NOTES SUR L'ANALYSE DE FOURIER ET LA THÉORIE DE SHANNON EN TRAITEMENT D'IMAGES

par

Jean-Michel Morel et Saïd Ladjal

Traités recommandés

J.-M. Bony, Cours d'Analyse de l'École Polytechnique, École Polytechnique, 1994 (polycopié).

J.-M. Bony, Cours de Méthodes Mathématiques pour les Sciences Physiques, École Polytechnique, 1997 (polycopié).

C. Gasquet et P. Witomski, Analyse de Fourier et applications, Masson (1995).

S. Mallat, A Wavelet Tour of Signal Processing, Academic Press, (1997) et trad. française à paraître, Diderot Arts et Sciences, (1998).

Y. Meyer, Wavelets, Algorithms and Applications, SIAM (1993), translated and revised by Robert Ryan.

Y. Meyer, Ondelettes et Algorithmes concurrents, Hermann, Paris (1992).

Y. Meyer, cours de DEA ondelettes 1994-1997 (manuscrits).

L. Yaroslavsky, M. Eden, Fundamentals of Digital Optics, Birkhäuser, (1996).

1. Séries de Fourier

On considère l'espace de Hilbert $L^2([-\pi,\pi])$. On va montrer que le système orthonormé

$$\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}(e^{int})_{n\in\mathbb{Z}}$$

est une base hilbertienne de $L^2([-\pi,\pi])$. Cette base s'appelle la base de Fourier. On notera

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx,$$

en sorte que pour toute f dans $L^2([-\pi,\pi])$ on puisse écrire

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx},$$

la série précédente convergeant au sens L^2. Les $c_n(f)$ s'appellent les coefficients de Fourier de f et sont proportionnels aux coordonnées de f dans la base de Fourier.

Pour montrer ce résultat, on va commencer par analyser le comportement des coefficients de Fourier selon la régularité de f.

***Lemme 1.1* (Lemme de Riemann-Lebesgue)**

(i) On pose pour $f \in L^1(\mathbb{R})$,

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\xi x}dx.$$

Si $f \in C_c(\mathbb{R})$ est k fois différentiable et telle que $f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$, alors

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \frac{||f^{(k)}||_{L^1}}{|\xi|^k}.$$

(ii) Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{iax}dx \to 0$ quand $|a| \to \infty$.

(iii) Application aux coefficients de Fourier : si $f \in L^1([-\pi,\pi])$,

$$\lim_{|n|\to\infty} c_n(f) = 0.$$

Démonstration

(i) En intégrant par parties k fois l'intégrale définissant $\widehat{f}$, on obtient pour $\xi \neq 0$,

$$|\widehat{f}(\xi)| = |\frac{1}{(i\xi)^k}\int f^{(k)}(x)e^{-ix\xi}dx| \leq \frac{||f^{(k)}||_{L^1}}{|\xi|^k}.$$

(ii) Soit f_n une suite de fonctions C^∞ et à support compact qui tendent vers f dans L^1fixé assez grand : $||f_n - f||_{L^1} \leq \varepsilon$, ce qui implique $|\widehat{f_n}(\xi) - \widehat{f}(\xi)| \leq \varepsilon$ pour tout ξ. En utilisant (i), on voit que $|\widehat{f_n}(\xi)| \to 0$ quand n est fixé et $|\xi| \to \infty$. Donc $|\widehat{f_n}(\xi)| \leq \varepsilon$ pour ξ assez grand. Finalement,

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq |\widehat{f}(\xi) - \widehat{f_n}(\xi)| + |\widehat{f_n}(\xi)| \leq 2\varepsilon$$

pour ξ assez grand. $\square$

La proposition suivante nous dit que la série de Fourier de f converge vers $f(x)$ en tout point x où f est suffisamment régulière.

Proposition 1.2 **(Principe de localisation).** *Si* $f \in L^1([-\pi,\pi])$ *et si la fonction* $y \mapsto \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$ *est intégrable sur un voisinage de* x, *alors* $\lim_{N\to\infty} s_N f(x) = f(x)$, *où on a noté :* $s_N f(x) := \sum_{|n|\le N} c_n(f)e^{inx}$.

Expliquons pourquoi le résultat précédent s'appelle principe de localisation. Alors que $s_N(f)$ est le résultat d'un calcul intégral sur tout l'intervalle $[-\pi,\pi]$, et donc d'un calcul global, le comportement de $s_N f(x)$ dépend essentiellement des valeurs de f au voisinage de x. Il y a donc « localisation ».

