suites ne prenant qu'un nombre fini de valeurs complexes, d'entropie nulle, et engendrant un système uniquement ergodique, de sorte que toute suite du système a le même comportement. On va essayer de décrire sur des exemples les mesures spectrales, et selon leur nature (discrète, singulière, ou absolument continue), on en déduira une classification de la suite (ou du système) de l'ordre vers le désordre.

Considérons le système associé à la suite u prolongée à gauche de façon à conserver la stricte ergodicité. X est alors l'ensemble des $x \in A^{\mathbf{Z}}$ telles que $x_i x_{i+1} \cdots x_j$ soit un mot de la suite initiale, pour tous $i, j \in \mathbf{Z}$. Notons μ l'unique mesure invariante du système. Il résulte du théorème ergodique d'Oxtoby que, pour f continue sur X , et pour tout $x \in X$,

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k < N} f(T^{k+n}x) \overline{f(T^k x)} &= \int f(T^n x) \overline{f(x)} d\mu \\ &= \widehat{\sigma}_f(n) \end{aligned}$$

Si π_0 désigne la projection de X sur la composante d'indice 0, on a en particulier (puisqu'elle est continue sur X)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k < N} \pi_0(T^{k+n}x) \overline{\pi_0(T^k x)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k < N} x_{n+k} \overline{x_k} = \widehat{\sigma}_x(n)$$

où σ_x n'est autre que la mesure de corrélation de la suite x introduite par Wiener. Cette mesure peut aussi se définir comme la limite pré-faible dans $M(\mathbf{T})$, quand N tend vers ∞ , de la suite de mesures absolument continues $(P_N) \cdot m$ où

$$P_N(t) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n < N} x_n e^{2\pi i n t} \right|^2$$

La famille de mesures spectrales contient donc la mesure de corrélation de toutes les suites x , la mesure de corrélation de toute suite $h(x)$ où $h : A \mapsto \mathbf{C}$, et beaucoup plus.

2.2.1. Exemple 1 : suites sturmiennes

Elles ont été définies en [2]. Soit donc α et β deux réels de $]0, 1[$ avec α irrationnel. On définit sur les réels modulo 1, \mathbf{T}

$$f_\beta(t) = \begin{cases} +1 & \text{si } 0 \leq t < \beta, \\ -1 & \text{si } \beta \leq t < 1. \end{cases}$$

et la suite a de composante $a_n = f_\beta(n\alpha)$ pour tout entier $n \in \mathbf{Z}$. Le système engendré (X, T) est constitué des suites x de la forme

$$x = (f_\beta(t + n\alpha))_{n \in \mathbf{Z}}$$

ou

$$x = (g_\beta(t + n\alpha))_{n \in \mathbf{Z}},$$

g étant la fonction définie par

$$g_\beta(t) = \begin{cases} +1 & \text{si } 0 < t \leq \beta, \\ -1 & \text{si } \beta < t \leq 1. \end{cases}$$

Si on pose $\phi(x) = t$, l'application ϕ est un isomorphisme métrique de (X, T) sur (\mathbf{T}, R_α) puisque continue et injective, sauf peut-être pour les x associées à t tel que $t + n\alpha \equiv 0$ ou $t + n\alpha \equiv \beta$ pour un n , auquel cas deux suites distinctes ont même image par ϕ . Mais cet ensemble est dénombrable.

On en déduit que le système est discret, ce qui n'est pas surprenant.

2.2.2. Exemple 2 : suite de Toeplitz

Soit t la suite de Toeplitz définie précédemment et (X_t, S, ν) le système associé. On va montrer que ce système est discret, en établissant un isomorphisme entre ce système et le 2-odomètre (Ω, τ) avec sa mesure de Haar, où τ est l'addition de 1 avec retenue.

Par construction, la suite de Toeplitz est constante sur des progressions arithmétiques de plus en plus lacunaires qui remplissent \mathbf{N} . Plus précisément, si \mathcal{P}_k est la progression arithmétique $\{2^k(2m+1), m = 0, 1, 2, \dots\}$, on rappelle que t vaut constamment $(-1)^{k+1}$ sur \mathcal{P}_k , ceci pour tout $k \geq 0$. Les entiers naturels sont denses dans Ω pour la métrique 2-adique. On définit donc ϕ de X dans \mathbf{N} par

$$\phi(S^n t) = n$$

Il est clair que ϕ échange τ et S . Maintenant, si $S^n t$ et $S^m t$ sont proches dans X_t et commencent par un même bloc de taille 2^k , avec k grand, n et m sont voisins pour la métrique 2-adique, puisque divisibles par une même puissance 2^k . L'application ϕ , uniformément continue, se prolonge donc en une application continue de X_t sur Ω vérifiant encore $\phi \circ S = \tau \circ \phi$. Elle n'est pas injective, car t admet 2 prolongements à gauche, selon que l'on choisit $t_1 = 1$ ou $t_1 = -1$ avant de remplir les cases vers la gauche avec la même règle. Ainsi $|\phi^{-1}(-2^n)| = 2$; la mesure de Haar du groupe des entiers dyadiques ne charge pas cet ensemble dénombrable et par unique ergodicité des deux systèmes, les mesures invariantes sont échangées par ϕ . On a bien un isomorphisme métrique. On peut préciser les valeurs propres du système qui sont les rationnels dyadiques.

2.2.3. Exemple 3 : suite de Thue-Morse

Soit m la suite de Thue-Morse définie précédemment et (X_m, T, μ) le système associé. On va décomposer $H = L^2(X_m, \mu)$ en deux sous-espaces invariants sur lesquels le spectre est facile à décrire. L'application ψ définie sur X_m par

$$\psi(x) = (x_{n-1}x_n)_{n \in \mathbf{Z}}$$

commute avec le shift et définit donc un homomorphisme de (X_m, T) sur (X_t, S) , l'espace associé à la suite de Toeplitz, vérifiant $\psi(x) = \psi(x')$ si et seulement si $x = -x'$.

On décompose $H = H_d \oplus H_c$ où H_d est le sous-espace fermé de H constitué des fonctions paires, et H_c le sous-espace fermé de H constitué des fonctions impaires. Ces espaces sont invariants par T ou U_T et orthogonaux. D'après ce qui précède, U_T sur H_d est spectralement isomorphe à U_S sur $L^2(X_t, \nu)$ et donc à spectre discret. Cela signifie que les fonctions paires sont dans le sous-espace fermé de $L^2(X_m, \mu)$ engendré par les fonctions propres de U_T .

Si f est impaire, $\pi_0 \cdot f$ est une fonction paire et s'approche donc dans $L^2(X_m, \mu)$ par des combinaisons linéaires de fonctions propres. Si g_n est une telle combinaison $\sum_{1 \leq j \leq n} \alpha_j h_j$,

$$\|\sigma_f - \sigma_{\pi_0 \cdot g_n}\|_M \leq \|f - \pi_0 \cdot g_n\|_{L^2}$$

Par le théorème spectral,

$$\sigma_{\pi_0 \cdot g_n} \ll \sigma_{\pi_0 h_1} + \cdots + \sigma_{\pi_0 h_n}$$

et, si h est une fonction propre de module 1 associée à la valeur propre λ ,

$$\widehat{\sigma_{\pi_0 h}}(n) = \int (\pi_0 h)(T^n x) \overline{(\pi_0 h)(x)} d\mu = \lambda^n \widehat{\sigma_{\pi_0}}(n)$$

Tout revient à décrire la mesure de corrélation σ de la suite m . Il est facile d'établir à l'aide des propriétés de m , les relations suivantes pour σ :

$$\widehat{\sigma}(2n) = \widehat{\sigma}(n)$$

$$\widehat{\sigma}(2n+1) = -\frac{\widehat{\sigma}(n) + \widehat{\sigma}(n+1)}{2}$$

pour $n \geq 0$, et

$$\widehat{\sigma}(-n) = \widehat{\sigma}(n)$$

On en déduit

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k < N} |\widehat{\sigma}(k)|^2 = 0$$

et cela prouve que la mesure est continue d'après un critère de Wiener. Le fait qu'elle soit étrangère à la mesure de Lebesgue découle de la théorie ergodique : en effet, σ est invariante et ergodique pour la transformation $x \mapsto 2x \bmod 1$, tout comme la mesure de Lebesgue ; comme elles sont différentes, elles sont étrangères. On peut aussi décrire complètement cette mesure en calculant

$$\begin{aligned} P_{2^{N+1}}(t) &= \frac{1}{2^{N+1}} \left| \sum_{n < 2^{N+1}} m_n e^{2\pi i n t} \right|^2 \\ &= \frac{1}{2^{N+1}} \left| \sum_{n < 2^{N+1}, n=2k} m_n e^{2\pi i n t} + \sum_{n < 2^{N+1}, n=2k+1} m_n e^{2\pi i n t} \right|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2^{N+1}} \left| \sum_{k < 2^N} m_k e^{2\pi i 2^k t} - \sum_{k < 2^N} m_k e^{2\pi i (2k+1)t} \right|^2 \\
 &= P_{2^N}(2t)(1 - \cos(2\pi t)) \\
 &= \prod_{n=0}^N (1 - \cos 2\pi 2^n t)
 \end{aligned}$$

On retrouve ainsi le produit de Riesz ρ défini en début de texte.

On déduit de cette analyse que toute fonction de H_c est à mesure spectrale continue, plus précisément, absolument continue par rapport au produit de Riesz ρ . La suite de Morse est donc plus imprévisible que ne le sont les suites sturmiennes ou de Toeplitz. Par là-même le système associé est plus riche qu'il n'y paraît.

Il résulte aussi de cette étude que le système de Morse est une extension par un cocycle au-dessus du système de Toeplitz isomorphe à son facteur discret. Par ce procédé, on a changé la nature du spectre. Un exemple intéressant de Helson et Parry [9] permet d'obtenir une composante dénombrable de Lebesgue par l'extension d'un système discret.

2.2.4. Exemple 4 : suite de Rudin-Shapiro

La suite (r_n) de Rudin-Shapiro est à valeurs ± 1 obtenue de proche en proche comme coefficients d'une suite de polynômes trigonométriques (P_n) , (Q_n) vérifiant

$$\begin{aligned}
 P_0(t) &= Q_0(t) = 1 \\
 P_{k+1}(t) &= P_k(t) + e^{2\pi i 2^k t} Q_k(t) \\
 Q_{k+1}(t) &= P_k(t) - e^{2\pi i 2^k t} Q_k(t)
 \end{aligned}$$

pour $k \geq 1$.

Brillhart et Carlitz ont remarqué que, si n se décompose en $\sum_0^k \varepsilon_j 2^j$,

$$r_n = (-1)^{\varepsilon_0 \varepsilon_1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_{k-1} \varepsilon_k}$$

autrement dit, $r_n = (-1)^{f(n)}$ où $f(n)$ est le nombre de 11 dans l'écriture binaire de n . En particulier, $r_{2a+b} = (-1)^{ab} r_a$, soit

$$r_{2n} = r_n, \quad r_{2n+1} = (-1)^n r_n$$

On démontre que le système engendré est à spectre mixte : une partie discrète et une partie continue qui est Lebesgue de multiplicité 2. Ceci peut s'établir en suivant le schéma de la démonstration pour le système de Morse et en considérant le système associé à la suite de type Toeplitz $(r_{n-1} r_n)$ isomorphe au 2-odomètre. En particulier, on établit que la mesure de corrélation σ de la suite (r_n) est la mesure de Lebesgue. Il y a plusieurs démonstrations possibles de ce résultat ; l'une, due à

Kamae et purement arithmétique, utilise l'identité $r_n = (-1)^{f(n)}$. Une autre, plus analytique, part de la définition de la mesure de corrélation comme limite pré-faible de la suite de probabilités à densités

$$R_N(t) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n < N} r_n e^{2\pi i n t} \right|^2$$

On utilise pour cela la relation :

$$|P_n|^2 + |Q_n|^2 = 2^{n+1}$$

qui découle de la règle du parallélogramme, de laquelle on déduit $R_N(t) \leq C$, pour tout réel t et tout $N \geq 1$. Maintenant, si K_L désigne le noyau de Fejer d'ordre L , $(\sigma \star K_L)$ est une suite bornée par C dans L^∞ ; si $f \in L^\infty$ est une valeur d'adhérence pré-faible de cette suite, $\hat{f} = \hat{\sigma}$. Par ailleurs, on vérifie que $\frac{1}{2^n}(|P_n|^2 + |Q_n|^2)$ converge vaguement vers $2f \cdot m$; comme chaque polynôme vaut identiquement 2, $f = 1$ et $\sigma = m$.

