LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET L'ANALYSE MATHÉMATIQUE

par

Yves Meyer

1. Introduction

Nous subissons chaque jour les effets de la « révolution numérique ». Il s'agit du téléphone digital, de la télévision numérique, de l'imagerie médicale, des chaînes d'impression numérique etc.

La révolution numérique bouleverse notre vie parce qu'elle modifie certains métiers, la façon dont nous communiquons et finalement notre relation avec le monde qui nous entoure.

D'où est venue la révolution numérique ? Où se dirige-t-elle ? Quelle est la part des mathématiques dans ces nouvelles techniques ?

La révolution numérique ou, plus précisément, le traitement du signal ou de l'image ont-ils aujourd'hui un effet bénéfique sur les mathématiques ?

Voici les questions que nous aborderons aujourd'hui.

Commençons par quelques rappels historiques.

La révolution numérique est née, aux USA, en 1946, lorsque fut fondé « the Institute for the Unity of Science ». Il s'agissait donc plutôt d'une révolution scientifique, car la technologie était encore rudimentaire.

La révolution numérique de 1946 a été l'un de ces moments privilégiés où les barrières, les murs délimitant plusieurs secteurs scientifiques se sont effondrés et où l'unité profonde de la recherche scientifique est apparue. Mais la révolution numérique de 1946 n'a pas été la première manifestation de l'unité de la science.

En effet, dès 1807, Joseph Fourier écrivait : « Si les corps sont placés loin de nous dans l'immensité de l'espace, si l'homme veut connaître le spectacle des cieux pour des époques successives que séparent un grand nombre de siècles, l'analyse mathématique peut suppléer à la brièveté de la vie et à l'imperfection des sens et nous rendre ces phénomènes présents et mesurables... » (Discours préliminaire).

Ce texte est particulièrement troublant. Il paraît annoncer l'étude des confins de l'Univers, des galaxies lointaines par le programme Hubble. En fait ces images des galaxies lointaines nous renseignent (compte tenu du temps mis par la lumière pour nous parvenir) sur les « premiers instants de l'univers ». La formation des galaxies à partir de l'homogénéité des conditions initiales est un des mystères de la cosmologie moderne.

Devons-nous penser, en relisant le texte de Fourier, que le programme d'exploration spatiale était déjà prophétisé ? Ou s'agit-il simplement d'une allusion au problème dit « des N corps » où l'on recherche le comportement asymptotique (quand le temps augmente indéfiniment) du mouvement des planètes autour du soleil ?

Mais revenons à 1945 et à la révolution numérique.

Norbert Wiener et John von Neumann établissaient en 1945 les liens reliant la logique mathématique, l'électronique et la neurophysiologie. La construction des ordinateurs allait en résulter.

Claude Shannon découvrait en 1945 les lois permettant de coder efficacement un message (signal ou image). Claude Shannon et Norbert Wiener démontraient que le concept d'entropie, élaboré dans le cadre de la mécanique statistique pouvait être reformulé et s'appliquer aux télécommunications. Norbert Wiener publiait, en 1950, un essai intitulé « Speech, language and learning » où il utilisait ses découvertes sur les rétro-actions ou « feedbacks ».

Le 19 janvier 1951, Wiener et Rosenblith lançaient le programme « Cybernétique et Communications » dans le cadre de l'« Institute for the Unity of Science ».

La *révolution numérique* a donc été *l'œuvre de mathématiciens visionnaires*. Les résultats scientifiques que ces prophètes utilisaient sont des théorèmes, au sens le plus strict du terme. Ces théorèmes ont fondé la discipline scientifique appelée aujourd'hui le « traitement du signal ».

Mais on ne peut expliquer cet âge d'or de la science américaine sans évoquer l'interaction entre physiciens (et non des moindres) et mathématiciens. En fait, dès les années 1930, E.P. Wigner et L. Brillouin introduisaient le concept du « plan temps-fréquence » (sur lequel nous reviendrons). Ensuite, en 1945, D. Gabor (prix Nobel de Physique) proposait de décomposer le signal de parole en une combinaison linéaire (infinie) « d'atomes temps-fréquence » ou « logons ». Nous définirons ces concepts.

L'âge d'or est-il terminé ? Sommes-nous définitivement entrés aujourd'hui dans un univers essentiellement technologique d'où les innovations scientifiques seraient absentes ?

La découverte des *ondelettes* (au début des années 1980) a renouvelé le climat intellectuel que nous venons d'évoquer.

En fait, l'existence de bases orthonormées d'ondelettes a été prévue, dès 1970, par KENNETH WILSON (prix Nobel de Physique). Ces bases permettaient d'effectuer certains calculs de renormalisation. Un peu plus tard, ce même outil apparaissait dans les travaux menés au centre de Physique Théorique de l'École Polytechnique. Toujours à la même époque, c'est-à-dire à la fin des années 70, la technique du codage en sous-bande était découverte au centre IBM de la Gaude. La motivation était l'amélioration des performances du téléphone digital (réduction des effets indésirables du « bruit de quantification »).

Toujours à la même époque, l'ingénieur de recherche JEAN MORLET découvrait lui aussi les ondelettes comme une alternative à l'analyse de Fourier, convenant au traitement des signaux issus de la vibro-sismique.

Les premiers congrès sur les ondelettes ont permis de réunir des mathématiciens, des physiciens, des acousticiens, des musiciens et même des médecins. Sans le vouloir et sans même le savoir, nous reconstruisions l'« Institut pour l'Unicité de la Science ».

C'est alors qu'un miracle s'est produit en 1986. Un jeune homme, STÉPHANE MALLAT, construisit un dictionnaire établissant que les différentes équipes travaillant sur les ondelettes racontent, en fait la même histoire. Les recherches se sont alors intensifiées et I. DAUBECHIES (Princeton & National Academy of Sciences) a établi (1987) le théorème suivant (qui est un joyau des mathématiques).

***Théorème 1* (I. Daubechies).** *Pour tout entier $m \geq 0$, il existe une fonction $\psi(x)$ de la variété réelle x, à valeurs réelles, de classe $C^m(\mathbb{R})$ à support compact et telle que la collection*

$$2^{j/2}\psi(2^j x - k), \quad j \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{Z}, \tag{1.1}$$

soit une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$.

La construction de cette base utilise effectivement la découverte du codage en sous-bande et se relie donc aux problèmes posés par le téléphone digital !

« L'esprit des pionniers » n'est pas mort !

2. Analyse et synthèse

Ce fut pour moi une grande surprise : les « voix des êtres qui nous sont chers » sont, en fait, des fonctions continues $f(t)$, indiquant la valeur de la pression (de l'air) en fonction du temps (t). Toutes les qualités de la voix, toutes les émotions qu'elle transmet se relient aux fluctuations de cette fonction $f(t)$, à valeurs réelles.

Transmettre la voix dans le cadre du téléphone digital, c'est transmettre cette fonction $f(t)$. Le problème posé est de transformer cette fonction en une suite finie et même courte de symboles (en fait des 0 et des 1). Ces symboles sont transmis, puis un algorithme de reconstruction est utilisé, au niveau de la réception, pour reproduire un signal d'arrivée noté $\tilde{f}(t)$.

Le canal de transmission a un débit limité à 64 K bits/seconde. On veut cependant que le signal d'arrivée $\tilde{f}(t)$ soit perceptuellement proche de $f(t)$.

Dans la description qui précède, l'analyse a consisté à transformer $f(t)$ en une suite de coefficients tandis que la synthèse permettra de reconstruire $\tilde{f}(t)$ à l'aide des coefficients qui ont été transmis par la ligne téléphonique ou par le cable.

La première méthode qui vient à l'esprit est de remplacer la fonction continue $f(t)$ par un *échantillonnage*, c'est-à-dire par les valeurs $f(hk)$, $k \in \mathbb{Z}$, prises par cette fonction sur une grille, de pas $h > 0$. *Le théorème de Shannon nous indiquera la relation liant le pas d'échantillonnage à la fréquence de coupure de* $f(t)$.

Ceci étant, la suite $f(hk)$, $k \in \mathbb{Z}$, est encore trop longue pour être transmise telle quelle.

Pour transmettre efficacement la suite $f(hk)$, $k \in \mathbb{Z}$, il convient de tirer parti des corrélations existant entre les termes de cette suite.

Le codage linéaire prédictif (relié à la théorie des processus ARMA) consiste à chercher des relations de récurrence linéaires, assez courtes, reliant les coefficients $c_k = f(hk), k \in \mathbb{Z}$.

Plus précisément, on cherche un entier $N \geq 1$ et des coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_N$ tels que la suite $r_k, k \in \mathbb{Z}$, définie par

$$c_{k+N} - a_0 c_{k+N-1} - \cdots - a_{N-1} c_k = r_k \tag{2.1}$$

soit nulle ou presque pour la plupart des valeurs de k. Si ceci a lieu, il suffira de transmettre les valeurs de $a_0, \ldots, a_{N-1}$, puis de $c_0, \ldots, c_{N-1}$ et enfin les quelques valeurs de r_k qui ne sont pas nulles.

On peut aussi chercher à décorréler la suite c_k, $k \in \mathbb{Z}$, en cherchant N et les coefficients $a_0, \ldots, a_{N-1}$, de sorte que r_k, $k \in \mathbb{Z}$, soit totalement décorrélé (c'est-à-dire être un bruit blanc).

Bien entendu, il est hors de question d'obtenir (2.1) pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et l'on se contentera de chercher des « segments » définis par $k_j \leq k < k_{j+1}$ où (2.1) ait lieu. Les coefficients (ainsi que l'entier N) dépendront éventuellement de $j \in \mathbb{Z}$.

Cette approche ne convient pas au problème du traitement numérique de l'image. Une image est définie par une fonction $f(x, y)$ des deux variables réelles x et y. *Une fois échantillonnée, l'image est devenue une gigantesque matrice $c(k, \ell) = f(hk, h\ell)$ dont les éléments sont appelés pixels.* Ici, comme pour le signal unidimensionnel, $h > 0$ est le pas d'échantillonnage, $(k, \ell) \in \mathbb{Z}^2$ et $h\mathbb{Z}^2$ est appelé « grille d'échantillonnage ».

L'analyse de l'image repose sur le fait (empirique) que les valeurs du niveau de gris $c(k, \ell)$ en des points voisins sont, en général, voisins.

Pour *tirer parti de ces corrélations*, on doit utiliser une technique d'analyse dans laquelle une fonction régulière puisse être décrite à l'aide de très peu de coefficients.

Voici cette nouvelle technique d'analyse : « One technique for representing pictures by samples is expanding a picture in terms of a family of orthogonal functions and taking the coefficients of expansion as picture samples ». Cette citation est extraite du célèbre ouvrage de A. Rosenfeld, Digital picture processing, Vol 1, p.118.

Dans ces conditions, on peut même sauter l'étape de l'échantillonnage sur la « grille fine » associée au théorème de Shannon et directement accéder à la recommandation de Rosenfeld en calculant les intégrales

$$c(k, \ell) = \iint f(x, y) \varphi_{(k,\ell)}(x, y) dx dy \tag{2.2}$$

où $\varphi_{(k,\ell)}$ est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R}^2)$.