Démonstration

Étape 1. On se ramène au cas $f(x)=0, x=0$. Supposons la proposition démontrée pour $x=0$, $f(x)=0$. Soit maintenant $g \in L^1([-\pi,\pi])$ telle que $\dfrac{g(y)-g(x)}{y-x}$ soit intégrable au voisinage de x. Alors on pose $f(y)=g(x+y)-g(x)$. On a bien $f(0)=0$ et $\dfrac{f(y)}{y} = \dfrac{g(x+y)-g(x)}{y}$ est intégrable au voisinage de 0. Donc, par hypothèse, $s_N f(0) \to f(0)=0$. Mais

$$s_N f(0) = \sum_{|n|\le N} c_n(g(x+y)-g(x)) = \sum_{|n|\le N} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (g(x+y)-g(x))e^{-iny}dy$$

$$= (\sum_{|n|\le N} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(z)e^{-in(z-x)}dz) - g(x) = (\sum_{|n|\le N} \frac{1}{2\pi}e^{inx}\int_{-\pi}^{\pi} g(z)e^{-inz}dz) - g(x)$$

$$= s_N g(x) - g(x).$$

Donc $s_N g(x) \to g(x)$.

Étape 2. On a

$$s_N f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\frac{\sin(N+1/2)y}{\sin y/2}dy. \tag{1}$$

En effet, $\sum_{-N}^{N} e^{iky} = \dfrac{\sin(N+1/2)y}{\sin y/2}$, ce qui se prouve aisément en sommant la suite géométrique.

Étape 3. Par l'étape 1 il suffit de montrer que si $f \in L^1([-\pi,\pi])$ et si $f(y)/y$ est intégrable autour de 0, alors $s_N f(0) \to 0$. Comme sur $[-\pi,\pi]$, $|\sin y/2| \ge |y|/\pi$, on a

$$\left|\frac{f(y)}{\sin y/2}\right| \le \frac{\pi|f(y)|}{|y|} \in L^1([-\pi,\pi]).$$

Donc on peut appliquer le lemme de Riemann-Lebesgue à la fonction $f(y)/\sin y/2$. On conclut que l'intégrale de (1) définissant $s_N f(0)$ tend vers 0 quand N tend vers l'infini. □

Corollaire 1.3. *Le système*

$$\left(\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}e^{ikt}\right)_{k\in\mathbb{Z}}$$

est une base hilbertienne de $L^2([-\pi,\pi])$*. Notant*

$$c_n(f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-inx}f(x)dx,$$

on a donc pour toute f *dans* $L^2([-\pi,\pi])$*,*

$$f(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n(f)e^{inx},$$

la série précédente convergeant au sens L^2*.*

Démonstration. On appelle polynôme trigonométrique toute expression de la forme $P(t)=\sum_{n=-N}^{N}a_ne^{int}$, où les a_k sont des nombres complexes. Pour montrer que le système de Fourier est une base hilbertienne, il nous suffit de montrer que c'est un système total, c'est-à-dire que les polynômes trigonométriques forment un sous-espace vectoriel dense de $L^2([-\pi,\pi])$. Mais le lemme 1.2 (Principe de localisation) nous assure que si f est (e.g.) C^2 et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, alors $s_N(f)(x)\to f(x)$ en tout point. Comme de plus les coefficients de la série de Fourier de f vérifient $|c_n(f)|\le C/n^2$, la série de Fourier est en fait uniformément convergente et donc converge aussi dans $L^2([-\pi,\pi])$ vers f. Or, les fonctions C^2 et 2π-périodiques forment un sous-espace dense de $L^2([-\pi,\pi])$. En effet, les fonctions C^∞ à support compact dans $[-\pi,\pi]$ sont denses dans $L^2([-\pi,\pi])$. On conclut que le système de Fourier est total, et donc une base hilbertienne. □

Corollaire 1.4. *Si* $f\in L^1([-\pi,\pi])$ *est höldérienne d'exposant* $0<\alpha\le 1$ *en* x *(c'est-à-dire* $|f(x)-f(y)|\le C|x-y|^\alpha$*), alors* $s_Nf(x)\to f(x)$*. Cette conclusion s'applique si* f *une fonction qui est la primitive sur* $[-\pi,\pi]$ *d'une fonction de* $L^2([-\pi,\pi])$*.*

Démonstration. L'application du principe de localisation est immédiate : on a

$$\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right|\le|x-y|^{\alpha-1}$$

qui est bien intégrable au voisinage de x. Soit maintenant f une fonction qui est la primitive sur $[-\pi,\pi]$ d'une fonction de $L^2([-\pi,\pi])$. En appliquant l'inégalité de

Cauchy-Schwartz,

$$|f(x) - f(y)| = \left| \int_y^x f'(t)dt \right| \leq |y - x|^{1/2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f'(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