Ce système est particulièrement intéressant de notre point de vue : c'est un système de basse complexité avec cependant une composante de Lebesgue; cette suite, d'une certaine façon, simule le hasard.

2.2.5. Exemple 5 : substitutions

Les exemples précédents peuvent, je pense, motiver une étude systématique des suites définies par substitution. Si les suites sturmiennes forment une classe beaucoup plus importante du point de vue de la cardinalité que celle des suites substitutives, les autres exemples relèvent des substitutions; on l'a vu pour les suites de Morse et Toeplitz, mais c'est aussi le cas de la suite de Chacon ou de la suite de Rudin-Shapiro (ci-dessous) ou même des suites de Morse généralisées obtenues par itération de substitutions différentes.

On va exhiber la règle de substitution qui fournit la suite de Rudin-Shapiro. Par le critère de Cobham, la suite est 2-automatique. Il nous faut donc trouver une substitution de longueur 2 : si V_n désigne le bloc des coefficients de P_n , et W_n le bloc des coefficients de Q_n , tous deux de longueur 2^n , on a :

$$V_0 = W_0 = 1$$

$$V_{n+1} = V_n W_n$$

$$W_{n+1} = V_n \overline{W_n}$$

où \overline{W} est le mot W dans lequel on a échangé 1 et -1 . On code alors les 2-mots 11, $1 - 1$, -11 , $-1 - 1$ par a , b , \bar{b} , \bar{a} pour obtenir la suite $ab\bar{a}\bar{b}ab\bar{a}\bar{b}ab\bar{a}\bar{b}\dots$ d'où la substitution $a \rightarrow ab$, $b \rightarrow \bar{a}\bar{b}$ en composant avec l'opération de symétrie; la suite de Rudin-Shapiro s'obtient en projetant a, b sur 1, et \bar{a}, \bar{b} sur -1 .

La suite de Chacon s'obtient à partir de la substitution définie sur $A = \{a, b, c\}$ par

$$a \rightarrow ab, \quad b \rightarrow cab, \quad c \rightarrow ccab$$

et de la projection $h : A \rightarrow \{0, 1\}$ vérifiant $h(a) = 1$, $h(b) = h(c) = 0$.

Pour les substitutions de longueur constante, il existe un critère très simple dû à M. Dekking permettant de vérifier que le système associé est discret (et ainsi toutes les mesures spectrales discrètes)

THÉORÈME 2.2. — *Le système associé à la substitution primitive ζ de longueur q sur l'alphabet $A = \{a_1 \cdots a_s\}$ est discret si et seulement si elle admet une coïncidence, c'est-à-dire, si l'on peut trouver n et $k < q^n$ tels que*

$$\zeta^n(a_1)_k = \zeta^n(a_2)_k = \cdots = \zeta^n(a_s)_k$$

(où $\zeta(a)_k$ est la k -ième lettre du mot $\zeta(a)$).

Il en résulte immédiatement que la suite de Toeplitz engendre un système discret.

Par contre il n'existe pas de tel critère pour les substitutions de longueur non-constante. Ainsi la suite de Fibonacci engendre un système discret puisqu'elle est sturmienne. On peut aussi établir un isomorphisme entre le système de Fibonacci, et le système discret (X_θ, T_θ) étudié en 2. 1. Cette démonstration conduit à la conjecture suivante :

CONJECTURE. — *Une substitution primitive dont la valeur propre de Perron-Frobenius est un nombre de Pisot unitaire est à spectre discret.*

La question n'est pas même résolue lorsque l'alphabet est $\{0, 1\}$.

Un nombre de Pisot $\theta > 1$ est un entier algébrique dont tous les conjugués sont à l'intérieur du disque ouvert $\{|z| < 1\}$. Il est unitaire si le produit des racines de l'équation vaut ± 1 . C'est le cas du nombre d'or θ puisqu'il est racine de $X^2 - X - 1 = 0$ et que son conjugué $\theta' = -\frac{1}{\theta}$.

Les questions suivantes sont ouvertes :

Questions.

1. Peut-on caractériser les substitutions ayant une composante de Lebesgue, produisant ainsi des suites de basse complexité mais imprévisibles ?

2. Existe-t-il une transformation ergodique à spectre simple de Lebesgue ? (question attribuée à Banach)

Bibliographie

- [1] ALLOUCHE J. P., MENDÈS FRANCE M., *Automatic sequences*, in *Beyond quasicrystals*, F. Axel, D. Gratias editors, Les Editions de Physique, Springer (1995).

- [2] ARNOUX P., *Complexité de suites à valeurs dans un ensemble fini : quelques exemples*, in *Aspects des systèmes dynamiques, Journées X-UPS 1994*, Centre de Mathématiques, Ecole Polytechnique (1994).
- [3] BEDFORD, KEANE M., SERIES C., *Ergodic theory, Symbolic dynamics and Hyperbolic spaces*, Oxford University Press, 1991.
- [4] BERTHE V., *Entropy in deterministic and random systems*, in *Beyond quasicrystals*, F. Axel, D. Gratias editors, Les Editions de Physique, Springer (1995).
- [5] CORNFELD J. P., FOMIN S. V., SINAI Y. G., *Ergodic theory*, Springer Verlag, 1982.
- [6] DEVANEY R. L., *An introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Benjamin/Cummings, 1986.
- [7] FATHI A., *Systèmes dynamiques discrets*, in *Introduction aux systèmes dynamiques, Journées X-UPS 1996*, Ecole Polytechnique (1996).
- [8] FRIEDMAN N. A., *Replication and stacking in ergodic theory*, A. M. M. (janv. 1992), 31–41.
- [9] PARRY W., *Topics in ergodic theory*, Cambridge University Press, 1981.
- [10] QUEFFÉLEC M., *Substitution dynamical systems- Spectral analysis*, Lecture Notes Math. 1294, pringer, 1987.
- [11] SENETA E., *Non-negative matrices. An introduction to theory and applications*, Allen & Unwin, London, 1973.
- [12] SUTO A., *Schrödinger difference equation with deterministic ergodic potentials*, in *Beyond quasicrystals*, F. Axel, D. Gratias editors, Les Editions de Physique, Springer (1995).
- [13] ZUILY C., QUEFFÉLEC H., *Eléments d'analyse pour l'agrégation*, Masson, 1995.
- [14] WALTERS P., *Ergodic theory- Introductory lectures*, Lecture Notes Math. 458, Springer, 1975.

UFR de Mathématiques et URA 751 du CNRS
UST Lille
F-59655 Villeneuve d'Ascq cedex

Adresse électronique : Martine.Queffelec@univ-lille1.fr

Le doublement de l'angle

ADRIEN DOUADY

Introduction (à lire en dernier)

Dans les systèmes dynamiques, on distingue deux grandes tendances de comportement, appelées *hyperbolique* et *quasi-périodique*. Le doublement de l'angle constitue un exemple des plus typiques du comportement hyperbolique. Le caractère expansif est évident ; le caractère contractant, généralement présent dans les systèmes hyperboliques, est ici absent, remplacé par le fait que l'application n'est pas injective.

Comme il s'agit d'un système particulièrement simple, un grand nombre de propriétés peuvent être établies de façon élémentaire. Cela ne veut pas dire que les démonstrations sont faciles, mais qu'elles utilisent peu d'outils théoriques. Nous nous efforçons de n'utiliser que des notions figurant au programme de Math. Spé.

Notations et définitions

On pose $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$. C'est le groupe des angles (plans orientés), en prenant le tour complet et non le radian comme unité. On peut le considérer comme le quotient de l'intervalle $[0, 1]$ par la relation d'équivalence identifiant 0 à 1. Un point de \mathbf{T} est parfois appelé un *angle*, un angle est dit *rationnel* si ses représentants sont rationnels, etc. Un *arc* dans \mathbf{T} est l'image d'un intervalle de \mathbf{R} , un *demi-cercle* l'image d'un intervalle de longueur $1/2$.

On considère l'application $\mathbf{q} : t \mapsto 2t$ de \mathbf{T} dans lui-même. On note \mathbf{q}^n la n -ème itérée de \mathbf{q} . Etant donné $t \in \mathbf{T}$, l'orbite $O(t)$ de t est l'ensemble des $\mathbf{q}^n(t)$. On note $\omega(t)$ l'ensemble des points de \mathbf{T} qui sont limite d'une suite extraite de la suite des $\mathbf{q}^n(t)$. L'*orbite fermée* de t est la fermeture de $O(t)$, c'est donc $O(t) \cup \omega(t)$.

Une étoile (*) indique un fait énoncé sans démonstration, celle-ci étant laissée au lecteur. Quand elle est un peu difficile, on mettra (**) ou (***) . Les endroits qui s'écartent du programme de Math. Spé. sont indiqués par (!).

Un grand nombre de propriétés s'étendent à $\mathbf{q}_d : t \mapsto dt$ pour d entier ≥ 2 (la généralisation étant souvent plus facile quand d est premier),

Plan de l'exposé

Nous montrons d'abord que les points d'orbite finie sont les points rationnels de \mathbf{T} . Par analogie avec le fait que l'ensemble des nt est fini pour t rationnel et dense pour t irrationnel, on pourrait penser que l'orbite (par \mathbf{q}) de tout point irrationnel est dense dans \mathbf{T} . Nous montrons au chapitre 1 qu'il n'en est rien et nous donnons des exemples montrant ce que peut être l'orbite fermée, après quoi nous donnons (avec ou sans démonstration) des propriétés générales des orbites fermées quand elles ne sont pas \mathbf{T} tout entier.

Au chapitre 2, nous étudions les orbites contenues dans un demi-cercle, qui forment une famille particulièrement intéressante.

Le chapitre 3 est consacré aux propriétés de \mathbf{q} qui découlent de son caractère expansif.

Les images de l'ensemble de Mandelbrot et de la courbe de Julia (exposé suivant) ont été obtenues par Dan Sorensen (dan@mat.dtu.dk). Je l'en remercie.

1. Types d'orbites fermées

1.1. Orbites finies

Un point $t \in \mathbf{T}$ est dit périodique (pour \mathbf{q}) s'il existe un entier $k > 0$ tel que $\mathbf{q}^k(t) = t$; le plus petit k ayant cette propriété est appelé la *période* de t . On dit que t est *prépériodique* s'il existe un entier ℓ tel que $\mathbf{q}^\ell(t)$ soit périodique; nous appelons le plus petit ℓ ayant cette propriété la *prépériode*. Les points prépériodiques de prépériode 0 sont les points périodiques. Ces définitions valent pour une application quelconque d'un ensemble dans lui-même. Les points d'orbite finie sont les points prépériodiques (*).

Pour l'application \mathbf{q} , nous avons :

THÉORÈME 1. — *Les points d'orbite finie sont les points rationnels de \mathbf{T} .*

Démonstration.

(a) t rationnel $\implies t$ d'orbite finie.

Si $t = [p/q]$ (classe mod \mathbf{Z} de p/q), l'orbite de t est contenue dans l'ensemble des $[i/q]$, $i = 0, \dots, q - 1$. Elle est donc finie.

(b) t prépériodique $\implies t$ rationnel.

Si t est périodique d'ordre k , on a $2^k t = t$, soit $(2^k - 1)t = 0$. Si x est un représentant de t dans \mathbf{R} , le nombre $(2^k - 1)x$ est un entier p et on a $x = p/(2^k - 1)$.