L'algorithme JPEG entre dans cette catégorie. La base orthonormée choisie s'obtient en effectuant une partition du plan en carrés de côté 1. Sur le carré défini par $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, on utilise une variante de l'analyse en série de Fourier. Dans cette variante les fonctions de base sont

$$\cos[\pi(k + 1/2)x] \cos[\pi(\ell + 1/2)y], \quad k \geq 0, \ \ell \geq 0.$$

Si l'image est déjà échantillonnée, sur une grille $N^{-1}\mathbb{Z}^2$ où $N \geq 2$ est un entier, alors la même base sera utilisée sur le carré $0 \leq x < 1$, $0 \leq y < 1$, mais l'on aura $0 \leq \ell \leq N-1$, $0 \leq m \leq N-1$ (ce qui correspond à la dimension de l'espace euclidien analysé).

Sur les autres carrés, les fonctions de base s'obtiennent par les translations évidentes.

Cette base préfigure les bases de Malvar-Wilson de la section 7.

Ces remarques ne permettent cependant pas de répondre à la question suivante : *quelle base orthonormée doit-on choisir pour tirer au mieux parti des corrélations existant dans un signal ou une image ?*

Commençons par une approche imprécise et intuitive. Une base orthonormée est optimale pour un ensemble E de signaux ou d'images si les séries correspondantes convergent « plus rapidement » lorsqu'on utilise cette base que si l'on en utilisait une autre. Il convient ici de préciser comment cette vitesse de convergence est mesurée. Il convient aussi de préciser si l'approximation recherchée est *linéaire ou non-linéaire*. Dans le premier cas, on range une fois pour toutes la base choisie $e_0, e_1, \ldots, e_k, \ldots$ dans un certain ordre et la vitesse d'approximation est mesurée à l'aide de $r_k(f) = \|f - (\alpha_0 e_0 + \cdots + \alpha_k e_k)\|$ lorsque $\alpha_k = \langle f, e_k \rangle$. Ces notations se réfèrent à la structure hilbertienne choisie ($L^2(\mathbb{R}^2)$ dans le cas des images).

Dans le cas linéaire, on peut chercher à évaluer $\rho_k = \sup\{r_k(f); f \in E\}$ et ceci correspond au « pire des cas » mais on peut également, si cela a un sens, chercher à évaluer la moyenne (ou la moyenne quadratique) de $r_k(f)$ quand f parcourt E.

Dans le cas de l'approximation non-linéaire, on définit

$$\tilde{r}_k(f) = \|f - (\alpha_{n(0)} e_{n(0)} + \cdots + \alpha_{n(k)} e_{n(k)})\|$$

où les indices $n(0) < n(1) < \cdots < n(k)$ sont choisis de sorte que le second membre soit minimal. Puisque e_k, $k \geq 0$, est une base hilbertienne, le choix optimal s'obtient de la façon suivante : on développe f en la série $f = \sum_0^\infty \alpha_k e_k$ et l'on range ensuite les $|\alpha_k|$ en une suite décroissante (au sens large). Cette suite est notée

$$\alpha_0^* \geq \alpha_1^* \geq \cdots \geq \alpha_k^* \geq \cdots \text{ et l'on a } \alpha_k^* = |\alpha_{n(k)}|$$

ce qui définit les $n(k)$.

Il est bien évident que la suite $n(k)$, $k \geq 0$, dépend de f et l'approximation non linéaire $f_k = \alpha_{n(0)} e_{n(0)} + \cdots + \alpha_{n(k)} e_{n(k)}$ n'est pas de la forme $f_k = L_k(f)$ où L_k est un opérateur linéaire.

Le point de vue de l'approximation non-linéaire est cohérent avec les algorithmes de seuillage et/ou de quantification des coefficients.

Dans ces algorithmes, tous les coefficients α_k tels que $|\alpha_k| < \varepsilon$ sont remplacés par 0. La série qui en résulte est $\Sigma' \alpha(k) e_k$ et définit une fonction f_ε. Là encore f_ε n'est pas de la forme $S_\varepsilon(f)$ où S_ε est linéaire.

Dans les algorithmes de quantification, on dispose d'un ensemble fini F de nombres réels autorisés et chaque coefficient α_k doit être remplacé par $\tilde{\alpha}_k$ qui est le nombre réel, appartenant à F et le plus proche de α_k. L'approximation de $f = \Sigma \alpha_k e_k$ par $\tilde{f} = \Sigma \tilde{\alpha}_k e_k$ s'apparente à un problème d'approximation non linéaire.

Nous reviendrons sur ces problèmes au cours de cet exposé. Pour l'instant, nous revenons au théorème de Shannon.

3. Le théorème de Shannon

Avant d'énoncer ce théorème, nous devons rappeler la définition de la *transformée de Fourier* d'une fonction $f(t)$ de la variable réelle t. Cette transformée de Fourier est définie par

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t)dt, \quad \omega \in \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

On suppose, dans un premier temps, que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt < \infty$, si bien que l'intégrale (3.1) est absolument convergente. On montre ensuite que l'on a nécessairement

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \tag{3.2}$$

si le membre de droite de (3.2) est fini. Alors la transformation de Fourier, notée $\mathcal{F}$, qui est, a priori définie sur $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, se prolonge par continuité à $L^2(\mathbb{R})$ tout entier. Nous désignons par $L^1(\mathbb{R})$ ou $L^2(\mathbb{R})$ l'espace défini par $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt < \infty$ ou $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty$, en supposant que $f(t)$ est mesurable.

Le *théorème de Shannon* concerne l'espace de Hilbert, noté V_T, des fonctions $f(t)$ appartenant à $L^2(\mathbb{R})$ et dont la transformée de Fourier $\widehat{f}(\omega)$ est nulle si $|\omega| > T$. Cette fréquence T s'appelle la fréquence de coupure. L'existence d'une fréquence de coupure résulte des propriétés physiques du signal étudié. Dans le cas du signal de parole ou de musique, $T = 20.000$Hz car les sons dont la fréquence est supérieure ne sont pas audibles. Dans ce dernier cas, il y a également une fréquence de coupure en direction des basses fréquences.

Revenons aux mathématiques et indiquons quelques propriétés remarquables de l'espace V_T.

D'une part V_T est invariant par translations : si $f(t)$ appartient à V_T, alors, pour tout $\tau \in \mathbb{R}$, $f(t-\tau)$ appartiendra également à V_T.

D'autre part les fonctions appartenant à V_T sont obligatoirement très régulières. Cette régularité (qui se détériore quand T augmente) est décrite par le célèbre théorème de Paley-Wiener (découvert par R.E.A.C. Paley et Norbert Wiener).

Voilà ce dont il s'agit

Théorème 2. *Une fonction $f(t)$ appartient à V_T si et seulement si cette fonction $f(t)$ est la restriction à l'axe réel d'une fonction entière $F(z)$ vérifiant la condition de croissance suivante*

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} |F(t+i\tau)|^2 dt \right)^{1/2} \leq C \exp(|\tau|T) \tag{3.3}$$

où C est une constante et où cette condition doit être satisfaite pour $-\infty < \tau < \infty$.

Le théorème de Shannon complète cet énoncé.

Posons

$$w(t) = \sqrt{\frac{T}{\pi}} \frac{\sin(Tt)}{Tt}. \tag{3.4}$$

Alors cette fonction appartient évidemment à V_T. Sa transformée de Fourier vaut $\sqrt{\pi/T}$ si $-T \leq \omega \leq T$ et 0 sinon.

On a alors

Théorème 3. *Les fonctions $e_k(t) = w(t-k\pi/T)$, $k \in \mathbb{Z}$, forment une base hilbertienne de V_T. Plus précisément, pour toute fonction $f \in V_T$, on a*

$$\sqrt{\frac{T}{\pi}} f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k\pi}{T}\right) e_k(t). \tag{3.5}$$

Nous savions déjà, grâce au théorème 2, que la fonction $f(t)$ est régulière. Les valeurs $f(k\pi/T)$ ont donc un sens.

Le théorème de Shannon nous apprend d'abord qu'une fonction f appartenant à V_T est entièrement déterminée par son échantillonnage sur la grille $\frac{\pi}{T}\mathbb{Z}$. On parlera d'un « échantillonnage critique ».

Si ce fait est acquis, (3.5) en découle immédiatement. En effet, la fonction $w(t)$ vaut $\sqrt{T\pi}$ quand $t = 0$ et 0 en tous les autres points de la grille d'échantillonnage. Le second membre de (3.5), noté $g(t)$, appartient à V_T (comme combinaison linéaire de fonctions de V_T) et prend les mêmes valeurs que f sur la grille $\frac{\pi}{T}\mathbb{Z}$. Donc $f = g$.

Le théorème de Shannon permet donc d'interpoler f et doit être comparé à la formule d'interpolation de Lagrange qui fournit un polynôme P de degré $\leq n$ à partir des valeurs $P(x_0), \ldots, P(x_n)$.

Le théorème de Shannon est un premier pas vers la notion de *débit d'un canal de communication.*

Voici ce dont il s'agit. On considère un intervalle $[0, L]$ auquel on restreint les fonctions f de l'espace V_T. *On désigne par $V_{T,L}$ l'espace vectoriel de ces restrictions.*

Léon Brillouin et Claude Shannon nous apprennent que *la « dimension » de $V_{T,L}$ est TL/π. En d'autres termes, le nombre moyen d'informations indépendantes que l'on peut transmettre par unité de temps est T/π.* Un canal de transmission a un débit limité par sa fréquence de coupure. Ce fait crucial intervient aujourd'hui dans la technologie du multimedia. La transmission des images nécessite de traiter un volume important de données numériques, ce qui nécessite l'emploi de fibres optiques comme canal de transmission. La fréquence de coupure est alors plus élevée.

Ceci est bel et beau mais semble en contradiction avec les théorèmes 2 et 3.

En premier lieu, les fonctions $f \in V_T$ sont des fonctions entières. Elles sont donc entièrement déterminées par leur restriction à $[0, L]$. L'application de restriction $\rho : V_T \to L^2[0, L]$ est injective et $V_{T,L}$ est de dimension infinie.

Comment peut-on alors parler du débit d'un canal de transmission ?

Un autre paradoxe est qu'une fonction $f \in V_T$ est entièrement déterminée par sa restriction à $[0, L]$. Est-il vrai qu'après avoir entendu deux minutes votre interlocuteur, vous puissiez prévoir ce qu'il dira par la suite ?

L'explication de ces deux paradoxes vient de l'analyse numérique et du problème du *conditionnement.*

Pour étudier l'opérateur de restriction ρ, on détermine *ses valeurs singulières* $\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq \cdots \geq 0$. Les valeurs singulières de ρ sont définies par la condition que la suite des λ_n^2, $n \geq 0$, est la suite des valeurs propres de l'opérateur auto-adjoint et compact $\rho^*\rho$.

Si l'on connait les valeurs singulières de ρ, on peut essentiellement calculer ρ. En effet, il existe une base orthonormée $e_0, \ldots, e_n, \ldots$ de V_T et une base orthonormée $f_0, \ldots, f_n, \ldots$ de $L^2[0, L]$ telles que $\rho(e_n) = \lambda_n f_n$.

Cette base orthonormée e_n, $n \geq 0$, n'est pas la base de Shannon. Elle est construite dans [6], référence à laquelle nous renvoyons le lecteur intéressé. Il pourra aussi consulter le beau livre d'Ingrid Daubechies [2].