La fonction f est donc hölderienne d'exposant $1/2$ et le principe de localisation s'applique. □

***Remarque 1.5* (importante)**. Le principe de localisation, quand il s'applique, nous assure que les sommes symétriques, $s_n f(x) = \sum_{|n| \leq k} c_k(f) e^{ikx}$ de la série de Fourier convergent vers $f(x)$. Le fait que le système de Fourier soit une base hilbertienne nous en dit plus, et moins. En effet, si $f \in L^2([-\pi, \pi])$, on peut assurer que les sommes *asymétriques*, $s_{m,n} f(x) = \sum_{-m \leq k \leq n} c_k(f) e^{ikx}$ convergent dans L^2 vers f quand $n, m \to +\infty$. Mais, attention : cette convergence n'est pas nécesssairement ponctuelle.

1.1. Convolution des fonctions périodiques et séries de Fourier. La décomposition en série de Fourier d'une fonction $f \in L^2([-\pi, \pi])$ implique qu'on la considère comme une fonction $2\pi-$périodique, puisque la série de Fourier l'est.

Définition et proposition 1.6. *Si $f \in L^1([-\pi, \pi])$ et $g \in L^1([-\pi, \pi])$, on prolonge f et g en des fonctions 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$ et on pose $f * g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(y) g(x - y) dy$. La fonction $f * g$ ainsi définie appartient à $L^1([-\pi, \pi])$ et est 2π-périodique.*

Théorème 1.7. *Si $f, g \in L^2([-\pi, \pi])$, alors $f * g$ est continue et on a l'égalité $c_n(f * g) = 2\pi c_n(f) c_n(g)$. De plus, la série de Fourier de $f * g$ converge uniformément vers $f * g$.*

Démonstration

(i) On a par l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$|(f * g)(t)| \leq \int |f(t - s)| \cdot |g(s)| ds \leq ||f||_{L^2} ||g||_{L^2}.$$

Donc $f * g \in L^2([-\pi, \pi])$ et on a, en appliquant plusieurs fois le théorème de Fubini (les intégrales se font sur $[-\pi, \pi]$ ou, indifféremment, sur n'importe quel intervalle de longueur 2π) :

$$\begin{aligned} c_n(f * g) &= \frac{1}{2\pi} \int \int f(t - s) g(s) e^{-int} ds dt = \frac{1}{2\pi} \int \int f(t - s) e^{-in(t-s)} g(s) e^{-ins} ds dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \Big(\int g(s) e^{-ins} ds \Big) \Big(\int f(u) e^{-inu} du \Big) = 2\pi c_n(f) c_n(g). \end{aligned}$$

Le terme général de la série de Fourier de $f * g$ vérifie

$$|c_n(f * g) e^{inx}| = 2\pi |c_n(f)| \cdot |c_n(g)| \leq 2\pi (|c_n(f)|^2 + |c_n(f)|^2).$$

Cette dernière série est convergente. La série de Fourier de $f*g$ est donc uniformément convergente. Sa limite est donc continue. Remarquer que si $f_n \to f$ dans L^2 et si $f_n \to g$ presque partout, alors $f = g$ presque partout : c'est une conséquence de la réciproque du théorème de Lebesgue. □

***Corollaire 1.8* (Autres bases de Fourier)**

(i) Les fonctions

$$\frac{1}{\sqrt{T}},\ \sqrt{\frac{2}{T}}\cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right),\ \sqrt{\frac{2}{T}}\sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

forment une base hilbertienne de $L^2([0,T])$.

(ii) Il en est de même pour les fonctions $1/\sqrt{T}$, $\sqrt{2}/T\cos(n\pi t/T)$, $n = 1,2,\dots$ La transformée associée à la base en cosinus s'appelle la « transformée en cosinus ».

(iii) Les fonctions $\sqrt{2}/T\sin(n\pi t/T)$, $n = 1,2,\dots$ forment également une base hilbertienne de $L^2([0,T])$ appelée « base en sinus ».

Démonstration

(i) Cette première base résulte de l'application à la base de Fourier de la remarque générale suivante. Si $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne, alors il en est de même du système

$$f_0 = e_0, \dots,\ f_{2n} = \frac{e_n + e_{-n}}{\sqrt{2}},\ f_{2n+1} = \frac{e_n - e_{-n}}{\sqrt{2}}, \dots$$

(ii) Si $f \in L^2([0,T])$, on lui associe la fonction paire $\widetilde{f}$ sur $[-T,T]$ qui coïncide avec f sur $[0,T]$. On décompose $\widetilde{f}$ sur la base de Fourier de $[-T,T]$. La base de Fourier sur $[-T,T]$ est formée des fonctions $\frac{1}{\sqrt{2T}}e^{i\pi nt/T}$. Donc on a

$$\widetilde{f}(x) =_{L^2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2T}\Big(\int_{-T}^{T} \widetilde{f}(t)e^{-i\pi nt/T}dt\Big)e^{i\pi nx/T}.$$