Si t est prépériodique de prépériode ℓ et si x est un représentant de t , alors $2^\ell x$ est de la forme $p/(2^k - 1)$, et on a $x = p/2^\ell(2^k - 1)$. \square

Remarque. — En combinant les deux parties de cette démonstration on voit que tout rationnel peut se mettre sous la forme $p/2^\ell(2^k - 1)$.

Cela peut se voir directement dans le cadre arithmétique (*).

1.2. Interprétation de q comme décalage

En représentant chaque nombre de \mathbf{R}_+ par son développement en base 2, et en ne retenant que la partie après la virgule, on obtient une correspondance entre \mathbf{T} et $\{0, 1\}^{\mathbf{N}^*}$, où $\mathbf{N}^* = \{1, 2, \dots\}$. L'usage est d'exclure les développements ne comportant que des 1 à partir d'un certain rang. Nous nous écartons de cet usage, et nous considérons qu'un nombre dyadique, c'est-à-dire de la forme $p/2^k$, a deux développements, un se terminant par une infinité de 0 et l'autre par une infinité de 1. L'application q se traduit sur les écritures en base 2 par le décalage d'un cran vers la gauche, avec suppression du premier terme.

Reprenons cela de façon plus précise. Notons E l'ensemble $\{0, 1\}^{\mathbf{N}^*}$ des suites $u = (u_1, \dots, u_n, \dots)$ où les u_i sont égaux à 0 ou 1. Les éléments de E seront appelés *écritures*. A chaque écriture $u = (u_1, u_2, \dots)$ est associé le nombre $\sum u_n/2^n$ qu'elle représente, et sa classe t dans \mathbf{T} . On obtient ainsi une application $v : E \rightarrow \mathbf{T}$.

On définit le *décalage* $s : E \rightarrow E$ par $s(u) = u'$ avec $u'_n = u_{n+1}$.

On a (*) un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{s} & E \\ v \downarrow & & \downarrow v \\ \mathbf{T} & \xrightarrow{q} & \mathbf{T} \end{array}$$

On définit une distance d sur E par $d(u, u') = 2^{-k}$ où k est le plus petit i tel que u_i soit différent de u'_i . Muni de cette distance, E est homéomorphe à l'ensemble de Cantor triadique (*). On munit \mathbf{T} de la distance définie par $d(t, t') = \inf d(x, x')$ pour x représentant de t dans \mathbf{R} et x' de t' , la distance sur \mathbf{R} étant la distance usuelle. Alors v est continue et même lipschitzienne de rapport 2, ce qui signifie qu'on a $d(v(t), v(t')) \leq 2 \cdot d(t, t')$.

L'application v est surjective mais non injective. Cependant elle est "presque" bijective : à l'exception des angles dyadiques qui forment un ensemble dénombrable, chaque point de \mathbf{T} a un seul point dans son image réciproque. On ne peut pas trouver d'application continue $s : \mathbf{T} \rightarrow E$ telle que $v \circ s$ soit l'identité de \mathbf{T} . En effet \mathbf{T} est connexe et toute application continue de \mathbf{T} dans E est constante.

Pour $u \in E$, l'orbite de $v(u)$ par q est l'image par v de l'orbite de u par s . Il en est de même pour les orbites fermées (*).

1.3. Exemples d'orbites non denses

Soit Y l'ensemble des écritures où ne figurent jamais trois 0 consécutifs, ni trois 1 consécutifs, et posons $X = v(Y)$. L'ensemble Y est infini non dénombrable (*), donc X aussi, et X contient des points irrationnels. On a $s(Y) = Y$, d'où $q(X) = X$; en

fait X est l'ensemble des $t \in \mathbf{T}$ dont l'orbite ne rencontre pas l'arc ouvert $] -1/8, 1/8[$. Pour $t \in X$, l'orbite de t est contenue dans X , donc aussi l'orbite fermée puisque X est fermé (*).

Pour tout ouvert U de \mathbf{T} , on peut définir de la même façon un ensemble X_U : l'ensemble des points dont l'orbite ne rencontre pas U . C'est un ensemble fermé et on a $\mathbf{q}(X_U) \subset X_U$.

L'ensemble X_U peut être fini ou infini, dénombrable ou homéomorphe à l'ensemble de Cantor ou encore non dénombrable et avec des points isolés. Nous étudierons au Chapitre 2 le cas où U est un demi-cercle.

PROPOSITION 1. — *Si U est un arc ouvert de longueur $\leq 1/2$, l'ensemble X_U n'est pas vide, et on a $\mathbf{q}(X_U) = X_U$.*

Démonstration. — Pour tout n soit A_n l'ensemble des $t \in \mathbf{T}$ tels que $\mathbf{q}^i(t)$ n'appartienne pas à U pour $i = 0, \dots, n-1$. On a $A_1 = \mathbf{T} - U$ et $A_{n+1} = \mathbf{q}^{-1}(A_n) \cup (\mathbf{T} - U)$. On a $\mathbf{q}(A_{n+1}) = A_n$. En effet l'inclusion $\mathbf{q}(A_{n+1}) \subset A_n$ est immédiate, et pour chaque élément de A_n , l'une de ses deux images réciproques est dans $\mathbf{T} - U$. Pour tout n , l'ensemble A_n est donc un fermé non vide, et ces fermés forment une suite décroissante.

Leur intersection, qui est X_U est donc (!?) non vide.

On a $X_U = \mathbf{q}^{-1}(X_U) \cap (\mathbf{T} - U)$, et il en résulte comme plus haut que $\mathbf{q}(X_U) = X_U$.

□

PROPOSITION 2 (*). — *Si U est un arc de longueur $> 1/2$, l'ensemble X_U est fini.*

1.4. Exemples d'orbite dense

Les exemples du numéro précédent sont en fait exceptionnels. Si on prend un t au hasard dans \mathbf{T} , il y a toutes les chances pour qu'il ait une orbite dense. C'est ce que nous verrons au § 1.6 (!). Dans ce §, nous nous préoccupons de construire effectivement un t irrationnel dont on sache qu'il a une orbite dense.

Cette propriété est équivalente (*) au fait que, dans l'écriture binaire u de t , toute suite finie de 0 et de 1 apparaisse quelque part. Pour obtenir une écriture ayant cette propriété, considérons *toutes* les suites finies de 0 et de 1, qui forment un ensemble dénombrable. On peut donc les numéroter par les entiers et les écrire toutes à la file :

.0 1 00 01 10 11 000 001 010 011 100 101 ...

A ma connaissance, la question de savoir si l'angle de 1 radian a une orbite dense par doublement est une question ouverte. Il s'agit de savoir si toute suite finie de 0 et de 1 apparaît dans le développement binaire de $1/2\pi$. On ne sait pas démontrer qu'il y a une infinité de 7 dans le développement décimal de π , et ces deux questions ont l'air d'être du même ordre de difficulté.

1.5. Exemple d'orbite fermée dénombrable

Considérons $t = \sum 2^{-n^2}$ d'écriture

$$.1\ 00\ 1\ 0000\ 1\ 000000\ 1\ 00000000\ 1\ \dots$$

L'ensemble $\omega(t)$ est formé des angles ayant au plus un 1 dans leur écriture dyadique, c'est-à-dire des 2^{-n} et de 0. Il est donc infini dénombrable, et comme l'orbite de t est aussi dénombrable, l'orbite fermée est infinie dénombrable.

1.6. Toute orbite fermée différente de \mathbf{T} est de mesure nulle

La théorie de la mesure de Lebesgue n'est pas au programme de Math. Spé., mais pour les ensembles fermés d'un intervalle de \mathbf{R} , on peut faire une théorie "à bon marché".

DÉFINITION. — Soit X un fermé de \mathbf{R} contenu dans un intervalle ouvert $J =]a, b[$. Les composantes connexes de $J - X$ forment une famille dénombrable d'intervalles ouverts L_i , notons ℓ_i leur longueur. On pose $\text{mes}(X) = b - a - \sum \ell_i$.

Pour justifier cette définition, il faut vérifier (*) que si on remplace J par un intervalle plus grand, cela ne change pas $\text{mes}(X)$.

En théorie de la mesure, on n'est jamais à un point près : on a

$$\text{mes}(X \cup \{c\}) = \text{mes}(X)$$

(ce n'est pas comme en topologie où un intervalle cesse d'être connexe si on lui enlève un point). On peut donc définir $\text{mes}(X)$ pour X fermé de \mathbf{T} comme $\text{mes}(\chi^{-1}(X))$, où χ désigne l'application de passage au quotient $[0, 1] \rightarrow \mathbf{T}$.

On a $\text{mes}(X') = \text{mes}(X)$ si X' est un translaté de X . Si X' est homothétique de X dans le rapport k , on a $\text{mes}(X') = k \cdot \text{mes}(X)$.

La formule $\text{mes}(X \cup X') = \text{mes}(X) + \text{mes}(X') - \text{mes}(X \cap X')$ est assez difficile à démontrer avec cette définition, mais nous aurons seulement besoin de la propriété suivante, beaucoup plus facile (*) :

PROPOSITION 3. — Pour $X \subset [a, b]$ et $X' \subset [b, c]$ fermés, on a

$$\text{mes}(X \cup X') = \text{mes}(X) + \text{mes}(X').$$

On en déduit (*) :

PROPOSITION 4. — Pour $X \subset \mathbf{T}$ fermé, on a $\text{mes}(\mathbf{q}^{-1}(X)) = \text{mes}(X)$.

Nous allons montrer :

THÉORÈME 2. — Soit $X \subset \mathbf{T}$ un sous-ensemble strict, fermé et tel que $\mathbf{q}(X) \subset X$. Alors $\text{mes}(X) = 0$.

Dans \mathbf{T} ou dans $[0, 1]$, appelons *intervalle dyadique élémentaire* d'ordre k un intervalle de la forme $]p/2^k, (p+1)/2^k[$ avec $p \in \{0, \dots, 2^k - 1\}$. Pour démontrer le théorème, il suffit (*) de démontrer :

LEMME. — Pour J intervalle dyadique élémentaire, on a $\text{mes}(X_J) = 0$.

Démonstration du lemme. — Soit k l'ordre de J . On a

$$\text{mes}(\mathbf{q}^{-k}(X_J)) = \text{mes}(X_J).$$

Mais $\mathbf{q}^{-k}(X_J)$ est réunion des translatés de $Y = \mathbf{q}^{-k}(X_J)[0, 2^{-k}]$ dans tous les intervalles élémentaires d'ordre k , donc

$$\text{mes}(X_J) = \text{mes}(\mathbf{q}^{-k}(X_J)) = 2^k \text{mes}(Y).$$

D'autre part X_J est contenu dans $\mathbf{q}^{-k}(X_J) \cap (\mathbf{T} - J)$, d'où

$$\text{mes}(X_J) \leq (2^k - 1) \text{mes}(Y) = (1 - 2^{-k}) \text{mes}(X_J).$$

Ceci n'est possible que si $\text{mes}(X_J) = 0$. \square

COROLLAIRE. — *Pour $t \in \mathbf{T}$, l'orbite fermée de t est soit \mathbf{T} , soit un ensemble de mesure nulle.*

1.7. Presque tout point a une orbite dense (!)

Ici nous sortons, je crois du programme de Math. Spé, et nous ne pouvons pas tricher comme au n° précédent, car il faut admettre l'existence d'une théorie cohérente de la mesure des ensembles, pour laquelle une réunion dénombrable d'ensembles de mesure nulle est un ensemble de mesure nulle.