Revenons au problème de la « dimension » de $V_{T,L}$. L'explication du paradoxe vient du fait suivant : si le produit TL tend vers l'infini, alors λ_n est « essentiellement égal à 1 » si $0 \leq n \leq \frac{TL}{\pi} - C \log(TL)$ où C est une constante. Ensuite λ_n, bien que positif, est « essentiellement nul » si $n > \frac{TL}{\pi} + C \log(TL)$.

Puisque l'on manipule seulement des signaux

$$f(t) = \alpha_0 e_0(t) + \cdots + \alpha_n e_n(t) + \cdots \tag{3.6}$$

d'énergie finie, disons égale à 1, on a $\sum\limits_0^\infty |\alpha_n|^2 = 1$.

La restriction à $[0, L]$ prend alors la forme

$$f(t) = \lambda_0 \alpha_0 f_0(t) + \cdots + \lambda_n \alpha_n f_n(t) + \cdots \tag{3.7}$$

et l'on ne peut plus avoir accès (numérique, effectif) aux paramètres $\lambda_n \alpha_n$ quand $n > \frac{TL}{\pi} + C \log(TL)$.

Pour avoir accès à ces paramètres, il faudrait « diviser par 0 », en fait par λ_n qui est essentiellement nul.

En analyse numérique, multiplier ou diviser par des nombres extrêmement petits est interdit.

Dans notre cas, la partie inaccessible de (3.7) est « noyée dans le bruit thermique ». C'est ainsi que D. Gabor explique les paradoxes précédents.

Notons que l'analyse précédente n'aurait pu être conduite à partir de la base de Shannon. La fonction $w(t)$ est alors trop mal localisée et la restriction à $[0, L]$ du second membre de (3.5) fait appel aux valeurs de $f(k\pi/T)$ pour des points de la grille d'échantillonnage relativement éloignés de $[0, L]$. Ceci est dû au comportement en $O(t^{-1})$ de $w(t)$ et de la divergence de la série harmonique.

Si $T = \pi$, la fonction $w(t) = \dfrac{\sin \pi t}{\pi t}$ s'appelle le « sinus cardinal ». C'est une sinusoïde légèrement amortie dont le graphe est bien connu.

4. Généralisations du théorème de Shannon

Le théorème de Shannon doit-il être lu comme un théorème d'analyse ou comme un théorème d'algèbre ? Dans ce second cas, on oublie l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ et l'on cherche à savoir si (3.5) a lieu, en toute généralité, pour une fonction f arbitraire dont la transformée de Fourier, au sens des distributions, soit portée par l'intervalle $[-T, T]$.

On montre alors [5] que l'on peut, par exemple, supposer

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^p dt\right)^{1/p} = \|f\|_p < \infty \tag{4.1}$$

pour un certain $p \in]1, \infty[$.

L'identité (3.5) sera encore exacte et le second membre convergera vers $f(t)$ au sens de la norme L^p.

En revanche (3.5) est fausse si $p = +\infty$. Le contre-exemple est $f(t) = \sin(Tt)$ dont la transformée de Fourier est $i\pi(\delta_{(-T)} - \delta_T)$ où δ_a est la masse de Dirac en a.

Alors $f(k\pi/T) = 0$ et (3.5) conduit à une absurdité.

Le théorème de Shannon n'est pas une « identité remarquable ». C'est un théorème d'analyse.

La généralisation du théorème de Shannon en dimension arbitraire a été entreprise par H.J. Landau, aux laboratoires AT& T de Murray-Hill.

Parce qu'elle mêle avec bonheur les mathématiques et le traitement du signal, l'œuvre scientifique de H.J. Landau s'inscrit dans la voie ouverte par les « pères fondateurs » de la révolution numérique.

Landau généralise le problème étudié par Shannon. L'intervalle $[-T, T]$ est remplacé par une partie compacte K de $\mathbb{R}^n$ tandis que V_T est remplacé par l'espace V_K des fonctions $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ dont la transformée de Fourier est nulle hors de K. Alors que les fonctions f appartenant à V_T étaient échantillonnées sur la grille $h\mathbb{Z}$, $h > 0$, nous chercherons à échantillonner les fonctions $f \in V_K$ sur un ensemble discret Λ de points de $\mathbb{R}^n$ (on parlera alors d'un échantillonnage irrégulier).

Landau pose alors les deux problèmes suivants

(4.2) pour quels couples (K, Λ), l'application d'échantillonnage $f \to (f(\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ est-elle surjective de V_K sur $\ell^2(\Lambda)$?

(4.3) pour quels couples (K, Λ) l'application $f \to (f(\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ est-elle (fortement) injective de V_K dans $\ell^2(\Lambda)$?

Cette dernière condition signifie qu'il existe une constante C telle que l'on ait

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx \leq C \sum_{\lambda \in \Lambda} |f(\lambda)|^2 \tag{4.4}$$

pour toute fonction $f \in V_K$.

Dans le langage du traitement du signal, (4.2) correspond au « sous-échantillonnage » tandis que (4.4) correspond au « sur-échantillonnage ». Si (4.2) et (4.4) ont lieu simultanément, on parlera d'un échantillonnage critique.

Pour illustrer ces notions, revenons au cas uni-dimensionnel avec $K = [-T, T]$ et $\Lambda = h\mathbb{Z}$, $h > 0$. Le sous-échantillonnage correspond à $h > \pi/T$, l'échantillonnage critique à $h = \pi/T$ et le sur-échantillonnage à $0 < h < \pi/T$.

Dans le premier cas, la somme $S(t)$ de la série $\sum_{-\infty}^{\infty} f(hk)w(t - hk)$ où $w(t) = \dfrac{\sin Tt}{Tt}$ n'est plus égale à $f(t)$ et ce phénomène s'appelle « aliasing ».

Dans le dernier cas ($0 < h < \pi/T$) on peut améliorer (3.5) en

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(hk)\theta(t - hk) \tag{4.5}$$

où $\theta(t)$ est une fonction de la classe de Schwartz ne dépendant que de h et de T.

Mais, comme nous l'avons déjà souligné, l'application qui à f dans V_T associe $f(hk)$, $k \in \mathbb{Z}$, n'est pas un isomorphisme entre V_T et $\ell^2(\mathbb{Z})$ lorsque $0 < h < \pi/T$.

Le sur-échantillonnage implique que l'information fournie par l'échantillonnage $f(hk)$, $k \in \mathbb{Z}$, est redondante et ces coefficients $f(hk)$, $k \in \mathbb{Z}$, sont reliés entre eux par des relations assez subtiles.

5. Cellules de Gibbs et pavage du plan temps-fréquence

Le plan temps-fréquence est le plan $\mathbb{R}^2$, l'abcisse désignant le temps t et l'ordonnée la fréquence ω. Déployer une fonction $f(t)$ dans le plan temps-fréquence correspond à l'exercice appelé dictée musicale : on écoute la musique (ici $f(t)$) et l'on écrit les notes (ici les « atomes temps-fréquence »), en indiquant leur durée et leur hauteur. Finalement, après avoir écouté la musique, on écrit la partition.

La difficulté de l'exercice vient du choix des « atomes temps-fréquence ».

Nous examinerons successivement plusieurs options. La première est le célèbre système proposé par D. Gabor et I. von Neumann et popularisé sous le nom « d'ondelettes de Gabor ». Nous verrons pourquoi ce système a dû être abandonné.

Le second choix résulte d'une simple application du théorème de Shannon. Ces « ondelettes de Shannon » ont également été abandonnées au profit des bases de Wilson qui sont effectivement utilisées dans le son numérique « Dolby ».

Un « atome temps-fréquence » est une fonction ayant une bonne localisation (autour de t_0) et dont la transformée de Fourier $\widehat{f}(\omega)$ a également une bonne localisation (autour de ω_0).

Mais cette double exigence se heurte à une limite, connue sous le nom de principe d'incertitude de Heisenberg :

***Théorème 4* (Heisenberg).** *Si $f(t)$ est une fonction, à valeurs réelles ou complexes, normalisée par $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2dt = 1$, alors on a nécessairement*

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} t^2|f(t)|^2dt\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2|\widehat{f}(\omega)|^2d\omega\right) \geq \pi/2 \tag{5.1}$$

et, plus généralement, on a, pour $t_0 \in \mathbb{R}$, $\omega_0 \in \mathbb{R}$,

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} (t-t_0)^2|f(t)|^2dt\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} (\omega-\omega_0)^2|\widehat{f}(\omega)|^2d\omega\right) \geq \pi/2. \tag{5.2}$$

Bien entendu (5.2) découle de (5.1) appliqué à la fonction auxiliaire $g(t) = e^{i\omega_0 t}f(t+t_0)$.

Pour démontrer (5.1), nous supposerons d'abord $f(t)$ réelle. On part de l'intégrale $I = \int_{-\infty}^{\infty} tf(t)f'(t)dt$ que l'on calcule de deux façons différentes. D'une part, on intègre par parties et l'on obtient $I = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt = -1/2$. D'autre part on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'on obtient

$$|I| \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} t^2|f(t)|^2dt\right)^{1/2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)|^2dt\right)^{1/2}.$$

Cette dernière intégrale vaut $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\int_{-\infty}^{\infty}\omega^2|\widehat{f}(\omega)|^2d\omega)^{1/2}$.

Si $f(t)$ est à valeurs complexes, on considère

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{f'(t)}dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)}f'(t)dt$$

et l'on reprend l'argumentation précédente.

La preuve que nous venons de donner montre que (5.1) est une égalité si et seulement si $f(t) = c\exp(-t^2/2h^2)$ où $h > 0$ et $|c| = \pi^{-1/4}h^{-1/2}$. De même (5.2) est une égalité si et seulement si

$$f(t) = ce^{i\omega_0 t} \exp\left(-\frac{(t-t_0)^2}{2h^2}\right). \tag{5.3}$$

Nous venons de définir les « ondelettes de Gabor » dont la localisation dans le plan temps-fréquence est optimale.

Plus généralement, *nous appellerons « atomes temps-fréquence » la famille, indexée par* $(t_0, \omega_0) \in \mathbb{R}^2$ *des fonctions*

$$f(t) = e^{i\omega_0 t} w(t - t_0) \tag{5.4}$$

où $w(t)$ *est fixée et est bien localisée en variable temporelle et fréquentielle.*

John von Neumann et Dennis Gabor pensaient qu'en répartissant régulièrement les points (t_0, ω_0) dans le plan temps-fréquence, il était possible de construire des bases de $L^2(\mathbb{R})$ formées d'atomes temps-fréquence.

Voici un premier exemple de ce programme, à savoir la base de Shannon.

Théorème 5. *Posons* $w(t) = \dfrac{\sin \pi t}{\pi t}$ *et*

$$w_{j,k}(t) = \exp(2\pi i j t) w(t-k), \quad j \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{Z}. \tag{5.5}$$

Alors les atomes temps-fréquence $w_{j,k}(t)$ *forment une base orthonormée de* $L^2(\mathbb{R})$.

La preuve de (5.5) est immédiate. On commence par décomposer $f \in L^2(\mathbb{R})$ en

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} f_j(t) \tag{5.6}$$

où les transformées de Fourier $\widehat{f_j}(\omega)$ de f_j sont définies par $\widehat{f_j}(\omega) = \widehat{f}(\omega)$ si $2\pi(j - 1/2) \le \omega < 2\pi(j + 1/2)$, $j \in \mathbb{Z}$, et $\widehat{f_j}(\omega) = 0$ sinon.