Mais si on accepte cela le travail qui reste à faire est facile : pour tout point t ayant une orbite dense, il existe un intervalle dyadique élémentaire J disjoint de l'orbite fermée de t . Alors t appartient à X_J . Par suite *l'ensemble des points de \mathbf{T} ayant une orbite non dense est la réunion des X_J pour J intervalle dyadique élémentaire.* Ces ensembles forment une famille dénombrable et chacun est de mesure nulle. Il en résulte :

THÉORÈME 3. — *L'ensemble des points de \mathbf{T} ayant une orbite non dense est de mesure nulle.*

1.8. Orbites uniformément réparties et loi des grands nombres (!!)

Pour $t \in \mathbf{T}$, J un intervalle de \mathbf{T} et $n \in \mathbf{N}$, notons $N(t, J, n)$ le nombre des $i \in \{0, \dots, n-1\}$ tels que $\mathbf{q}^i(t)$ appartienne à J . On dit que t a une orbite uniformément répartie si, pour tout intervalle J de \mathbf{T} , on a $N(t, J, n)/n \rightarrow \text{mes}(J)$ quand n tend vers l'infini.

Un simple découpage d'espilons donne (*) :

PROPOSITION 5. — *Pour montrer qu'un point t a une orbite uniformément répartie, suffit de montrer que, pour tout intervalle dyadique élémentaire J d'ordre k , on a $N(t, J, k) \rightarrow 2^{-k}$.*

Le théorème suivant est une traduction de la “loi des grands nombres” en théorie des probabilités.

THÉORÈME 4. — *L'ensemble des points de \mathbf{T} dont l'orbite n'est pas uniformément répartie est de mesure nulle.*

La loi des grands nombres invoquée est le résultat suivant, énoncé dans le langage des probabilités pour le jeu de pile ou face.

Une partie infinie du jeu de pile ou face (à coups indépendants donnant 0 ou 1 de façon équiprobable) a pour résultat une suite $u = (u_1, \dots, u_n, \dots)$. Soit $v = (v_1, \dots, v_k) \in \{0, 1\}^k$, et définissons le nombre $N(u, v, n)$ d'occurrences de v dans u jusqu'au $(n + k)$ -ème coup comme le nombre de valeurs de $i \in \{1, \dots, n\}$ pour lesquelles on a $u_{i+j-1} = v_j$ pour $j = 1, \dots, k$.

THÉORÈME LGN. — *Dans ces conditions, $N(u, v, n)/n \rightarrow 2^{-k}$ presque sûrement quand n tend vers l'infini.*

Pour passer d'un énoncé à l'autre, il suffit de se convaincre que tirer un nombre au hasard dans $[0, 1]$ suivant la loi de densité constante 1 revient à tirer à pile ou face les chiffres de son développement en base 2. Et de sortir du langage des probabilités.

2. Orbites tournantes

2.1. Ordre cyclique

Soit f une application de \mathbf{T} dans lui-même. Etant donné une partie finie X de \mathbf{T} , on dit que f *préserve l'ordre cyclique* sur X s'il existe une application $g : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}$ qui est un homéomorphisme préservant l'orientation et qui coïncide avec f sur X . Si on choisit un point t_0 dans X , des représentants x_0 et y_0 dans \mathbf{R} pour t_0 et $f(t_0)$, si pour $t \in \mathbf{T}$ on note $r(t)$ et $r'(t)$ ses représentants dans $[x_0, x_0 + 1[$ et $[y_0, y_0 + 1[$ respectivement, la condition que f préserve l'ordre cyclique sur X est équivalente à : l'application $r' \circ f \circ r^{-1} : [x_0, x_0 + 1[\rightarrow [y_0, y_0 + 1[$ est strictement croissante sur $r(X)$.

Si X est un ensemble éventuellement infini, on dit que f préserve l'ordre cyclique sur X si elle préserve l'ordre cyclique sur toute partie finie de X . Il suffit de le vérifier pour les parties à 3 éléments.

PROPOSITION 1 (*). — *Soit X une partie de \mathbf{T} . Pour que q préserve l'ordre cyclique sur X , il faut et il suffit que X soit contenue dans un demi-cercle semi-ouvert.*

COROLLAIRE. — *Soit t un point de \mathbf{T} . Pour que q préserve l'ordre cyclique sur l'orbite de t , il faut et il suffit que t soit périodique ou irrationnel, et appartienne à un ensemble X_J avec J un demi-cercle ouvert.*

Pour étudier X_J quand J est un demi-cercle, nous allons utiliser l'application f_J de \mathbf{T} dans lui-même qui coïncide avec \mathbf{q} sur $\mathbf{T} - J$ et qui est constante sur la fermeture de J . Pour $t \in X_J$, l'orbite de t par \mathbf{q} est la même, et avec la même indexation, que son orbite par f_J . Nous aurons à considérer l'*angle de rotation* de f ; mais d'abord il nous faudra donner quelques généralités sur la notion d'angle de rotation.

2.2. Angle de rotation

Soit $f : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}$ une application continue. On peut (*) relever f en une application continue $F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ (qui n'est déterminée par f qu'à une constante entière additive près). On a $F(x+1) = F(x) + d$, où d est un entier appelé le *degré* de f . L'application f_J définie au § 2.1 pour J un demi-cercle est de degré 1.

On dit que f est *monotone* si F est monotone, c'est-à-dire croissante (au sens large) ou décroissante (id.). Pour f monotone de degré 1, on peut définir l'*angle de rotation* de f . On définit d'abord le *nombre de rotation* de F .

THÉORÈME 1 ET DÉFINITION. — *Soit $F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une application croissante vérifiant $F(x+1) = F(x) + 1$. Alors $(F^n(x) - x)/n$ a une limite quand n tend vers l'infini. Cette limite ne dépend pas de x , elle est appelée nombre de rotation de F et notée $\text{Rot}(F)$.*

Si $f : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}$ est une application monotone croissante de degré 1, l'angle de rotation $\text{rot}(f)$ de f est la classe dans \mathbf{T} de $\text{Rot}(F)$, où F est un relèvement de f (cet angle ne dépend pas du choix de F).

Démonstration. — Le nombre $(F^n(x) - x)/n$ ne change pas si l'on remplace x par $x+1$. Pour $x \leq y \leq x+1$, on a $F^n(x) \leq F^n(y) \leq F^n(x) + 1$, donc $(F^n(x) - x)/n$ et $(F^n(y) - y)/n$ diffèrent d'au plus $1/n$. Par suite l'ensemble R_n des $(F^n(x) - x)/n$ pour $x \in \mathbf{R}$ est un intervalle fermé de longueur $\leq 1/n$. Pour p multiple de n , on a $R_p \subset R_n$. Il en résulte que l'intersection des R_n est réduite à un point $\text{Rot}(F)$ et que

$$\frac{F^n(x) - x}{n} - \text{Rot}(F) \leq 1/n$$

pour tout x . \square

PROPOSITION 2 (*).

(a) *Si f a un point périodique t de période k , alors $\text{rot}(f)$ est rationnel de dénominateur k . La correspondance $n \cdot \text{rot}(f) \mapsto f^n(t)$ préserve l'ordre cyclique. On a $\text{rot}(f) = [(F^k(x) - x)/k]$, où F est un relevé de f et x un représentant de t .*

(b) *Réciproquement, si $\text{rot}(f)$ est rationnel de dénominateur k , l'application f admet un point périodique de période k .*

(c) *Si $\text{rot}(f)$ est irrationnel, pour tout t la correspondance $n \cdot \text{rot}(f) \mapsto f^n(t)$ entre l'ensemble des multiples de $\text{rot}(f)$ et l'orbite de t préserve l'ordre cyclique.*

PROPOSITION 3 (*).

(a) Si $F_1 \leq F_2$, on a $\text{Rot}(F_1) \leq \text{Rot}(F_2)$.

(b) Si (F_s) est une famille continue d'applications (c'est-à-dire $(s, x) \mapsto F_s(x)$ continue), satisfaisant aux hypothèses du Th.1, alors $\text{Rot}(F_s)$ dépend continûment de s .

Remarque. — Il est abominablement faux que, si $(s, x) \rightarrow F_s(x)$ est continûment différentiable, l'application $s \rightarrow \text{Rot}(F_s)$ soit différentiable. La proposition suivante montre que cette application a des propriétés qui, dans tout autre domaine des mathématiques, seraient considérées comme pathologiques.

PROPOSITION 4 (*). — Soit $(F_s)_{s \in S}$ une famille continue d'applications satisfaisant aux hypothèses de la Prop.2. On suppose que S est un intervalle de \mathbf{R} et que, pour tout x , l'application $s \mapsto F_s(x)$ est croissante. Alors, pour tout rationnel $r = p/q$, l'ensemble des s tels que $\text{Rot}(F_s) = r$ est un intervalle fermé, qui n'est réduit à un point s_0 que si l'application f_{s_0} déduite de F_{s_0} vérifie $f_{s_0}^q = \text{Id}_T$.

2.3. L'abaque de l'escalier

Pour J demi-cercle ouvert ne contenant pas 0, l'ensemble X_J est réduit à 0 (*). Nous sommes donc ramenés à étudier $f_s = f_J$ pour $J = J_s$ image de $]s - 1/2, s[$ avec $s \in [0, 1/2]$. Cette application se relève en F_s définie par

$$F_s(t) = \begin{cases} 2s & \text{pour } t \in [s - 1/2, s], \\ 2t & \text{pour } t \in [s, s + 1/2], \\ 2s + 1 & \text{pour } t \in [s + 1/2, s + 1], \end{cases}$$

$$F_s(t + 1) = F_s(t) + 1.$$

Quand s varie de 0 à 1/2 le nombre $\text{Rot}(F_s)$ varie continûment de 0 à 1, avec un palier à chaque valeur rationnelle (on ne risque pas d'avoir $f_s^q = \text{Id}$ car f_s n'est pas injective). Pour $r \in]0, 1[$ irrationnel, il y a donc au moins un s tel que $\text{Rot}(F_s) = r$. En fait il n'y en a qu'un, et voici comment on peut le déterminer :

On sait que $[s] \in X_J$, car sinon on aurait $X_J \subset X_{J'}$ avec J' de longueur $> 1/2$, donc X_J fini et f_s aurait un point périodique. Considérons dans \mathbf{T} les points $t_0 = [(1 + s)/2]$, $t_1 = [s]$, \dots , $t_n = [2^{n-1} \cdot s]$. Le n -ème chiffre après la virgule dans le développement binaire de s est donné par la position de t_n par rapport à $\{0, 1/2\}$. Mais il n'y a pas de points de X_J entre 0 et $t_1 = s$, ni entre $1/2$ et t_0 , donc la position de t_n par rapport à $\{1/2, 0\}$ est la même que par rapport à $\{t_0, t_1\}$, et par la Prop.3 (c) c'est la même que la position de $n \cdot r$ par rapport à $\{0, r\}$. On a donc

$$t_n \in [0, 1/2] \iff [n \cdot r] \in [r, 1];$$

$$t_n \in [1/2, 1] \iff [n \cdot r] \in [0, r].$$

Finalement le développement de s est donné par l'abaque de l'escalier :

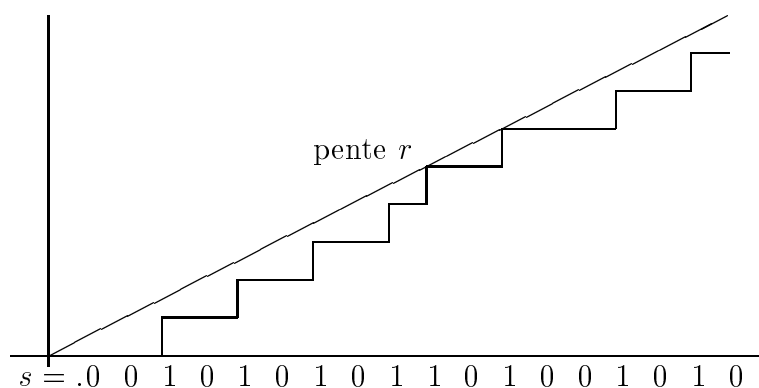


Figure 1 : L'abaque de l'escalier

Sur une feuille de papier quadrillé à carreaux unité on trace la droite D de pente r passant par l'origine, puis le plus haut escalier extrait du quadrillage situé au-dessous de D . On marque 1 aux abscisses entières > 0 où l'escalier monte, et 0 à celles où il ne monte pas.