Les différentes fonctions f_j sont orthogonales entre elles, au sens du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}dt.$$

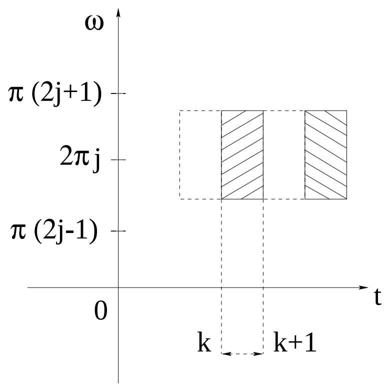
Il suffit pour conclure de vérifier que

$$f_j(t) = \sum_k e(j,k) w_{j,k}(t). \tag{5.7}$$

Mais, par construction, $f_j(t) = \exp(2\pi i j t) g_j(t)$ où $g_j(t)$ appartient à l'espace V_π de Shannon.

Le théorème 2 s'applique à $g_j(t)$ et implique (5.7).

Les physiciens Léon Brillouin et Eugène Paul Wigner ont introduit le « plan-temps-fréquence » pour illustrer le théorème 5 ainsi que ses variantes.



Le domaine hachuré fournit, à la fois, la localisation de $w_{j,k}(t)$ en variable temporelle (localisation approchée autour de k) et la localisation de $w_{j,k}$ en variable fréquentielle (localisation exacte puisque le support de la transformée de Fourier $\widehat{w}_{j,k}(\omega)$ est exactement l'intervalle $[\pi(2j-1), \pi(2j+1)[$.

Le plan temps-fréquence est pavé par les rectangles (cellules de Gibbs) que nous venons de définir.

Pour Léon Brillouin, comme pour Eugène Paul Wigner, le théorème 5 s'apparente à l'écriture musicale du signal (acoustique ou musical) $f(t)$. Les « notes » sont les rectangles précédents.

On objectera que ces « notes » ont toutes la même durée et que les « fréquences » sont en progression arithmétique au lieu d'être en progression géométrique (octaves). Nous reviendrons sur ce point.

6. Analyse de Fourier à fenêtre et ondelettes de Gabor

Malgré son élégante simplicité, le théorème 5 présente deux défauts que nous avons déjà mentionnés. D'une part, le sinus cardinal $w(t) = \dfrac{\sin \pi t}{\pi t}$ est mal localisé autour de 0. D'autre part, les « notes » ou « atomes temps-fréquence » utilisés ont tous la même durée.

Le physicien K. Wilson a su corriger ces deux défauts. Mais avant d'indiquer cette solution, il importe d'éliminer les choix les plus naturels.

Remplacer $w(t)$ par une fonction aussi régulière mais mieux localisée se heurte à un obstacle majeur, découvert indépendamment par deux physiciens, Francis Low et Roger Balian (professeur à l'École Polytechnique).

Si H est un espace de Hilbert, une suite e_k, $k \in \mathbb{N}$, de vecteurs de H est une *base inconditionnelle* (ou base de Riesz) de H si les combinaisons linéaires finies $\alpha_0 e_0 + \cdots + \alpha_m e_m$, $m \geq 0$, constituent un sous-espace vectoriel E dense dans H et s'il existe deux constantes positives $C' \geq C > 0$ telles que l'on ait

$$C(|\alpha_0|^2 + \cdots + |\alpha_m|^2)^{1/2} \leq \|\alpha_0 e_0 + \cdots + \alpha_m e_m\| \leq C'(|\alpha_0|^2 + \cdots + |\alpha_m|^2)^{1/2}$$

pour tout $m \geq 0$ et toute suite $\alpha_0, \ldots, \alpha_m$ de scalaires.

Le théorème de Balian-Low nous apprend que le théorème 5 ne peut être amélioré. On a en effet, le résultat suivant.

Théorème 6. *Supposons que la fonction $w(t)$ de la variable réelle t et sa transformée de Fourier $\widehat{w}(\omega)$ vérifient les conditions suivantes*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |w(t)|^2(1+t^2)dt < \infty \tag{6.1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{w}(\omega)|^2(1+\omega^2)d\omega < \infty. \tag{6.2}$$

Alors la suite double

$$w_{j,k}(t) = \exp(2\pi ijt)w(t-k), \quad j \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{Z}, \tag{6.3}$$

ne peut être une base de Riesz de $L^2(\mathbb{R})$.

Observons que (6.2) peut également s'écrire $\int_{-\infty}^{\infty} |w'(t)|^2 dt < \infty$ où $w'(t)$ est la dérivée de $w(t)$ au sens des distributions. Nous avons privilégié l'écriture (6.2) car elle respecte la symétrie entre $w(t)$ et sa transformée de Fourier $\widehat{w}(\omega)$. Cette symétrie est inhérente au problème posé. En effet les transformées de Fourier des fonctions $w_{j,k}(t)$ s'écrivent

$$\widehat{w}_{j,k}(\omega) = e^{-ik\omega}\widehat{w}(\omega - 2\pi j). \tag{6.4}$$

Il s'agit donc d'atomes temps-fréquence où les rôles de j et de k sont inversés.

En particulier D. Gabor et J. von Neumann s'étaient trompés. Si

$$w(t) = \exp(-t^2/2),$$

alors il est faux que toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ puisse s'écrire sous la forme

$$\Sigma\Sigma\alpha(j,k)w_{j,k}(t)$$

où $\Sigma\Sigma|\alpha(j,k)|^2 < \infty$. En revanche les fonctions que l'on obtient par ce procédé constituent une partie dense dans $L^2(\mathbb{R})$. Mais ce sous-espace vectoriel dense n'est pas $L^2(\mathbb{R})$ tout entier.

Une dernière remarque concernant le théorème de Balian-Low est le rôle de l'échantillonnage critique.

Si

$$w(t) = \exp(-t^2/2)$$

et si l'on considère les atomes temps-fréquence « sur-échantillonnés », à savoir

$$\tilde{w}_{j,k}(t) = \exp(2\pi ijt)w(t - \alpha k) \tag{6.5}$$

où $0 < \alpha < 1$, alors toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ s'écrit

$$f(t) = \Sigma\Sigma\alpha(j,k)\tilde{w}_{j,k}(t) \tag{6.6}$$

où

$$(\Sigma\Sigma(\alpha(j,k)|^2)^{1/2} \leq C(\alpha)\|f\|_2$$

mais l'application surjective de $\ell^2(\mathbb{Z}^2)$ sur $L^2(\mathbb{R})$ ainsi définie n'est pas injective.

En sens inverse (« sous-échantillonnage ») si $\alpha > 1$, l'application de $\ell^2(\mathbb{Z}^2)$ dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ qui à $(\alpha(j,k))$ associe la fonction $f(t)$ définie par (6.6) est injective mais pas surjective. On retrouve ici l'alternative qui apparaissait dans le théorème de Shannon.

Un cas extrême de sur-échantillonnage est celui de la transformée de Fourier à fenêtre.

On remplace j et k par des variables continues ξ et τ et l'on considère tous les atomes temps-fréquence

$$w_{\xi,\tau}(t) = \exp(i\xi t)w(t - \tau) \tag{6.7}$$

où $\xi \in \mathbb{R}, \tau \in \mathbb{R}, w \in L^2(\mathbb{R})$ et $\|w\|_2 = (2\pi)^{-1/2}$.

La transformée de Fourier à fenêtre de $f(t)$ est alors

$$W(\tau,\xi) = \langle f, w_{\xi,\tau}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi t} f(t)\overline{w(t-\tau)}\,dt. \tag{6.8}$$

Cette dernière intégrale est le produit scalaire entre $f(t)$ et l'atome temps-fréquence. Mais elle peut aussi être interprétée de la façon suivante. On effectue la transformée de Fourier à fenêtre de f en segmentant $f(t)$: il s'agit de multiplier $f(t)$ par $w(t-\tau)$ ce qui délimite un « morceau » ou « segment » du signal $f(t)$. Ensuite on effectue la transformée de Fourier usuelle de ce morceau. On obtient ainsi (6.8).

On revient à $f(t)$ grâce à la formule d'inversion

$$f(t) = \iint W(\tau,\xi)w_{\xi,\tau}(t)\,d\tau\,d\xi. \tag{6.9}$$

Bien entendu l'information fournie par $W(\tau,\xi)$ est redondante puisqu'une fonction d'une variable réelle est remplacée par une fonction de deux variables réelles. Pour mieux comprendre à quel point cette information est redondante, examinons le cas particulier où $w(t) = \exp(-t^2/2)$ en oubliant intentionnellement la constante de normalisation.

On pose successivement $\tilde{f}(t) = \exp(-t^2/2)f(t)$ puis

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-izt}\tilde{f}(t)dt, \quad z = x + iy. \tag{6.10}$$

Cette fonction $F(z)$ est entière et un calcul évident fournit

$$\iint |F(z)|^2 e^{-y^2} dx dy = 2\pi\sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt. \tag{6.11}$$

Finalement la transformée de Fourier à fenêtre $W(\tau, \xi)$ de f et la fonction entière $F(z)$ sont reliées par

$$W(\tau, \xi) = e^{-\tau^2/2} F(\xi + i\tau). \tag{6.12}$$

On voit ici que $W(\tau, \xi)$ n'est évidemment pas une fonction arbitraire. Elle doit vérifier les deux contraintes suivantes : $e^{\tau^2/2} W(\tau, \xi) = F(\xi + i\tau)$ est une fonction entière et $W(\tau, \xi)$ doit appartenir à $L^2(\mathbb{R}^2)$:

$$\iint |W(\tau, \xi)|^2 d\tau d\xi = 2\pi\sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt. \tag{6.13}$$

Un physicien, et non des moindres, nous a appris comment contourner l'obstacle du théorème de Balian-Low. Il s'agit de Kenneth Wilson, prix Nobel de physique, célèbre pour ses travaux sur la renormalisation.

7. Les bases de Wilson

Le théorème de Wilson a été annoncé mais non démontré par son auteur. L'intuition de Wilson, basée sur des expérimentations numériques, l'a conduit à modifier la modulation, c'est-à-dire le facteur $\exp(2\pi ijt)$, dans la définition des ondelettes de Gabor. On peut alors retrouver des bases orthogonales améliorant sensiblement la base de Shannon.

Voici un premier énoncé qui sera ensuite amélioré. On part d'une fenêtre $W(t)$ qui est nulle hors de l'intervalle $[-1/2, 3/2]$ et qui vérifie $0 \le w(t) \le 1$, $w(1-t) = w(t)$ et finalement

$$\sum_{-\infty}^{\infty} w^2(t-k) = 1 \text{ sur } \mathbb{R}. \tag{7.1}$$

Ces propriétés permettent évidemment d'imposer, en outre $w(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

On a alors

Théorème 7. *Posons successivement*

$$w_j(t) = \sqrt{2}\cos[\pi(j + 1/2)t]w(t), \quad j = 0, 1, 2, \ldots \tag{7.2}$$

et ensuite

$$w_{j,k}(t) = w_j(t-k), \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{7.3}$$

Alors $w_{j,k}(t)$ est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$.

Ce théorème appartient aux mathématiques. Sa preuve n'est pas difficile. Cependant ce théorème n'a pas été découvert par un mathématicien mais bien par un physicien, K. Wilson et également par un chercheur brésilien, spécialiste du traitement du signal. Il s'agit de Henrique Malvar.