2.4. Le cas r rationnel

Pour $r = p/q$ rationnel, l'abaque de l'escalier donne deux valeurs s^- et s^+ suivant que l'on prend "au-dessous" au sens strict ou au sens large. Pour $s \in [s^-, s^+]$, on a $\text{Rot}(F_s) = r$.

PROPOSITION 5 (**). — On a $s^- = P^-/Q$ et $s^+ = P^+/Q$ avec $Q = 2^q - 1$ et $P^+ = P^- + 1$. Les points s^- et s^+ de \mathbf{T} sont dans la même orbite par \mathbf{q} , et la correspondance

$$n \cdot r \rightarrow \mathbf{q}^n s^-$$

respecte l'ordre cyclique.

PROPOSITION 6 (**). — Pour $s \in]s^-, s^+[$ l'ensemble X_s est fini : c'est l'orbite commune de s^- et s^+ pour \mathbf{q} . Pour $s = s^-$ ou s^+ il est infini dénombrable, mais tout point a une orbite finie.

2.5. Interprétation pour l'ensemble de Mandelbrot (!!)

L'ensemble de Mandelbrot \mathbf{M} est l'ensemble des nombres complexes c tels que la suite (z_n) définie par $z_0 = 0$ et $z_{n+1} = z_n^2 + c$ soit bornée. C'est un sous-ensemble compact connexe de \mathbf{C} . La composante connexe W de l'intérieur de \mathbf{M} qui contient 0 est limitée par une cardioïde. Notons \mathbf{D} le disque unité ouvert de \mathbf{C} . Il existe des représentations conformes $h : \mathbf{D} \rightarrow W$ et $H : \mathbf{C} - \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C} - \mathbf{M}$ qui envoient $[0, 1[$ sur $[0, 1/4[$ et $]1, \infty[$ sur $]1/4, \infty[$ respectivement. Pour $t \in \mathbf{T}$, on définit le rayon

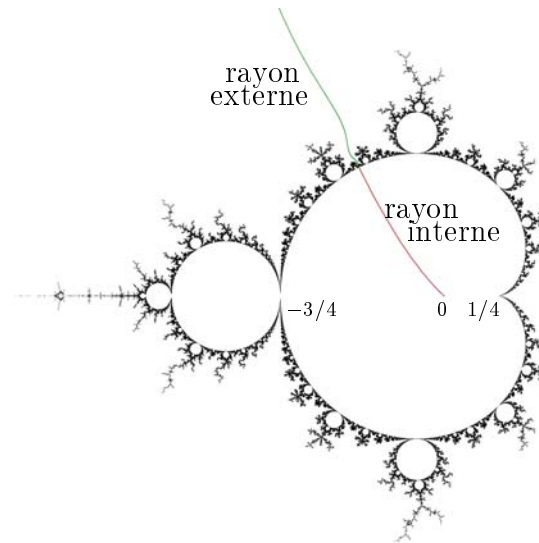


Figure 2 : L'ensemble de Mandelbrot
image de Dan Sorensen

interne et le *rayon externe* de \mathbf{M} d'argument t comme image respectivement des applications $h_t : \rho \mapsto h(\rho e^{2i\pi t})$ et $H_t : \rho \mapsto H(\rho e^{2i\pi t})$ définies sur $]0, 1[$ et $]1, \infty[$.

On peut démontrer (!!!) :

THÉORÈME 2. — Soit $r \in \mathbf{T}$, et soit s l'angle correspondant à r si r est irrationnel (cf. § 2.3), $s = s^-$ ou s^+ si r est rationnel (cf. § 2.4). Alors on a

$$\lim_{\rho \rightarrow 1} H_s(\rho) = \lim_{\rho' \rightarrow 1} h_r(\rho')$$

(et ces limites existent).

Autrement dit le rayon interne d'argument r et le rayon externe d'argument s aboutissent au même point du bord de \mathbf{M} .

2.6. Une propriété de transcendance

A titre de curiosité, nous donnons le résultat suivant, dû à P. Sentenac et l'auteur :

THÉORÈME 3. — Dans la correspondance étudiée au § 2.3, pour tout r irrationnel, s est transcendant.

Ce résultat s'appuie sur :

THÉORÈME (Roth, Thue). — Soit x un nombre algébrique. Alors, pour tout $b > 2$, il existe un $c > 0$ tel que pour tout rationnel p/q on ait $|x - p/q| \geq c/q^b$.

Il suffit de démontrer

LEMME (*). — Soit $r \in \mathbf{T}$ irrationnel et soient (r_n) les réduites du développement de r en fraction continue. Notons $s_n = P_n/Q_n$ l'angle s^- ou s^+ correspondant à r_n , le plus proche de s . Alors, pour une infinité de valeurs de n on a $|s_n - s| < 1/Q_n^b$ où $b - 1$ est le nombre d'or, i.e. $b = (3 + \sqrt{5})/2$.

Indications. — On a $q_{n+1} \geq q_n + q_{n-1}$, et par suite q_{n+1}/q_n est supérieur au nombre d'or pour au moins une valeur de n sur deux. Pour ces valeurs, on a

$$|s_n - s| < |s_n - s_{n+1}| = \frac{1}{Q_n Q_{n+1}} \leq \frac{1}{Q_n^b}.$$

3. Propriétés hyperboliques de q

3.1. Ordre orbital

Soit $t \in \mathbf{T}$, et notons x_n le représentant de $q^n(t) = 2^n t$ dans $[0, 1[$. L'ordre orbital défini par t est la relation d'ordre \leq (de préordre si t est rationnel) définie sur \mathbf{N} par

$$n \leq p \iff x_n \leq x_p.$$

PROPOSITION 1 (*). — Deux points différents de \mathbf{T} ne peuvent pas définir le même ordre orbital.

Indication. — En procédant comme en 2.3, on peut écrire le développement de t , (ou x_0) en base 2 à partir de l'ordre orbital.

Remarque. — La Prop.1 ne s'étend pas telle quelle à q_d , $d > 2$. Exemple : $d = 3$, $t = 1/8$, $t' = 1/4$. En degré 2 on peut détecter la position de $1/2$. Pour $d > 2$, on ne peut pas détecter la position des i/d par rapport à l'orbite. Il faut se les donner pour avoir l'unicité.

Question. — Caractériser les relations d'ordre sur \mathbf{N} qui peuvent être l'ordre orbital d'un point t pour q .

3.2. Conjugaison à q

Soit $f : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}$ continûment dérivable de degré 2, i.e. admettant un relèvement $F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ vérifiant $F(x+1) = F(x) + 2$. On pose $f'(t) = F'(x)$ pour x représentant de t .

THÉORÈME 1 (*). — On suppose $f'(t) > 1$ pour tout t . Alors il existe un homéomorphisme unique $h : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}$ préservant l'orientation et conjugant f à q ,

c'est-à-dire tel que $h \circ f \circ h^{-1} = \mathbf{q}$. L'homéomorphisme h est bihöldérien, c'est-à-dire qu'il existe des constantes c et b telles que

$$\begin{aligned} d(h(x), h(x')) &\leq c \cdot d(x, x')^b \\ d(x, x') &\leq c \cdot d(h(x), h(x'))^b. \end{aligned}$$

Indications. — L'application f a un point fixe unique σ . On prend h_0 arbitrairement tel que $h_0(\sigma) = 0$, et on définit h_n par $\mathbf{q} \circ h_{n+1} = h_n \circ f$, $h_{n+1}(\sigma) = 0$. Les h_n forment une suite de Cauchy pour la convergence uniforme. Pour montrer que h est bihöldérienne, on remarque que, en notant e^m et e^M les bornes inférieure et supérieure de f' , pour tout intervalle J , le temps n que met J à recouvrir \mathbf{T} (c'est-à-dire le plus petit n tel que $f^n(J) = \mathbf{T}$) est lié à la longueur ℓ de J par

$$m(n-1) \leq -\log \ell \leq Mn.$$

Remarques.

(1) Si t est un point périodique de période k pour f et si le *multiplicateur* $(f^k)'(t) = \prod_{i=0}^{k-1} f'(t_i)$ (où les t_i sont les points du cycle) n'est pas 2^k , il est exclu que h ait une dérivée $\neq 0$ en t .

(2) Ceci s'étend à $d > 2$, mais avec $d-1$ choix, correspondant aux $d-1$ points fixes de f .

(3) Si on suppose seulement f monotone de degré 2, on peut trouver $h : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}$ continue monotone telle que $h \circ f \text{ à } \mathbf{q} \circ h$. Mais h n'est pas forcément injective, et ne le sera pas si f a des points périodiques attractifs.

3.3. Lemme de poursuite

DÉFINITION. — Soit $\varepsilon > 0$. On appelle ε -pseudo-orbite (dans \mathbf{T} pour \mathbf{q}) une suite $(t_n)_{n \in \mathbf{N}}$ telle que $d(t_{n+1}, \mathbf{q}(t_n)) \leq \varepsilon$ pour tout n .

THÉORÈME 2 (*). — Soit $\varepsilon \leq 1/4$. Pour toute ε -pseudo-orbite (t_n) , il existe une véritable orbite (s_n) , unique, qui diffère de (t_n) d'au plus ε .

Autrement dit, il existe un $s \in \mathbf{T}$ unique tel que,

$$(\forall n) \quad d(\mathbf{q}^n(s), t_n) \leq \varepsilon.$$

Remarques.

(1) Ceci est dû à l'expansivité de \mathbf{q} , qui a un rapport 2. Pour une application dilatante avec un rapport $\lambda > 1$, on trouverait une correspondance $\varepsilon \mapsto \frac{\varepsilon}{\lambda-1}$.

(2) Il n'y a rien de pareil avec par exemple

$$x \mapsto x + \frac{1}{10}(\sin \pi x)^2.$$

Le point fixe 0, qui fait une barrière aux orbites, est perméable aux ε -pseudo-orbites pour tout $\varepsilon > 0$. Les orbites et les pseudo-orbites ont donc des comportements très différents.

Département de Mathématiques
Bât. 425
Université Paris-Sud
91405 Orsay cedex
France

Courbes de Julia sans tangente

ADRIEN DOUADY

Introduction

Etant donné un nombre complexe c , on note f_c l'application $z \mapsto z^2 + c$ de \mathbf{C} dans lui-même. Considérons pour tout point $z_0 \in \mathbf{C}$ l'orbite de z_0 par f_c , c'est-à-dire la suite des $z_n = f_c^n(z_0)$. Pour $c = 0$, la situation est simple : si $|z_0| < 1$, la suite z_n tend vers 0, si $|z_0| > 1$, on a $|z_n| \rightarrow \infty$, si $|z_0| = 1$, on a $|z_n| = 1$ pour tout n ; l'application $\gamma_0 : t \mapsto e^{2i\pi t}$ est un homéomorphisme de \mathbf{T} sur le cercle unité J_0 qui conjugue l'application $\mathbf{q} : t \mapsto 2t$ à f_0 restreinte à J_0 .

Dans cet exposé nous allons montrer que, pour $|c| < 1/4$, on a une situation analogue jusqu'à un certain point.

THÉORÈME 1.

(a) Pour $|c| < 1/4$, il existe une courbe J_c dans \mathbf{C} telle que $f_c(J_c) = J_c$, et un homéomorphisme γ_c de \mathbf{T} sur J_c conjuguant \mathbf{q} à f_c

(b) L'application f_c a deux points fixes, un α_c dans la région Δ entourée par J_c et un β_c sur J_c . Pour $z_0 \in \Delta$, l'orbite (z_n) de z_0 tend vers α_c ; pour z_0 dans la région extérieure à J_c on a $|z_n| \rightarrow \infty$.

Commentaire. — Par courbe dans \mathbf{C} , on entend un ensemble homéomorphe à un cercle. L'assertion (a) est simplement qu'il existe une application continue injective $\gamma_c : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{C}$ telle que $f_c \circ \gamma_c = \gamma_c \circ \mathbf{q}$; on peut appeler J_c son image et comme \mathbf{T} est compact γ_c sera un homéomorphisme de \mathbf{T} sur J_c . L'ensemble Δ est l'ensemble des points de $\mathbf{C} - J_c$ par rapport auxquels γ_c a un indice $\neq 0$.

Le théorème suivant montre les limites de l'analogie avec le cas $c = 0$.

THÉORÈME 2. — Dans les conditions du théorème 1, si $c \neq 0$, la courbe J_c n'a de tangente en aucun point.

On dit que J_c est la courbe de Julia de f_c . Les théorèmes 1 et 2 sont valables sous une hypothèse plus faible que $|c| < 1/4$. Il suffit que f_c ait un point fixe α attractif, c'est-à-dire tel que $f_c(\alpha) = \alpha$, $|f'_c(\alpha)| < 1$. Les valeurs de c pour lesquelles cela a lieu forment la région W bornée par une cardioïde symétrique par rapport à \mathbf{R} , ayant un rebroussement en $1/4$ et passant par le point $-3/4$. Cette région contient le disque $\mathbf{D}_{1/4}$. Mais la démonstration sous cette hypothèse demanderait des outils savants d'analyse complexe.

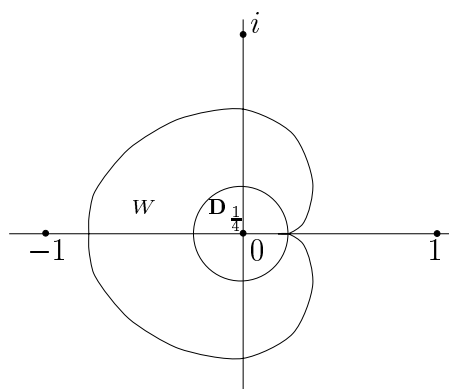


Figure 1

Pour démontrer le théorème 1, on construit $\gamma_c : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{C}$ continue et satisfaisant $f_c \circ \gamma_c = \gamma_c \circ q$. On montre ensuite qu'elle est injective en construisant un inverse.

La démonstration du théorème 2 se fait en plusieurs étapes.

(1) Il y a un point où J_c n'a pas de tangente. Cela est facile si c n'est pas réel : le point fixe β_c convient car il a un multiplicateur non réel. Si c est réel, on montre qu'il y a un cycle d'ordre 3 à multiplicateur non réel, cela est assez délicat.

(2) Il y a dans J_c un ensemble dense de points où J_c n'a pas de tangente. C'est facile à partir du résultat précédent par images réciproques.

(3) On montre que J_c possède une propriété d'autosimilarité avec distorsion bornée. A partir de là, s'il y avait un point où J_c a une tangente, on montre que J_c contiendrait un arc \mathcal{C}^∞ , c'est-à-dire ayant une tangente en chaque point (et variant continûment avec le point). Ce serait en contradiction avec le pas (2).

1. La courbe de Julia

1.1. Mise en place

On note $\mathbf{D}_{a,r}$ le disque ouvert de centre a et de rayon r : $\mathbf{D}_{a,r} = \{z \mid |z - a| < r\}$. On écrit \mathbf{D}_r pour $\mathbf{D}_{0,r}$.

On fixe c avec $|c| < 1/4$. La fonction f_c a deux points fixes α et β , solutions de $z^2 - z + c = 0$; on convient que $|\alpha| \leq |\beta|$. On a $|\alpha\beta| = |c| < 1/4$, d'où $|\alpha| < 1/2$, et $\beta = 1 - \alpha$, d'où $1/2 < |\beta| < 3/2$.

Le point α est un point fixe *attractif*. Cela signifie que la dérivée de f_c en α est de module < 1 . En effet cette dérivée est 2α , et on vient de voir que $|\alpha| < 1/2$. Le point fixe β , lui est *répulsif*. En effet $|\beta| > 1/2$.

On pose

$$U_0 = \mathbf{D}_{3/2}, \quad V_0 = \mathbf{D}_{1/2}, \quad A_0 = U_0 \setminus \overline{V_0} = \{z \mid 1/2 < |z| < 3/2\}.$$

Pour $n \geq U$, on pose

$$U_n = f_c^{-n}(U_0), \quad V_n = f_c^{-n}(V_0), \quad A_n = f_c^{-n}(A_0) = U_n \setminus \overline{V}_n.$$

On pose également

$$U_{-1} = f_c(U_0) = \mathbf{D}_{c,9/4}, \quad V_{-1} = f_c(V_0) = \mathbf{D}_{c,1/4}, \quad A_{-1} = U_{-1} \setminus \overline{V}_{-1} = f_c(A_0).$$

Comme A_0 est symétrique on a $A_0 = f_c^{-1}(A_{-1})$.

On a $\overline{V}_{-1} \subset V_0$ et $\overline{U}_0 \subset U_{-1}$, d'où $\overline{A}_0 \subset A_{-1}$ et $\overline{A}_n \subset A_{n-1}$ pour tout n . On voit par récurrence (*) que, pour tout n , A_n est limité par deux courbes simples \mathbf{R} -analytiques Γ_n^+ et Γ_n^- entourant 0 et c , avec Γ_n^+ bord de U_n et Γ_n^- bord de V_n .

On a $|f'_c| < 1$ sur V_0 , et sur \overline{V}_{-1} le module $|f'_c|$ est borné par une constante < 1 . Il en résulte (*) que pour tout $z \in V_{-1}$ l'orbite de z tend vers α . Cela a encore lieu pour tout $z \in V_\infty = \cup V_n$, puisque pour un tel z l'orbite finit par entrer dans V_{-1} . Réciproquement si l'orbite (z_n) de z tend vers α on a $z_n \in V_0$ donc $z \in V_n$ pour un certain n , donc V_∞ est exactement l'ensemble des points dont l'orbite tend vers α : c'est le *bassin d'attraction* de α .



Figure 2 : La courbe de Julia
image de Dan Sorensen

1.2. Construction du lacet γ

On construit par récurrence une suite de lacets (γ_n) de β à β dans A_0 (en fait γ_n est dans A_n). Par un lacet γ nous entendons une application continue de \mathbf{T} dans \mathbf{C} , ou ce qui revient au même de $[0, 1]$ dans \mathbf{C} avec $\gamma(0) = \gamma(1)$.

On pose $\gamma_0(t) = e^{2i\pi t} \cdot \beta$. On définit $\gamma_n[0, 1] \rightarrow A_0$ par récurrence par

- $\gamma_{n+1}(t) \in f_c^{-1}(\gamma_n(2t))$,
- γ_{n+1} continue,
- $\gamma_{n+1}(\beta) = \beta$.

On voit par récurrence (*) que, pour tout n , on a $\gamma_n(1) = \beta$ et γ_n fait une fois le tour de 0 et de c . L'image de γ_n est contenue dans A_n .

LEMME. — *La suite d'applications (γ_n) est uniformément convergente sur $[0, 1]$.*

Démonstration. — Pour z et z' dans A_n , définissons $d_{A_n}(z, z')$ comme la longueur minimum d'un chemin dérivable de z à z' dans A_n : c'est donc $|z' - z|$ si le segment $[z, z']$ est contenu dans A_n , et en tous cas on a $|z - z'| \leq d_{A_n}(z, z')$.

On a $|f'_c(z)| > 1$ pour $z \in A_0$, et $\lambda = (\inf_{z \in A_1} |f'_c(z)|)^{-1} < 1$. Tout chemin η de longueur ℓ dans A_0 admet deux relèvements η' et η'' dans A_1 , de même longueur $\leq \lambda\ell$.

On peut construire (*) une application continue $H : [0, 1]^2 \rightarrow A_0$ telle que

$$\begin{aligned} H(0, s) &= H(1, s) = \beta, \\ H(1, 0) &= \gamma_0(t), \quad H(t, 1) = \gamma_1(t). \end{aligned}$$

Notons μ la borne supérieure des longueurs des chemins $\eta_t : s \mapsto H(t, s)$ de $\gamma_0(t)$ à $\gamma_1(t)$. On construit par récurrence pour tout t un chemin $\eta_{n,t}$ de $\gamma_n(t)$ à $\gamma_{n+1}(t)$ dans A_0 : ce chemin est un relèvement de $\eta_{(n-1),2t}$, et sa longueur est $\leq \lambda^n \mu$. Par suite, pour tout t et tout n , on a

$$|\gamma_n(t) - \gamma_{n+1}(t)| \leq d_{A_0}(\gamma_n(t), \gamma_{n+1}(t)) \leq \lambda^n \mu.$$

Il en résulte que la suite de lacets (γ_n) est une suite de Cauchy pour la convergence uniforme sur $[0, 1]$. \square

On note γ la limite des γ_n . C'est un lacet continu, et la relation

$$f(\gamma_{n+1}(t)) = \gamma_n(2t)$$

donne par passage à la limite $f(\gamma(t)) = \gamma(2t)$.

1.3. Injectivité de γ

On va construire par récurrence une suite d'applications $\varphi_n : \overline{A_n} \rightarrow \mathbf{T}$. On définit $\varphi_0 : \overline{A_0} \rightarrow \mathbf{T}$ par

$$\varphi_0(z) = \frac{1}{2\pi} \text{Arg}(z/\beta).$$

Quand z décrit un lacet dans $\overline{A_1}$ qui fait un tour autour de 0, le point $f(z)$ fait 2 tours dans $\overline{A_0}$ autour de c et donc aussi de 0, et un relèvement de $\varphi_0(f(z))$ dans \mathbf{R} augmente de 2. On peut donc (*) définir $\varphi_1 : \overline{A_1} \rightarrow \mathbf{R}$ par

- $\varphi_1(z) \in \mathbf{q}^{-1}(\varphi_0(f(z)))$, où $\mathbf{q} : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}$ est l'application $t \mapsto 2t$,
- φ_1 continue,
- $\varphi_1(\beta) = 0$.

Quand z parcourt un lacet dans $\overline{A_1}$, un représentant de $\varphi_1(z) - \varphi_0(z)$ dans \mathbf{R} revient inchangé. Autrement dit l'application $\varphi_1 - \varphi_0 : \overline{A_1} \rightarrow \mathbf{T}$ admet un relèvement continu $\delta : \overline{A_1} \rightarrow \mathbf{R}$.

On peut définir par récurrence $\varphi_n : \overline{A_n} \rightarrow \mathbf{T}$ par

$$\varphi_{n+1}(z) = \varphi_n(z) + \left[\frac{1}{2^n} \delta(f_c^n(z)) \right]$$

ou $[x]$ désigne la classe de x dans \mathbf{T} . On vérifie par récurrence que

$$2\varphi_{n+1}(z) = \varphi_n(f_c(z)).$$

Sur $\cap \overline{A_n}$, la suite des φ_n converge uniformément vers une fonction continue $\varphi : \cap \overline{A_n} \rightarrow \mathbf{T}$ qui vérifie $\mathbf{q} \circ \varphi = \varphi \circ f_c$.

L'image J de γ est contenue dans $\cap A_n$, et $\varphi \circ \gamma : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}$ est une application continue de degré 1 (ce qui signifie qu'elle admet un relèvement $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ vérifiant $g(x+1) = g(x) + 1$ commutant avec \mathbf{q}). En effet

$$\mathbf{q} \circ \varphi \circ \gamma = \varphi \circ f \circ \gamma = \varphi \circ \gamma \circ \mathbf{q}.$$

Comme on l'a vu dans l'exposé précédent, ce ne peut être que l'identité.

Il en résulte que γ est injective. Comme \mathbf{T} est compact, γ est un homéomorphisme de \mathbf{T} sur son image J .