On peut penser que l'action du groupe $\mathbb{Z}$ joue un rôle essentiel dans le théorème 5. Il n'en est rien. R.R. Coifman et l'auteur de ces lignes ont pu généraliser le théorème de Wilson de la façon suivante.

On remplace les fonctions $w(t-k)$ par des fonctions $w_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}$, à support compact et soumises encore une fois à

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |w_k(t)|^2 = 1 \text{ identiquement sur } \mathbb{R}. \tag{7.4}$$

La condition de symétrie $w(t) = w(1-t)$ est remplacée par les conditions suivantes

(7.5) le support de w_k est l'intervalle $[t_k - \eta_k, t_{k+1} + \eta_{k+1}]$ où $\lim_{k \to \pm\infty} t_k = \pm\infty$,

$$\eta_k > 0 \text{ et } \eta_k + \eta_{k+1} \le \ell_k = t_{k+1} - t_k$$

(7.6) sur l'intervalle $[t_k - \eta_k, t_k + \eta_k]$, on a

$$w_{k-1}(t_k + \tau) = w_k(t_k - \tau), \ |\tau| \le \eta_k.$$

Dans ces conditions, on a

Théorème 8. *Les atomes temps-fréquence $w_{j,k}(t)$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, $k \in \mathbb{Z}$, définis par*

$$w_{j,k}(t) = \sqrt{\frac{2}{\ell_k}} \cos\left[\pi(j + 1/2)\frac{t - t_k}{\ell_k}\right] w_k(t) \tag{7.7}$$

forment une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$.

La décomposition d'une fonction de carré sommable $f(t)$ dans la base $w_{j,k}(t)$ s'apparente à l'écriture musicale. En fait, on peut en dire plus. Jean-Sylvain Liénard et Xavier Rodet avaient introduit des atomes temps-fréquence conduisant à une analyse et à une synthèse efficace de la voix chantée. Ils ont été conduits à ce qu'ils appelèrent « waveforms ». Ces « waveforms » étaient de la forme $\cos(\omega t + \varphi) w(t)$ où la fenêtre $w(t)$, à support dans l'intervalle $[a, b]$ correspond à l'« attaque » de la note ($w(t)$ augmente sur $[a, c]$) puis à l'« étouffement » ($w(t)$ diminue sur $[c, b]$). On a $a \le c \le b$ et toutes les valeurs de ω, φ, a, b et c sont permises.

La voix chantée $f(t)$ est décomposée, dans les algorithmes de Liénard & Rodet en une combinaison linéaire

$$f(t) = \Sigma c_j \cos(\omega_j t + \varphi_j) w_j(t) \tag{7.8}$$

mais l'écriture (7.8) restait très laborieuse dans ces travaux. Les auteurs ne disposaient pas du théorème 6.

8. Recherche de la base optimale

Il n'est pas vrai que toutes les bases orthonormées de $L^2(\mathbb{R})$ soient utiles. Certaines sont plus efficaces que d'autres. Cette efficacité apparaît lorsque la base orthonormée en question est utilisée pour analyser d'autres espaces fonctionnels que l'espace de référence $L^2(\mathbb{R})$. On pense aux espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$, aux espaces de Hölder $C^r(\mathbb{R})$, aux espaces de Lebesgue $L^p(\mathbb{R})$ où $1 \le p \le \infty$ etc.

En traitement du signal, il est également intéressant de comparer les performances, sur un ensemble E de signaux ou d'images, de diverses bases orthonormées.

Deux problèmes apparaissent et D. Donoho nous a appris à les relier. D'une part, on peut souhaiter que les fonctions f appartenant à E soient efficacement comprimées lorsque la « base optimale » est choisie.

D'autre part on peut souhaiter que la décomposition dans cette « base optimale » soit robuste. Il s'agit des problèmes posés par le seuillage et la quantification.

Soyons plus précis.

L'utilisation du « numérique » amène à remplacer la décomposition exacte

$$f(t) = \Sigma \alpha_j e_j(t) \tag{8.1}$$

d'un signal d'entrée $f \in E$ dans la base orthonormée e_j, $j \in J$, par une décomposition approchée

$$\tilde{f}(t) = \sum_{j \in F} \tilde{\alpha}_j e_j(t). \tag{8.2}$$

Dans cette décomposition approchée, F est une partie finie de J tandis que $\tilde{\alpha}_j$ est obtenu à partir de α_j par les opérations de seuillage et/ou de quantification.

Cela signifie que tous les α_j vérifiant $|\alpha_j| < \varepsilon$ (pour un certain seuil $\varepsilon > 0$) seront remplacés par 0. Par ailleurs les $\tilde{\alpha}_j$ appartiennent à un ensemble fini E de valeurs digitales.

Il est clair que le seuillage intervient sur le choix de F. Le plus souvent, F est précisément l'ensemble des $j \in J$ tels que $|\alpha_j| \ge \varepsilon$.

Le choix optimal de la base orthonormée e_j, $j \in J$, est celui pour lequel $\tilde{f}(t)$ est perceptuellement le plus proche possible de $f(t)$ quand f parcourt E.

Ce problème est difficile, car la qualité de la reconstruction (ou restitution) $\tilde{f}(t)$ n'est pas mesurée (par l'œil ou l'oreille) à l'aide de la norme $L^2(\mathbb{R})$.

On ne dispose pas d'une norme fonctionnelle définissant cette qualité.

Si l'on remplace l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ par un espace fonctionnel E, les problèmes mathématiques posés par l'approximation non linéaire sont particulièrement intéressants. Il s'agit encore, pour tout entier $N \geq 1$, d'évaluer la borne inférieure des erreurs commises en remplaçant $f(t) = \Sigma\alpha_j e_j(t)$ par $\tilde{f}(t) = \sum_{j\in F} \beta_j e_j(t)$ où le cardinal de F ne dépasse pas N. Cette erreur est définie par $\varepsilon_N(f) = \|f - \tilde{f}\|_E$ et l'on cherche à relier la vitesse à laquelle $\varepsilon_N(f)$ tend vers 0 aux propriétés de la fonction $f(t)$. Signalons avec force que, pour tout N fixé, les choix de F et des β_j sont entièrement libres, c'est-à-dire dépendent (non linéairement) de $f(t)$.

Revenons au théorème 6. On dispose d'une infinité de bases orthonormées et il convient de faire un choix. Le lecteur intéressé par ce problème pourra consulter [3] ou [4].

9. Les « chirps » en mathématique et en traitement du signal

Le mot anglais « chirp » désigne le pépiement, le gazouillis d'un oiseau. En traitement du signal, il s'agit d'un signal modulé en fréquence, c'est-à-dire une fonction de la forme

$$f(t) = A(t)\exp(i\varphi(t)) \tag{9.1}$$

où $A(t)$ et $\varphi(t)$ sont à valeurs réelles et où la dérivée seconde $\varphi''(t)$ est « beaucoup plus grande » que le maximum de $|A(t)| + |A'(t)| + |A''(t)|$.

Ceci exclut les atomes temps-fréquence étudiés précédemment où $\varphi(t) = \omega t + \varphi$, c'est-à-dire $\varphi''(t) = 0$.

En mathématique, il importe évidemment de donner un sens à la condition concernant $|\varphi''(t)|$.

Il y a trois options.

Dans la première, on suppose que $A(t)$ est une fonction régulière, à support compact inclus dans l'intervalle $[a, b]$. On suppose ensuite que $\varphi''(t) \geq 1$ sur $[a, b]$ et l'on introduit un « grand paramètre » $\lambda \geq 1$. On considère la famille $f_\lambda(t)$ des fonctions définies par

$$f_\lambda(t) = A(t)\exp(i\lambda\varphi(t)) \tag{9.2}$$

dont on étudie le *comportement asymptotique quand λ tend vers $+\infty$*.

Dans la seconde option, on suppose que $f(t)$ est définie sur $[t_0, \infty[$ et l'on étudie, sous la condition $\varphi''(t) \geq 1$, $t \geq t_0$, *le comportement asymptotique de $f(t)$ quand t tend vers $+\infty$*.

Dans la troisième option que nous développerons, le signal $f(t)$ comporte une *singularité* en $t = t_0$. C'est à dire que $\varphi(t)$ et $A(t)$ sont régulières en dehors du point

t_0. On suppose en outre que $\lim_{t\to t_0} |\varphi''(t)| = +\infty$ et que s'il en est de même pour $A(t), A'(t)$ et $A''(t)$, du moins on ait

$$\lim_{t\to t_0} |\varphi''(t)|/(|A(t)| + |A'(t)| + |A''(t)|) = +\infty.$$

Un exemple bien connu est fourni par

$$f(t) = t\sin(1/t) \tag{9.3}$$

avec $t_0 = 0$.

Dans les pages qui suivent, les « chirps » seront tout d'abord de nouveaux « atomes temps-fréquence » et nous serviront à décomposer de façon plus efficace des signaux ou des fonctions assez compliquées.

Nous étudierons d'abord de nouvelles bases orthonormées de $L^2(\mathbb{R})$ dont la structure généralise celle des bases de Wilson.

Ensuite nous décomposerons la série de Riemann

$$\sigma(x) = \sum_1^\infty n^{-2}\sin(\pi n^2 x) \tag{9.4}$$

en une série de chirps et démontrerons ainsi sa dérivabilité en $x_0 = 1$.

Après ces deux résultats où les chirps jouent le rôle d'atomes temps-fréquence, nous présenterons un point de vue totalement différent. Nous construirons des espaces fonctionnels dont les éléments sont tous des « chirps ». L'analyse des fonctions appartenant à ces espaces fonctionnels se fera en utilisant les ondelettes « temps-échelle ».

10. Bases de Wilson modulées en fréquence

Les nouveaux atomes « temps-fréquence » que nous construisons appartiennent à un programme lancé par R. Baraniuk et S. Mann. Pour ces auteurs, ces « atomes temps-fréquence » sont définis par une formule explicite, à savoir

$$a(t) = \pi^{-1/4}\ell^{-1/2}\exp\left[i\left(\frac{\alpha t^2}{2} + \beta t\right)\right]\exp\left(-\frac{(t-t_0)^2}{2\ell^2}\right) \tag{10.1}$$

où $\ell > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ et $t_0 \in \mathbb{R}$ sont des paramètres.

Mais en adoptant ce point de vue, nous sommes aussi démunis que l'étaient von Neumann ou D. Gabor en 1945. Nous ne disposons d'aucun algorithme permettant de décomposer efficacement un signal en ces atomes temps-fréquence.

Comme précédemment nous modifierons la définition (10.1) à deux niveaux. D'une part la gaussienne $g(t) = \pi^{-1/4} \exp(-t^2/2)$ sera remplacée par une enveloppe différente, à support compact. D'autre part, nous remplacerons $\exp(i\alpha t)$ par $\cos[\pi(j + 1/2)\frac{t-t_0}{h}]$ où $h > 0$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$.

Voici un énoncé précis.

Le point de départ est une « segmentation » t_k, $k \in \mathbb{Z}$, de la droite réelle. Nous supposerons simplement que $t_k < t_{k+1}$, $k \in \mathbb{Z}$, que $\lim_{k\to+\infty} t_k = +\infty$ et que $\lim_{k\to-\infty} t_k = -\infty$.

En suivant la construction des ondelettes de Wilson, nous considérons une suite η_k de nombres réels positifs ainsi qu'une suite $w_k(t)$ de fenêtres vérifiant (7.3), (7.4) et (7.5).