1.4. Points qui ne sont pas sur J

Posons

$$\gamma_0^-(t) = \frac{1}{2|\beta|} \gamma_0(t) \quad \text{et} \quad \gamma_0^+(t) = \frac{3}{2|\beta|} \gamma_0(t).$$

Les lacets γ_0^- et γ_0^+ paramètrent le bord intérieur Γ_0^- est le bord extérieur Γ_0^+ de A_0 . On construit comme dans la section 1.2 des lacets γ_n^- et $\gamma_n^+ : \mathbf{T} \rightarrow A_0$ qui paramètrent les bords intérieur et extérieur de A_n , avec

$$f_c \circ \gamma_{n+1}^- = \gamma_n^- \circ \mathbf{q}$$

$$f_c \circ \gamma_{n+1}^+ = \gamma_n^+ \circ \mathbf{q}$$

les points de base étant obtenus en relevant le chemin radial de β à $\beta_0^- = 1/2 \cdot \frac{\beta}{|\beta|}$

ou à $\beta_0^+ = 3/2 \cdot \frac{\beta}{|\beta|}$.

Le même raisonnement que pour la démonstration du lemme montre (*) que γ_n^- et γ_n^+ convergent uniformément vers le lacet γ .

Soit z un point de $\mathbf{C} - J$. Si l'indice de γ par rapport à z est 1, pour n assez grand, l'indice de γ_n^- par rapport à z est 1 aussi. Alors $z \in V_n$, donc l'orbite de z tend vers le point fixe attractif α . Si l'indice de γ par rapport à z est 0, pour n assez grand l'indice de γ_n^+ par rapport à z est 0 aussi. Alors $z \in \mathbf{C} - U_n$, on a $f_c^n(z) \in \mathbf{C} - U_0$ et l'orbite de z tend vers ∞ . Enfin si l'indice de γ par rapport à z était un nombre ν différent de 0 et 1, il en serait de même pour γ_n^- pour n assez grand, ce qui est impossible.

On a donc fait une partition de \mathbf{C} en trois parties : la courbe J qui est un fermé, le bassin d'attraction de α et celui de ∞ qui sont des ouverts.

2. Points fixes ou périodiques à multiplicateur non réel

2.1. Points fixes, points périodiques, multiplicateur

Soit $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ une application polynomiale. Un *point fixe* ξ pour f est un point $\xi \in \mathbf{C}$ tel que $f(\xi) = \xi$. Le *multiplicateur* de ξ est alors $f'(\xi)$. On dit que ξ est attractif si $|f'(\xi)| < 1$, *répulsif* si $|f'(\xi)| > 1$, *indifférent* si $|f'(x)| = 1$.

Un *point périodique* de période k est un point fixe de f^k , qui n'est pas point fixe de $f^{k'}$ pour $0 < k' < k$. Quand on parle du multiplicateur d'un point périodique de période k , il s'agit de son multiplicateur pour f^k . On parlera de même de point périodique attractif, répulsif, indifférent, etc.

Soit $\Gamma \subset \mathbf{C}$ une courbe telle que $f(\Gamma) \subset \Gamma$. Si Γ passe par un point périodique ξ à multiplicateur ρ non réel, la courbe Γ ne peut pas avoir de tangente en ξ . En effet, si Γ avait une tangente D en ξ , la droite D devrait être préservée par l'application tangente à f en ξ , qui est $z \mapsto \xi + \rho(z - \xi)$, ce qui est impossible pour ρ non réel (la multiplication par ρ fait tourner d'un angle égal à l'argument de ρ).

2.2. Existence d'un point sans tangente : cas c non réel

Considérons l'application $f_c : z \mapsto z^2 + c$ avec $|c| < 1/4$. La courbe de Julia J_c passe par le point fixe β de f_c , qui a pour multiplicateur $\rho = 2\beta$.

Si c n'est pas réel, β n'est pas réel puisque $c = \beta - \beta^2$, donc ρ est non réel et J_c n'a pas de tangente en β .

Que se passe-t-il en fait ?

Ici β est un point fixe répulsif, et J_c satisfait à $f_c^{-1}(J_c) = J_c$. Soit z_0 un point de J voisin de β et définissons z_{-n} par $z_{-n-1} = f_c^{-1}(z_n)$, en utilisant la branche de f_c^{-1} qui a β pour point fixe.

Les points z_{-n} tendent vers β approximativement sur une spirale logarithmique : à chaque fois $z_n - \beta$ a une longueur divisée approximativement par le module de ρ , et son argument augmente approximativement de $(-\text{Arg}\rho)$. Cela est suffisant (*) pour affirmer que la courbe J tend vers β en spirant : quand un point z tend vers β sur J , une détermination continue de l'argument de $z - \beta$ dans \mathbf{R} tend vers ∞ .

2.3. Cas c réel

Ce cas est beaucoup plus délicat.

Le multiplicateur du point fixe β est réel.

Il y a sur J_c un cycle d'ordre 2, à savoir $\{\gamma(1/3), \gamma(2/3)\}$, où $\gamma = \gamma_c$ est l'application étudiée dans la partie 1. Mais les points $\gamma(1/3)$ et $\gamma(2/3)$ sont conjugués, et le multiplicateur de ce cycle est réel.

Il y a deux cycles d'ordre 3, à savoir

$$\{\gamma(1/7), \gamma(2/7), \gamma(4/7)\} \quad \text{et} \quad \{\gamma(3/7), \gamma(5/7), \gamma(6/7)\}.$$

Ces deux cycles sont conjugués l'un de l'autre (conjugaison complexe), leurs multiplicateurs ρ' , ρ'' sont conjugués.

PROPOSITION 1. — *Pour $c \in]-1/4, 1/4[- \{0\}$, les multiplicateurs ρ' et ρ'' sont distincts, donc non réels.*

Nous proposerons pour cette proposition une démonstration algébrique assez savante (!!). Il se peut qu'on puisse en trouver de plus simples.

Démonstration. — On fait varier c dans \mathbf{C} tout entier. La condition pour que z soit un point périodique de période divisant 3 s'écrit

$$f_c^3(z) - z = 0.$$

La fonction $(c, z) \mapsto f_c^3(z) - z$ est un polynôme à 2 variables, de degré 8 en z . Il est divisible par $f_c(z) - z$, qui est l'équation des points fixes.

En divisant, on obtient un polynôme $E(c, z)$ qui est de degré 6 en z , qui s'écrit sous la forme

$$z^6 + e_5(c)z^5 + \cdots + e_1(c)z + e_0(c)$$

où les e_i sont des polynômes en c . Pour chaque c , il a 6 racines (éventuellement confondues) $\xi_1^{(c)}, \dots, \xi_6^{(c)}$, mais on ne peut pas choisir $\xi_1(c)$ par exemple dépendant continûment de c . Les points $\xi_i(c)$ forment, s'ils sont tous distincts, 2 cycles d'ordre 3, notons ρ' et ρ'' leurs multiplicateurs.

LEMME 1. — *La somme $s_1(c) = \rho' + \rho''$ et le produit $s_0(c) = \rho'\rho''$ sont des polynômes en c .*

Démonstration. — Considérons pour chaque c le polynôme

$$H(c, z) = z^6 + h_5(c)z^5 + \cdots + h_1(c)z + h_0(c)$$

dont les racines sont les multiplicateurs

$$\rho_i(c) = 8\xi_i(c) \cdot f_c(\xi_i(c)) \cdot f_c^2(\xi_i(c)).$$

Les coefficients $h_k(c)$ sont donnés par les fonctions symétriques élémentaires des $\rho_i(c)$, ils s'expriment comme polynômes symétriques en les $\xi_i(c)$, donc comme polynômes en $e_0(c), \dots, e_5(c)$, et finalement comme polynômes en c .

Mais les trois ξ_i d'un même cycle donnent le même ρ , qui est racine triple de $z \mapsto H(c, z)$. On a donc

$$H(c, z) = (z^2 - s_1(c)z + s_0(c))^3.$$

Ceci donne en particulier

$$\begin{aligned} h_5(c) &= -6s_1(c) \\ h_4(c) &= 6s_0(c) - 15s_1(c). \end{aligned}$$

Comme h_4 et h_5 sont polynomiales en c , il en est de même de s_1 et s_0 . \square

LEMME 2. — *Le polynôme s_0 est de degré 3 en c , et s_1 est de degré ≤ 1 .*

Considérons pour chaque c l'ensemble K_c des z tels que $f_c^n(z)$ ne tende pas vers ∞ .

SOUS-LEMME. — *Pour $|c| \geq 0$, l'ensemble K_c est contenu dans l'anneau*

$$\mathbf{D}_{2\sqrt{|c|}} - \mathbf{D}_{1/2\sqrt{|c|}}.$$

Démonstration. — Pour $|c| \geq 2$ et $|z| > 2\sqrt{|c|}$ on a

$$|z^2| > 2\sqrt{|c|}, \quad |c| < \frac{1}{2}\sqrt{|c|} \cdot |z|$$

d'où

$$|z^2 + c| \geq \frac{3}{2}\sqrt{|c|}|z| \geq 3|z|.$$

Par suite l'orbite (z_n) de z reste dans $\mathbf{C} - \mathbf{D}_{2\sqrt{|c|}}$, et satisfait

$$|z_{n+1}| \geq 3|z_n|.$$

Par suite $K_c \subset \mathbf{D}_{2\sqrt{|c|}}$.

Si $|z| < 1/2 \cdot \sqrt{|c|}$, on a $|z^2 + c| \geq 3/4 \cdot |c|$ et $3/4 \cdot |c| > 2\sqrt{|c|}$ si $|c| \geq 10$, d'où $z \notin K_c$. \square

Démonstration du lemme 2. — Tout point périodique de f_c est dans K_c . Pour $|c| \geq 10$, les multiplicateurs

$$\rho' = 8\xi_1\xi_2\xi_3 \quad \text{et} \quad \rho'' = 8\xi_4\xi_5\xi_6$$

(en choisissant bien les indexations) vérifient donc

$$|c|^{3/2} \leq |\rho| \leq 64|c|^{3/2}.$$

et on a

$$\begin{aligned} |c|^3 \leq |s_0| &\leq 2^{12}|c|^3 \\ |s_1| &\leq 128|c|^{3/2}. \end{aligned}$$

Comme s_1 et s_0 sont des polynômes, le lemme 2 en résulte. \square

Démonstration de la proposition. — Il faut montrer que le discriminant $\Delta(c) = s_1(c)^2 - 4s_0(c)$ est < 0 pour $c \in]-1/4, 1/4[-\{0\}$.

On sait déjà que ρ' et ρ'' sont conjugués, donc que $\Delta(c) \leq 0$ pour $c \in]-1/4, 1/4[$. Pour $c = 0$, on a $\gamma(t) = e^{2i\pi t}$,

$$\gamma\left(\frac{1}{7}\right) \cdot \gamma\left(\frac{2}{7}\right) \cdot \gamma\left(\frac{4}{7}\right) = 1, \quad \rho' = \rho'' = 8, \quad \Delta(0) = 0$$

Mais Δ est un polynôme de degré 3 en c . La racine en 0 est forcément double puisque $\Delta(c) \leq 0$ pour c voisin de 0. Il ne peut y avoir une autre racine dans l'intervalle $] -1/4, 1/4[$ car elle serait simple et entraînerait un changement de signe. \square

Remarque. — La troisième racine de Δ est en $-7/4$. Pour cette valeur de c , le polynôme $z \mapsto E(c, z)$ a 3 racines doubles ξ_1, ξ_2, ξ_3 , avec

$$f_c(\xi_1) = \xi_2, \quad f_c(\xi_2) = \xi_3, \quad f_c(\xi_3) = \xi_1.$$

2.4. Densité des points sans tangente

Soient z un point de J_c et $z' \in f_c^-(z)$. Alors $z' \in J_c$, et si J_c n'a pas de tangente en z elle n'en a pas non plus en z' . Par récurrence, J_c n'a alors de tangente en aucun point de $\cup f_c^{-n}(z)$.

LEMME. — Pour tout $z \in J_c$, l'ensemble $\cup f_c^{-n}(z)$ est dense dans J_c .

Démonstration. — Comme γ est un homéomorphisme de \mathbf{T} sur J_c qui conjugue \mathbf{q} à f_c , il suffit de montrer que, pour tout $t \in \mathbf{T}$, l'ensemble $\cup \mathbf{q}^{-n}(t)$ est dense dans $\mathbf{T}(\ast)$. \square

Nous avons montré :

PROPOSITION 2. — *Si J_c possède un point où elle n'a pas de tangente, l'ensemble des points où elle n'a pas de tangente est dense dans J_c .*

Cela a lieu en particulier pour tout $c \in \mathbf{D}_{1/4} - \{0\}$.

3. Distorsion bornée

3.1. Introduction, fonctions holomorphes

Dans cette partie nous indiquons comment on démontre le théorème 2. Nous utiliserons pour cela un théorème de distorsion bornée (théorème 3 ci-dessous).

Nous aurons besoin de la notion de fonction holomorphe, mais nous évitons l'usage de l'analyse complexe. Pour nous, une fonction holomorphe sur un ouvert U de \mathbf{C} est une fonction $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ admettant une dérivée

$$f'(z) = \lim_{z' \rightarrow z, z' \neq z} \frac{f(z') - f(z)}{z' - z}$$

continue. Nous n'aurons pas besoin de l'équivalence avec d'autres définitions. Nous n'utiliserons pas le fait qu'une limite uniforme de fonctions holomorphes est holomorphe, mais seulement le fait, beaucoup plus élémentaire, que si (f_n) est une suite de fonctions holomorphes sur U convergeant uniformément vers f et si f'_n converge uniformément vers g , alors f est holomorphe et $f' = g$ (en effet $f(z_1) - f(z_0) = \int_{z_0}^{z_1} f(z) dz$ s'obtient par passage à la limite).

Nous utiliserons le théorème d'Ascoli : Soient U un ouvert connexe vérifiant $\text{diam}^*(U) < \infty$ et (f_n) une suite de fonctions sur U , lipschitziennes avec une constante M indépendante de n . On suppose qu'il existe un point $x_0 \in U$ tel que la suite $(f_n(x_0))$ converge. Alors on peut extraire de la suite (f_n) une suite convergeant uniformément sur U .

3.2. Distorsion

Soient U et V deux ouverts connexes de \mathbf{C} , et f un homéomorphisme holomorphe de U sur V , c'est-à-dire admettant une dérivée $f'(z) \in \mathbf{C}$ pour tout $z \in U$ dépendant continûment de z (par exemple f peut être induite par un polynôme). Si f' est constante sur U , f est affine, c'est-à-dire induite par une transformation $z \mapsto az + b$.

DÉFINITION. — *On appelle distorsion de f sur U et on note $\text{dist}_U(f)$ la quantité*

$$\sup_{z_0, z_1 \in U} \left| \log \frac{f'(z_1)}{f'(z_0)} \right|.$$

Remarques.

(1) Pour choisir la détermination du log on prend un chemin de z_0 à z_1 , et on suit, pour z parcourant ce chemin, la détermination de $\log \frac{f'(z)}{f'(z_0)}$ qui prend la valeur 0 pour $z = z_0$.

(2) La définition fait intervenir le module du log et non le log du module. Cela permet de prendre en compte dans la distorsion le fait que f courbe les segments de droite.

Propriétés.

- On a $\text{dist}_V(f^{-1}) = \text{dist}_U(f)$.
- Si $f : U \rightarrow V$ et $g : V \rightarrow W$ sont des homéomorphismes holomorphes, on a $\text{dist}_W(g \circ f) \leq \text{dist}_V(g) + \text{dist}_U(f)$.
- Pour z_0 et z_1 dans U , on note $d_U(z_0, z_1)$ la longueur minimum d'un chemin de z_0 à z_1 dans U , et on définit le *diamètre interne* $\text{diam}^*(U)$ comme la borne supérieure de $d_U(z_0, z_1)$ quand z_0 et z_1 varient dans U . Si U est convexe, le diamètre interne de U coïncide avec son diamètre au sens ordinaire. On a

$$\text{dist}_U(f) \leq \text{diam}^*(U) \cdot \sup_U \left| \frac{f''}{f'} \right|.$$

En effet $\log \frac{f'(z_1)}{f'(z_0)}$ est l'intégrale curviligne $\int_{z_0}^{z_1} \frac{f''(z)}{f'(z)} dz$ sur un chemin de z_0 à z_1 .

3.3. Majoration de la distorsion

Revenons à la situation qui nous intéresse, avec les notations des sections (1.1) et (1.2). En particulier

$$\lambda = \left(\inf_{z \in A_1} |f'_c(z)| \right)^{-1} < 1.$$

Pour tout ouvert connexe $W \subset A_0$ de diamètre < 1 , l'image réciproque $f_c^{-1}(W)$ est réunion de deux ouverts W' et W'' contenus dans A_1 , l'application f_c induisant un homéomorphisme de chacun d'eux sur W ; on a (*)

$$\text{diam}^* W' = \text{diam}^* W'' \leq \lambda \text{diam}^* W.$$

Soient z_0 un point de A_0 et n un entier tel que $z_i = f_c^i(z)$ appartienne à A_0 pour $i \leq n$. Choisissons $\rho > 0$ tel que le disque $W_0 = \mathbf{D}_{z_n, \rho}$ soit contenu dans A_0 , et définissons W_i pour $1 \leq i \leq n$ en prenant pour W_i la composante connexe de $f_c^{-1}W_{i-1}$ qui contient z_{n-i} . L'application f_c induit pour $1 \leq i \leq n$ un homéomorphisme holomorphe de W_i sur W_{i-1} , et f_c^n induit un homéomorphisme holomorphe de $\Omega = W_n$ sur W_0 .

On a $\text{diam}^* W_i \leq 2\rho\lambda^i$. Sur A_0 on a $|f'_c| \geq 1$ et $f''_c = 2$, d'où $\left| \frac{f''_c}{f'_c} \right| \leq 2$. Par suite $\text{dist}_{W_i}(f_c) \leq 4\rho\lambda^i$ et

$$\text{dist}_\Omega(f_c^n) \leq \sum_{i=1}^n \text{dist}_{W_i}(f_c) \leq 4\rho \sum_{i=1}^n \lambda^i \leq 4\rho \sum_{i=1}^\infty \lambda^i = \frac{4\rho\lambda}{1-\lambda}.$$

Cette inégalité montre que, pour l'application $f_c^{-n} : W_0 \rightarrow \Omega$, on a que $\log((f_c^{-n})')$ est lipschitzienne de rapport $\frac{2\lambda}{1-\lambda}$. En effet, pour w', w'' dans W_0 , on peut considérer $w = \frac{w'+w''}{2}$, $w'_0 = \mathbf{D}_{w,\rho'}$ où $\rho' = (1+\varepsilon)\frac{|w'-w''|}{2}$ avec $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, et définir W'_i pour $i \leq n$ par $W'_i = W_i \cap f_c^{-1}W'_{i-1}$.

Nous avons obtenu le résultat suivant, qui est l'application à notre situation d'un théorème plus général de distorsion bornée :

THÉORÈME 3. — *La valeur de c étant fixée dans $\mathbf{D}_{1/4}$, il existe un $\rho_0 > 0$ et un $M < \infty$ tels que, pour tout $z \in J_c$, tout n et tout ρ tel que $0 < \rho \leq \rho_0$, il existe un voisinage Ω de z dans \mathbf{C} tel que f_c^n induise un homéomorphisme holomorphe de Ω sur $\mathbf{D}_{f_c^n(z),\rho}$ avec*

$$\text{dist}_\Omega(f_c^n) \leq M\rho.$$

L'application $f_c^{-n} : \mathbf{D}_{f_c^n(z),\rho} \rightarrow \Omega$ satisfait la propriété suivante : $\log((f_c^{-n})')$ est lipschitzienne de rapport $M/2$.

Ceci s'obtient en prenant pour ρ_0 la distance de J_c au bord de A_0 , et $M = \frac{4\lambda}{1-\lambda}$. L'intérêt du théorème réside que ces valeurs sont indépendantes de $z \in J_c$ et surtout de n .

3.4. Contradiction en supposant l'existence d'une tangente

Soient $c \in \mathbf{D}_{1/4}$ et $z_0 \in J_c$. Posons $z_n = f_c^n(z_0)$ et soit (n_k) une suite d'entiers telle que la suite extraite (z_{n_k}) converge vers un point w . Soient M et ρ_0 satisfaisant aux conditions du théorème 3. Pour tout k il existe un voisinage Ω_k de z_0 tel que $f_c^{n_k}$ induise un homéomorphisme holomorphe de Ω_k sur $\mathbf{D}_{z_{n_k},\rho_0}$.

Choisissons $\rho < \rho_0$. Le disque $\mathbf{D}_{w,\rho}$ est contenu dans $\mathbf{D}_{z_{n_k},\rho_0}$ pour k assez grand ; considérons $f_c^{-n_k} : \mathbf{D}_{w,\rho} \rightarrow \Omega_k$ et $\varphi_k = H_k \circ f_c^{-n_k} : \mathbf{D}_{w,\rho} \rightarrow \mathbf{C}$, où H_k est l'homothétie de centre z_0 et de rapport $h_k = (f_c^{n_k})'(z_0)$, restreinte à Ω_k . La fonction $\log(\varphi_k')$ diffère de $\log((f_c^{-n_k})')$ par une constante, donc est lipschitzienne de rapport $M/2$ indépendant de k . On a $\varphi_k'(z_{n_k}) = 1$, donc $|\log(\varphi_k'(w))| \leq M/2|w - z_{n_k}| \rightarrow 0$. Par le théorème d'Ascoli, quitte à extraire encore une suite, $\log \varphi_k'$ tend uniformément vers une fonction lipschitzienne $g : \mathbf{D}_{w,\rho} \rightarrow \mathbf{C}$.

Alors φ_k tend uniformément vers la fonction $\phi : \mathbf{D}_{w,\rho} \rightarrow \mathbf{C}$ définie par

$$\phi(w') = z_0 + \int_w^{w'} e^{g(\zeta)} d\zeta,$$

qui est holomorphe de dérivée e^g ne s'annulant en aucun point.

On a $f_c(J_c) = f_c^{-1}(J_c) = J_c$, et par suite

$$J_c \cap \mathbf{D}_{w,\rho} = \varphi_k^{-1}(\Gamma_k) \quad \text{où} \quad \Gamma_k = H_k(J_c \cap \Omega_k).$$

On a $|h_k| \geq 1/\lambda^{n_k}$, donc $|h_k|$ tend vers l'infini et Γ_k peut être considéré comme un "zoom" de J_c sur z_0 . Les fonctions φ_k sont bornées indépendamment de k , donc $\text{diam } \Omega_k \rightarrow 0$.

Quitte à extraire encore une fois une suite, on peut supposer que l'argument de h_k a une limite θ . Supposons que J_c ait en z_0 une tangente L , et soit L' la droite déduite de L par une rotation d'angle θ .

LEMME. — $J_c \cap \mathbf{D}_{w,\rho} \subset \phi^{-1}(L')$.

Démonstration. — Soit $w' \in J_c \cap \mathbf{D}_{w,\rho}$. Pour tout k , l'angle (mod π) de $\varphi_k(w') - z_0$ avec L' est majoré par la borne supérieure α_k pour $z' \in \Omega_k \cap J_c$ de l'angle de $z' - z_0$ avec L . Mais α_k tend vers 0 par définition des tangentes. Par suite $\phi(w') \in L'$. \square

Comme ϕ est dérivable en tout point de $\mathbf{D}_{w,\rho}$, ceci entraîne que J_c a une tangente en tout point de $J_c \cap \mathbf{D}_{w,\rho}$.

On a vu que ceci est impossible si $c \neq 0$, et cela achève la démonstration du théorème 2.