La modulation supplémentaire est définie par deux suites α_k, β_k, de nombres réels ayant la propriété suivante

(10.2) la fonction $\omega(t)$ définie par $\omega(t) = \alpha_k t + \beta_k$ si $t_k \le t < t_{k+1}$, $k \in \mathbb{Z}$, est continue sur la droite réelle.

On désigne ensuite par $\varphi(t)$ une primitive de $\omega(t)$:

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\alpha_k t^2 + \beta_k t + \gamma_k \text{ si } t_k \le t < t_{k+1}.$$

Enfin nous définirons $\varphi_k(t)$ sur l'intervalle élargi $[t_k - \eta_k,\ t_{k+1} + \eta_{k+1}]$ par $\varphi_k(t) = \frac{1}{2}\alpha_k t^2 + \beta_k t + \gamma_k$. Si donc on a bien $\varphi(t) = \varphi_k(t)$ sur l'intervalle $[t_k, t_{k+1}]$, les fonctions $\varphi_k(t)$ et $\varphi_{k-1}(t)$ diffèrent sur l'intervalle $[t_k - \eta_k, t_k + \eta_k]$.

Les ondelettes de Wilson modulées sont alors définies par

$$\tilde{w}_{j,k}(t) = \sqrt{\frac{2}{\ell_k}} e^{i\varphi_k(t)} \cos\left[\pi(j+1/2)\frac{t-t_k}{\ell_k}\right] w_k(t) \tag{10.3}$$

où $j = 0, 1, 2, \ldots$ et $k \in \mathbb{Z}$.

On a alors

Théorème 9. *Les ondelettes de Wilson modulées $\tilde{w}_{j,k}(t)$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, $k \in \mathbb{Z}$, forment une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$.*

Voici un exemple d'application de ce théorème. Nous partons de deux fonctions réelles $g(t)$ et $\varphi(t)$ ayant les propriétés suivantes : sur le support compact de $g(t)$, on a $\varphi''(t) \ge 1$ et, par ailleurs, $g(t)$ est indéfiniment dérivable, tout comme $\varphi(t)$. On considère ensuite un « grand paramètre » $\lambda \ge 1$ et l'on étudie les « signaux asymptotiques »

$$f_\lambda(t) = g(t) \exp[i\lambda\varphi(t)]. \tag{10.4}$$

On veut « optimiser » la décomposition de $f_\lambda(t)$ en choisissant la « meilleure base » parmi celles décrites par le théorème 7. *Optimiser la décomposition* signifie la condition suivante. Si H est un espace de Hilbert et si nous disposons d'une collection, indexée par $\alpha \in A$, de bases orthonormées $e_{j,\alpha}$, $j \in J$, de H, on pourra alors, pour un vecteur donné $x \in H$, privilégier la base (c'est-à-dire l'indice α) pour laquelle la décomposition de x est la plus économique possible. Si $\|x\| = 1$, on écrit

$$x = \sum_{j \in J} \xi(j, \alpha) e_{j,\alpha}$$

et l'on a $\sum\limits_{j \in J} |\xi(j,\alpha)|^2 = 1$.

On cherche alors la valeur de α pour laquelle $\sigma(\alpha) = \sum\limits_{j \in J} |\xi(j,\alpha)|$ est minimum. S'il est impossible de calculer explicitement la borne inférieure des $\sigma(\alpha), \alpha \in A$, on déterminera l'indice α_0 pour lequel $\sigma(\alpha_0)$ est de l'ordre de grandeur de ce minimum. Ceci sera clarifié dans la discussion qui suit.

Revenons à (10.4) que nous décomposerons d'abord dans le système trigonométrique, puis dans une base fournie par le théorème 7.

Supposons que le support de $g(t)$ soit inclus dans $[-\pi, \pi]$ et utilisons le système trigonométrique $(2\pi)^{-1/2} e^{ikt}$, $k \in \mathbb{Z}$, pour décomposer $f_\lambda(t)$. Alors $\sigma(\alpha)$ est de l'ordre de grandeur de $\lambda^{1/4}$. En traitement du signal, on sait qu'*un chirps est un signal à bande large, mal comprimé en Fourier.*

Nous utilisons ensuite le théorème 7. Les points de segmentation seront $t_k = hk$ où $h = \lambda^{1/3}$, la fonction $w(t)$ sera ajustée à cette grille (c'est-à-dire sera de la forme $\varphi(t/h)$ où φ est ajustée à $\mathbb{Z}$) et enfin $\varphi_k(t)$ sera le début du développement de Taylor de $\varphi(t)$ en $t = t_k$:

$$\varphi_k(t) = \frac{1}{2}(t - t_k)^2 \varphi''(t_k) + (t - t_k)\varphi'(t_k) + \varphi(t_k).$$

En faisant ces choix, $\sigma(\alpha)$ est de l'ordre de grandeur de $\lambda^{1/6}$ ce qui est la valeur optimale que l'on peut obtenir en utilisant le théorème 7.

Les « atomes temps-fréquence » fournis par le théorème 7 conduisent à une décomposition plus courte des signaux asymptotiques que celle que fournirait le système trigonométrique.

11. Une preuve élémentaire de la dérivabilité en $x_0 = 1$ de la série $\sum_1^\infty n^{-2}\sin(\pi n^{-2}x)$ de Riemann

Selon une tradition orale, Riemann pensait que la fonction continue

$$\sigma(x) = \sum_1^\infty n^{-2}\sin(\pi n^2 x) \tag{11.1}$$

n'est dérivable en aucun point. Dans l'impossibilité de prouver ce résultat, Weierstrass « triche » en remplaçant systématiquement n^2 par 2^n et considère la série $\sum_0^\infty 2^{-n}\sin(2^n x)$ ou, plus commodément $\sum_0^\infty 2^{-n}\sin(3^n x)$. Il est alors facile de démontrer que cette dernière fonction n'est nulle part dérivable.

L'histoire des sciences a donc crédité Weierstrass de cette découverte : il existe des fonctions continues nulle part dérivables. En fait, une première construction avait été obtenue par Bolzano (1781-1848) quarante ans plus tôt ! La construction de Bolzano est bien connue. On part de $f_0(x) = x$ sur l'intervalle $[0,1]$. Ensuite on remplace $f_0(x)$ par $f_1(x) = x$ sur $[0,1/3], f_1(x) = 1-x$ sur $[1/3,2/3]$ et $f_1(x) = 2x-1$ sur $[2/3,1]$. Enfin on itère, sur chacun des segments composant le graphe de f_1, l'opération géométrique transformant le graphe de f_0 en le graphe de f_1.

On obtient de proche en proche une suite $f_n(x)$ de fonctions continues sur $[0,1]$. Ces fonctions $f_n(x)$ convergent uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction continue $f(x)$ qui n'est dérivable en aucun point.

Cette construction inaugure la théorie des fonctions multifractales.

Mais le problème posé par Riemann restait entier. Le premier résultat important a été obtenu par G.H. Hardy en 1916. Hardy démontra que $\sigma(x)$ n'est pas dérivable en x_0 lorsque x_0 est irrationnel. La preuve fournie par Hardy repose sur l'utilisation d'une variante du lemme d'Abel : si $\sigma'(x_0)$ existe, alors la limite quand $y > 0$ tend vers 0 de la fonction de Jacobi $\theta(x_0+iy) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{i\pi n^2(x_0+iy)}$ existe nécessairement. La difficulté posée par cette approche réside dans la réciproque : l'existence de la limite de $\theta(x_0+iy)$ quand $y \to 0^+$ n'entraîne pas nécessairement la dérivabilité, tout comme l'existence de $\lim_{r\uparrow 1}\sum_0^\infty a_n r^n$ n'entraîne la convergence de la série $\sum_0^\infty a_n$. Ces difficultés bien connues sont traitées par ce qu'on appelle des théorèmes taubériens.

Le problème posé par Riemann ne fut résolu qu'en 1970 par un jeune étudiant, J. Gerver. En utilisant d'une façon fort compliquée des méthodes élémentaires, Gerver montra que Riemann avait tort et que $\sigma(x)$ est dérivable en x_0 si et seulement si

$$x_0 = \frac{2p+1}{2q+1} \quad p \in \mathbb{N} \quad q \in \mathbb{N}.$$

La preuve de Gerver a été le point de départ de nombreux travaux. Parmi les plus remarquables, il faut mentionner l'utilisation de l'analyse par ondelettes par M. Holschneider et P. Tchamitchian et la preuve « élémentaire » de S. Itatsu ([8],[9]).

Comme le théorème de Gerver le montre, les points où $\sigma(x)$ est dérivable sont étroitement imbriqués dans un ensemble de points où $\sigma(x)$ est irrégulière. Il devient alors naturel, pour un exposant de Hölder α donné, de s'intéresser à l'ensemble $E(\alpha)$ des points x_0 tels que

$$|\sigma(x) - \sigma(x_0)| \leq C(\alpha, x_0)|x - x_0|^\alpha.$$

S. Jaffard a calculé la dimension de Hausdorff de $E(\alpha)$ et a établi que cette dimension, notée $D(\alpha)$, vaut 0 si $\alpha \leq 1/2$ ou $\alpha \geq 3/4$ et $4(\alpha - 1/2)$ sinon.

Nous nous proposons de donner une nouvelle preuve de la dérivabilité de $\sigma(x)$ en $x_0 = 1$. Cette preuve est intéressante dans la mesure où elle illustre notre démarche fondamentale. A savoir que *certaines décompositions en série sont plus pertinentes que d'autres lorsqu'on désire étudier une propriété donnée.* Dans notre cas, cette propriété est la dérivabilité en un point donné et la décomposition de $\sigma(x)$ en série de Fourier ne donne pas le renseignement désiré. Nous montrerons, en revanche, que $\sigma(x)$ peut être écrite comme une série de « chirps » et que cette décomposition implique, au simple examen des termes, la dérivabilité en $x_0 = 1$.

Voici les détails de cette preuve.

On désigne par P le demi-plan $y > 0$ du plan complexe $\mathbb{C}$ (on a écrit $z = x + iy$). On définit les fonctions holomorphes z^α, $\alpha \in \mathbb{C}$, dans P par

$$z^\alpha = \exp(\alpha \log z) \tag{11.2}$$

où

$$\log z = \log \rho + i\theta, \quad z = \rho e^{i\theta}, \ 0 < \theta < \pi. \tag{11.3}$$

Ensuite on considère les fonctions holomorphes

$$h_\alpha(z) = z^\alpha \exp(-i/z), \quad z \in P. \tag{11.4}$$

On a

$$\frac{d}{dz}(z^{\alpha+2} e^{-i/z}) = iz^\alpha e^{-i/z} + (\alpha + 2) z^{\alpha+1} e^{-i/z} \tag{11.5}$$

ce qui entraîne

$$\frac{d}{dz}(z^{\alpha+2} e^{-i/z} H_\alpha(z)) = z^\alpha e^{-i/z} \tag{11.6}$$

où H_α est holomorphe dans P et admet en 0 un développement asymptotique (non convergent) de la forme $c_0 + c_1 z + \cdots + c_N z^N + 0(|z|^{N+1})$ pour tout N.

Venons-en enfin aux « chirps » que nous utiliserons, à savoir les fonctions $h_{(\alpha,\omega)}(z)$ définies par

$$h_{(\alpha,\omega)}(z) = z^\alpha e^{-i\omega/z}, \quad \omega > 0,\ \alpha \in \mathbb{C},\ z \in P. \tag{11.7}$$

On a alors, avec les notations précédentes,

$$z^\alpha e^{-i\omega/z} = \frac{1}{\omega}\frac{d}{dz}\{z^{\alpha+2} e^{-i\omega/z} H_\alpha(z/\omega)\}. \tag{11.8}$$

On considère ensuite la « version holomorphe » de la fonction de Riemann, à savoir

$$\rho(x) = \sum_1^\infty \frac{e^{i\pi n^2 x}}{i\pi n^2}. \tag{11.9}$$

La partie réelle de ρ est la fonction σ de Riemann. Il nous suffira d'établir que ρ est dérivable en $x_0 = 1$ pour obtenir le même résultat pour $\sigma(x)$.

Au lieu de $\rho(x)$, nous considérons d'abord la fonction holomorphe correspondante, à savoir

$$\rho(z) = \sum_1^\infty \frac{e^{i\pi n^2 z}}{i\pi n^2}, \quad z = x + iy,\ y > 0 \tag{11.10}$$

Nous nous proposons d'établir le lemme suivant :

Lemme 1. *Il existe une constante C telle que, pour $z \in P$, $|z| \leq 1$, on ait*

$$\rho(1+z) = \rho(1) - z/2 + r(z) \tag{11.11}$$

où

$$|r(z)| \leq C|z|^{3/2}. \tag{11.12}$$

Une fois ce lemme établi, on écrit $z = x + iy$ et l'on passe à la limite dans (11.11) en laissant y tendre vers 0. Alors $\rho(1+z)$ converge uniformément vers $\rho(1+x)$, puisque $\sum_1^\infty n^{-2}$ converge. On aura donc

$$\rho(1+x) = \rho(1) - x/2 + 0(|x|^{3/2}) \tag{11.13}$$

ce qui implique la dérivabilité de ρ en $x_0 = 1$.

Le lemme 1 résulte facilement de la décomposition de $\rho(1+z)$ en une série de « chirps ». Pour établir cette décomposition, on part des propriétés bien connues de la fonction $\theta(z)$ de Jacobi. Rappelons ces faits.

On pose

$$\theta(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{i\pi n^2 z}, \quad z = x + iy,\ y > 0. \tag{11.14}$$

On a, grâce à la formule sommatoire de Poisson,

$$\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 y} = \sqrt{\frac{1}{y}} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2/y}, \quad y > 0. \tag{11.15}$$

Cela s'écrit $\theta(iy) = \sqrt{\frac{1}{y}}\theta(i/y)$, $y > 0$, et, par prolongement analytique, on obtient

$$\theta(z) = \sqrt{\frac{i}{z}}\theta(-1/z), \quad z \in P. \tag{11.16}$$

La seconde propriété de la fonction $\theta(z)$ de Jacobi que nous utiliserons est aussi évidente. Il s'agit de

$$\theta(1+z) = \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{i\pi n^2 z} = 2\theta(4z) - \theta(z). \tag{11.17}$$

En combinant ces deux propriétés, il vient

$$\theta(1+z) = \sqrt{\frac{i}{z}}\{\theta(-1/4z) - \theta(-1/z)\} \tag{11.18}$$

ou encore

$$\theta(1+z) = 2\sqrt{\frac{i}{z}}\{A(4z) - A(z)\} \tag{11.19}$$

où $A(z) = \sum_1^\infty \exp(-i\pi n^2/z)$.

Insistons sur le fait que le terme $n = 0$ a disparu dans la différence $A(4z) - A(z)$. Or

$$\rho'(z) = \sum_1^{\infty} e^{i\pi n^2 z} = \frac{1}{2}(\theta(z) - 1).$$

Nous venons donc de développer $\rho'(1+z)$ en la série de « chirps » suivante

$$\rho'(1+z) = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{i}{z}} \sum_1^{\infty} e^{-i\pi n^2/4z} - \sqrt{\frac{i}{z}} \sum_1^{\infty} e^{-i\pi n^2/z}. \tag{11.20}$$

Puisque $-\dfrac{i}{z} = \dfrac{-ix - y}{x^2 + y^2}$, la convergence des séries écrites est triviale si $y \geq \varepsilon > 0$, $|z| \leq R$.

On peut alors intégrer terme à terme en utilisant (11.8) avec $\alpha = -1/2$.

On obtient

$$\rho(1+z) = \rho(1) - z/2 + r(z) \tag{11.21}$$

où $r(z) = r_1(z) - r_2(z)$,

$$r_1(z) = z^{3/2} \sum_1^{\infty} n^{-2} e^{-i\pi n^2/z} H_{(-1/2)}(z/\pi n^2)$$

et où $r_2(z)$ est la série analogue où z est remplacé par $4z$. On observe alors que $|H_{(-1/2)}(z)| \leq C$ si $z \in P$ et $|z| \leq 1$ et ensuite que $|\exp(-i\pi n^2/z)| \leq 1$ pour $z \in P$. Cela entraîne $|r_1(z)| \leq C|z|^{3/2}$ et il en est de même pour $|r_2(z)|$.

Le théorème de Gerver est ainsi démontré.

Comme le souligne J.P. Kahane, B. Riemann avait introduit les « chirps » en donnant un exemple de fonction intégrable, de façon impropre, au sens de Riemann et dont la transformée de Fourier ne tend pas vers 0 à l'infini.

Ce résultat doit être apprécié en observant d'abord que (théorème de Riemann-Lebesgue) la transformée de Fourier d'une fonction intégrable tend vers 0 à l'infini. Par intégrable, on entend ici que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty$.

L'exemple proposé par Riemann est $f(x) = \dfrac{d}{dx}(x^\nu \cos(1/2))$ où $0 < \nu < 1/2$.

Il est donc étonnant que Riemann n'ait pas découvert la preuve élémentaire que nous avons donnée.

12. Espaces fonctionnels de chirps

Les « chirps » utilisés dans la preuve précédente avaient une définition analytique précise, à savoir

$$h_\alpha(t) = t^\alpha \exp(-i/t) \tag{12.1}$$

où α est un nombre complexe arbitraire. On observera que $h_\alpha(t)$ n'est pas localement intégrable si $\text{Ré}\,\alpha \leq -1$. Cependant la distribution $t^\alpha \exp(-i/t)$ a un sens comme trace de la fonction holomorphe $z^\alpha \exp(-i/z)$ où $z = t + i\tau$, $\tau > 0$.

Mais ces « chirps »élémentaires sont beaucoup trop particuliers pour répondre aux besoins des mathématiques et du traitement du signal.

Nous allons présenter une approche où la formulation explicite est remplacée par une description qualitative.

Dans la preuve de la dérivabilité en $x_0 = 1$ de la série de Riemann, la remarque suivante a joué un rôle fondamental. Si $\alpha = -1/2$, $h_\alpha(t) = t^\alpha \exp(-i/t)$ est bien évidemment $O(|t|^{-1/2})$ quand t tend vers 0 alors que

$$\left| \int_0^t h_\alpha(s)ds \right| = O(|t|^{3/2}) \tag{12.2}$$

au lieu du $t^{1/2}$ attendu en introduisant les valeurs absolues à l'intérieur du signe intégral.

C'est cette propriété fondamentale qui nous servira à la définition des chirps par leurs propriétés qualitatives.

Définition 1. *Une fonction $f(t)$ de la variable réelle t est un chirp en 0 si $|f(t)| \leq C_0$ au voisinage de 0 et si les primitives itérées F_n, $n \geq 0$, de f, définies par $F_0(t) = f(t)$ et $F_{n+1}(t) = \int_0^t F_n(s)ds$ vérifient*

$$|F_n(t)| \leq C_n |t|^{2n} \tag{12.3}$$

au voisinage de 0.

Un calcul très simple montre que l'on a alors $f(t) = g(1/t)$ où g, définie sur $|t| > T$, est indéfiniment oscillante. Cela signifie que, restreintes à $[T, +\infty[$, g et toutes ses primitives itérées $G_n(t)$, convenablement normalisées par un choix judicieux de la constante d'intégration, sont bornées :

$$|G_n(t)| \leq C_n, \quad T \leq t < \infty. \tag{12.4}$$

On impose la même propriété sur $]-\infty, -T]$ et les constantes d'intégration peuvent éventuellement différer de celles choisies sur $[T, \infty[$.

Un exemple très simple est $f(t) = \exp(-i/t)$ avec $g(t) = \exp(-it)$ et $G_n(t) = i^n \exp(-it)$.

On observera que si $f(t)$ est un chirp en 0, au sens de la définition 1, alors il en sera de même pour $f_+(t) = f(t)$ si $t > 0$, $f_+(t) = 0$ si $t < 0$. Par ailleurs si $f(t)$ est un chirp en 0, il en sera de même pour $f(-t)$. Ces deux remarques permettent de décomposer un chirp en 0 en la somme $f_+ + f_-$ de deux chirps respectivement portés par $t > 0$ puis par $t < 0$ et finalement de se limiter aux chirps portés par $t > 0$.

Une seconde remarque est l'énoncé suivant

Lemme 2. *Soit $f(t)$ un chirp en 0 (au sens de la définition 1). Alors, pour tout $\alpha > -1$, on a*

$$\int_0^t s^\alpha f(s)ds = t^{\alpha+2} F_\alpha(t) \tag{12.5}$$

où $F_\alpha(t)$ est également un chirp en 0.

Rappelons la définition de l'espace de Hölder $C^r(\mathbb{R})$.

Définition 2. *Si $0 < r < 1$, $g \in C^r(\mathbb{R})$ signifie qu'il existe une constante C telle que l'on ait*

$$|g(t') - g(t)| \leq C|t' - t|^r \tag{12.6}$$

pour tout t et tout t'.

Nous sommes maintenant en mesure de définir l'objet de notre étude. Il s'agit des chirps généralisés, d'intensité α et de régularité $r \in]0, 1[$.

Définition 3. *Supposons $\alpha > -1$ et $r \in]0,1[$. Une fonction $f(t)$ définie sur $]0,\tau[$, $\tau > 0$, est un chirp d'intensité α et de régularité r en 0 si l'on a*

$$f(t) = t^\alpha g(1/t), \quad 0 < t < \tau \tag{12.7}$$

où $g(t)$ est une fonction de classe C^r sur $]T,\infty[$ et où $g(t)$ est indéfiniment oscillante.

On observera que $f(t)$ n'appartient pas à C^r ! Bien évidemment, on peut étendre la définition 3 au cas où f est définie sur $]-\tau,\tau[$, $\tau > 0$. On demande alors que $f_+(t) = |t|^\alpha g_\pm(1/|t|)$ où $g_\pm$ aient les propriétés que nous avons imposées à g.

En fait, l'objet de notre étude est un peu plus général. On souhaite caractériser les fonctions $f(t)$ admettant en 0 un développement limité de la forme

$$f(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n + |t|^\alpha g_\pm(1/t) \tag{12.8}$$

où $n < \alpha < n+1$ et où $g_\pm(x)$ sont deux fonctions ayant les propriétés indiquées ci-dessus.

Un exemple remarquable d'une telle situation est précisément fourni par la fonction $\sigma(x)$ de Riemann. Pour étudier son comportement autour de $x_0 = 1$, on forme $\sigma(1+t)$ et l'on a

$$\sigma(1+t) = \sigma(1) - \frac{t}{2} + |t|^{3/2} g_\pm(1/t) \tag{12.9}$$

où, comme dans la définition 3, les fonctions $g_\pm(x)$ sont indéfiniment oscillantes et de classe $C^{1/2}$.

En d'autres termes, $\sigma(1+t)$ est la somme d'une fonction affine et d'un chirp, ce qui est parfaitement visible sur les agrandissements autour de $t_0 = 1$ du graphe de $\sigma(x)$.

Nous poussons encore un peu plus loin le débat en remplaçant (12.8) par une décomposition

$$f(t) = u(t) + |t|^\alpha g_\pm(1/t) \tag{12.10}$$

où $u(t)$ est indéfiniment dérivable au voisinage de 0 et où $|t|^\alpha g_\pm(1/t)$ est un chirp d'intensité α et de régularité r.

En fait, nous partirons d'une fonction $f(t)$ (ou d'un signal) et chercherons à déterminer (ou détecter) les t_0 réels tels que $f(t_0 + t)$ soit de la forme (12.10).

On dira alors que l'on cherche les chirps « cachés à l'intérieur du graphe de $f(t)$ ».

L'outil dont nous aurons besoin pour cette recherche est l'analyse en « ondelettes temps-échelle » présentée dans la section suivante.

13. Analyse par ondelettes des chirps de régularité r

Nous revenons, une fois de plus, à la question fondamentale : quels atomes temps-fréquence doit-on utiliser pour analyser, de façon pertinente, les chirps de régularité r ?

Plus précisément nous voulons caractériser les fonctions de la forme

$$f(t) = u(t) + v(t) \tag{13.1}$$

où

$$u(t) = t^{\alpha} g(1/t), \ \ \alpha > -1, \tag{13.2}$$

(13.3)
g est de classe C^r et est indéfiniment oscillante sur $[T, \infty[$ et sur $]-\infty, -T]$

(13.4) $v(t)$ est indéfiniment dérivable au voisinage de 0.

De façon surprenante, ces atomes temps-fréquence seront les « ondelettes temps-échelle » dont nous rappelons la définition.

On part d'une fonction $\psi(t)$ appartenant à la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et vérifiant les deux conditions suivantes

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^k \psi(t) dt = 0, \quad k \in \mathbb{N} \tag{13.5}$$

$$\int_0^{\infty} |\widehat{\psi}(\varepsilon\omega)|^2 \frac{d\omega}{\omega} = 1, \quad \varepsilon = 1 \text{ ou } -1. \tag{13.6}$$

On a désigné par $\widehat{\psi}$ la transformée de Fourier de ψ et l'intégrale (13.6) converge parce que $\widehat{\psi}(0) = 0$ et que $\widehat{\psi}$ appartient aussi à la classe $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ de Schwartz.

Les ondelettes $\psi_{(a,b)}$, $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, sont obtenues par dilatation et translations à partir de l'« ondelette mère » $\psi(t)$.

En d'autres termes

$$\psi_{(a,b)}(t) = \frac{1}{a}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right). \tag{13.7}$$

On définit *la transformée en ondelettes d'une fonction (ou d'une distribution tempérée)* $f(t)$ par

$$W(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{\psi}_{(a,b)}(t) dt \tag{13.8}$$

et la convergence de l'intégrale est assurée par la décroissance rapide des ondelettes $\psi_{(a,b)}$. La fonction $W(a,b)$ est définie dans le demi-plan supérieur $z = b + ia$.

En sens inverse, on retrouve $f(t)$ grâce à la formule d'inversion suivante

$$f(t) = \int_0^\infty \left\{ \int W(a,b)\psi_{(a,b)}(t)db \right\} \frac{da}{a}. \tag{13.9}$$

Tout se passe donc comme si les ondelettes $\psi_{(a,b)}$ formaient une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$.

Il existe en fait des choix particuliers de ψ tels que

$$2^{j/2}\psi(2^j t - k), \quad j \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{Z}, \tag{13.10}$$

soit une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$.

Si $f(t)$ est seulement définie sur un voisinage de 0 (disons $[-1,1]$), on la prolonge arbitrairement par 0 en dehors de ce voisinage et l'on peut procéder au calcul de (13.9). Ce calcul sera pertinent lorsque $-1+\eta \leq b \leq 1-\eta$ ($\eta > 0$ est fixé), lorsque a tend vers 0 et lorsque l'on raisonne modulo en terme d'erreur qui est $O(a^N)$ pour tout N.

Pour finir, voici la caractérisation annoncée des « chirps généralisés » définis par (13.1). On suppose encore $r \in]0,1[$.

Théorème 10. *Soit $f(t)$ une fonction définie au voisinage de 0 et soit $W(a,b)$ sa transformée en ondelettes au sens des remarques précédentes. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes*

$$f(t) = u(t) + |t|^\alpha g_\pm(1/t) \tag{A}$$

comme dans (13.1)

(B) la transformée en ondelettes $W(a,b)$ vérifie les trois propriétés suivantes lorsque $0 < a < a_0$ et $|b| < b_0$ ($a_0 > 0$, $b_0 > 0$)

$$|W(a,b)| \leq C|b|^\alpha \left(\frac{a}{b^2}\right)^r \ si\ 0 < a \leq b^2 \tag{B1}$$

$$|W(a,b)| \leq C_N|b|^\alpha \left(\frac{b^2}{a}\right)^N \tag{B2}$$

pour tout entier $N \geq 0$ si $b^2 \leq a \leq |b| < b_0$ et finalement

$$|W(a,b)| \leq C_N a^N \tag{B3}$$

pour tout entier $N \geq 0$ si $a \geq |b|$.

On rappelle que r est la régularité des fonctions $g_\pm$.

Cet énoncé nous apprend à distinguer entre deux régimes.

Dans le premier régime, défini par $0 < a < b^2$, l'ondelette $\psi_{(a,b)}$ « vibre plus fortement » que le chirp $f(t)$. Dans le calcul de $W(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{\psi}_{(a,b)}(t)dt$, $f(t)$ joue le rôle de la fonction régulière et $\psi_{(a,b)}$ celui de la « fonction oscillante ». Une version fractionnaire de la formule d'intégration par parties conduit alors à (B1). Dans le second régime, défini par $b^2 \leq a \leq |b|$, c'est l'inverse qui se produit : « le chirp vibre plus intensément que l'ondelette » et les intégrations par parties successives se font à l'aide des primitives itérées du chirp.

Naturellement le même énoncé reste vrai si l'on utilise une base orthonormée d'ondelettes orthogonales ([5]).

Un groupe de physiciens dirigé par A. Grossmann et B. Torrésani avait, bien avant l'existence du théorème, découvert l'heuristique correspondante. Cette heuristique concerne l'existence d'une « ligne de crête », ligne définie par la condition que pour tout b fixé, $a \to |W(a,b)|$ y atteigne son maximum (ou une valeur ayant le même ordre de grandeur).

Le théorème 8 nous apprend que cette « ligne de crête » est définie par $a = b^2$. Ce type de comportement de $|W(a,b)|$ caractérise les singularités oscillantes.

14. Application à la détection d'ondes gravitationnelles

Citons « La Recherche » (vol. 26, Juin 1995, page 634).

« À des années-lumière de nous, des étoiles meurent et explosent. D'autres tombent sur leur astre-compagnon... D'après la relativité généralisée d'Einstein, ces ébranlements cosmiques font vibrer l'espace-temps. Comment détecter les ondes gravitationnelles ainsi produites ?

Deux projets mis au point pour l'an 2000, LIGO et VIRGO, devraient récompenser une quête engagée voilà plus de trente ans. »

Des calculs théoriques prédisent l'onde gravitationnelle émise par la coalescence de deux étoiles à neutron. Il s'agit d'un signal $s(t)$ de la famille des chirps, dont l'expression analytique est

$$s(t) = (t_0 - t)^{-1/4} \cos[\varphi + \omega(t_0 - t)^{5/8}].$$

Nous avons omis l'amplitude dont l'ordre de grandeur se situe autour de 10^{-22} !

L'appareillage servant à détecter d'éventuelles ondes gravitationnelles est nécessairement agité d'un incessant bruit thermique et le signal $s(t)$ que nous devons détecter est noyé dans ce bruit.

Le débruitage traditionnel consiste à utiliser un filtre « passe-bas »éliminant le « bruit blanc » dont l'énergie est essentiellement concentrée dans les hautes fréquences.

Mais dans notre cas, la « signature » du signal $s(t)$ est l'accélération des vibrations lorsqu'on s'approche de l'instant fatidique t_0 où la coalescence se produit. En tuant le bruit, on tue également le signal.

Suivant un paradigme établi par D. Donoho, il convient de décomposer le signal $s(t)$ dans une base orthonormée adaptée à l'étude des chirps, par exemple dans la base des ondelettes temps-échelle.

Ce choix conduit à l'utilisation de « l'algorithme de Marseille » décrit par le théorème.

B. Torrésani a exploré cette voie mais a montré qu'elle conduisait à une impasse compte tenu d'un rapport signal/bruit très défavorable.

Aujourd'hui B. Torrésani et son équipe s'orientent vers ce que l'on appelle les « méthodes paramétriques » en traitement du signal. On tient alors compte de la structure explicite du signal recherché.

Références

À mon avis, les cinq meilleurs ouvrages sur les ondelettes sont (par ordre alphabétique)

[1] A. Cohen, Wavelets and multiscale signal processing. Appl. Math & Math. Comp. 11, Chapman & Hall ed. (1995).

[2] I. Daubechies, Ten lectures on wavelets, SIAM, Philadelphia (1992).

[3] S. Mallat, A wavelet tour of signal processing, Acad. Press (1988).

[4] M. Wetterli & J. Kovacevic, Wavelets and subband coding, Prentice Hall PTR, Englewood Cliffs, NJ 07632 (1995).

Le lecteur intéressé par les résultats en direction des mathématiques pourra consulter

[5] Y. Meyer, Wavelets and operators, Vol. 1,2 and 3, Cambridge University Press (1992).

Un très bel exposé sur l'échantillonnage, le théorème de Shannon et les problèmes reliés est

[6] H.J. Landau, Sampling, data transmission and the Nyquist rate, Proceedings of the IEEE, vol. 55, n° 10, October 1967.

Ensuite les références concernant la fonction de Riemann sont

[7] J. Gerver, The differentiability of the Riemann's function at certain rational multiples of π. Amer. J. Math., vol. 92 (1970) 33-35 et vol. 93 (1971) 33-41.

[8] M. Holschneider et Ph. Tchamitchian, Pointwise analysis of Riemann's « non differentiable » function. Inventiones Mathematicae 105 (1991) 157-176.

[9] S. Itatsu, Differentiability of Riemann's function. In Proc. Japan Acad. Ser. A. Math. Sci, 57, vol.10 (1981) 492-495.

[10] S. Jaffard, The spectrum of singularities of the Riemann's function. Rev. Math. Iberoamericana 12 (1996) 441-490.

[11] S. Jaffard and Y. Meyer, Wavelets methods for pointwise regularity and local oscillations of functions volume 123, Memoirs of the AMS, Sept. 1996.

Enfin les renseignements historiques concernant la révolution numérique sont extraits de la revue Daedalus, Journal of the American Academy of Arts and Sciences, Winter 1998, « Science in Culture ».

Yves Meyer, École Normale Supérieure de Cachan, 61 avenue du Président Wilson, 94 Cachan cedex