Comme $\widetilde{f}$ est paire, on voit en faisant le changement de variables $t \to -t$ dans les intégrales que les coefficients de $e^{i\pi nt/T}$ et $e^{-i\pi nt/T}$ sont égaux. On remarque aussi que

$$\int_{-T}^{T} \widetilde{f}(t)e^{i\pi nt/T}dt = 2\int_0^T f(t)\cos\left(\frac{\pi nt}{T}\right)dt.$$

Aussi,

$$\widetilde{f}(x) =_{L^2} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\widetilde{f}(t)dt + \sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{2T}\Big(\int_{-T}^{T}\widetilde{f}(t)e^{-i\pi nt/T}\Big)(e^{i\pi nx/T} + e^{i\pi nx/T}),$$

et donc

$$f(x) =_{L^2} \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt + \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2}{T}\Big(\int_0^T f(t)\cos\big(\frac{\pi n t}{T}\big)\Big)\cos\big(\frac{\pi n x}{T}\big).$$

Comme les fonctions $1/\sqrt{T}$, $\sqrt{2/T}\cos(\pi n x/T)$ forment un système orthonormé de $L^2([0,T])$, l'égalité précédente exprime qu'elles forment en fait une base hilbertienne.

(iii) Si on prolonge la fonction f en une fonction impaire sur $[-T,T]$ et que l'on reprend le raisonnement précédent, on trouve la base en sinus. Cette base a la propriété, utile pour modéliser les cordes vibrantes, que ses éléments valent 0 aux extrémités de l'intervalle. □

1.2. Décroissance des coefficients de Fourier et problèmes de compression du signal (sous forme d'exercice corrigé)

(i) On pose

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\xi x}dx.$$

Montrer que si f est k fois différentiable et telle que $f^{(p)} \in L^1$ pour $p \le k$, alors $|\widehat{f}(\xi)| \le C_k/|\xi|^k$, C_k constante à préciser.

(ii) On regardera le comportement des coefficients de Fourier quand la 2π-périodisée de f est C^1, C^2, etc. Montrer que si f est C^1 sur $[0,2\pi]$ mais pas 2π-périodique, alors $c_n(f) = O(1/n)$. Estimer le reste de la série de Fourier (en norme L^2).

(iii) Même calcul pour les coefficients de Fourier $c_{k,l}$ d'une « image », c'est-à-dire une fonction $f(x,y)$ définie sur un carré $[0,2\pi]\times[0,2\pi]$, C^1, mais pas $2\pi\times 2\pi$-périodique.

(iv) Mêmes calculs que dans les deux questions précédentes, mais en considérant les coefficients de f sur la base en cosinus, $c_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos nx f(x)dx$. En déduire pourquoi la technologie actuelle préfère la « transformée en cosinus » pour coder les images de télévision.

Corrigé

(i) En intégrant par parties k fois l'intégrale définissant $\widehat{f}$, on obtient pour $\xi \neq 0$,

$$|\widehat{f}(\xi)| = \left|\frac{1}{(i\xi)^k}\widehat{f^{(k)}}(\xi)\right| \le \frac{||f^{(k)}||_{L^1}}{|\xi|^k}.$$

(ii) Si f est C^p et 2π-périodique, en intégrant par parties p fois sur $[0,2\pi]$,

$$c_n(f) = \int e^{-inx}f(x)dx = \frac{1}{(in)^p}\int e^{-inx}f^{(p)}(x)dx.$$

Donc, les coefficients décroissent d'autant plus vite que f est plus régulière. Si maintenant f présente un saut en 0, nous notons $f(0^+)$ la valeur en 0 par la droite et $f(2\pi^-)$ la valeur en 2π par la gauche. En intégrant par parties une fois,

$$c_n(f) = \frac{1}{in}\int_0^{2\pi} e^{-inx} f'(x)dx + \frac{f(0^+) - f(2\pi^-)}{in}.$$

Par le lemme de Riemann-Lebesgue appliqué à f', le premier terme est $o(1/n)$, ce qui prouve le résultat demandé. On sait que $\sum_{n\geq N} 1/n^2 = O(1/n)$. Donc la convergence de la série de Fourier vers f pour la norme L^2 est en $O(1/n)$, et donc très lente : 1000 termes pour une précision de 10^{-3}.

(iii) On obtient $c_{n,m} = O(1/nm)$ et le reste (pour la norme L^2) de la série double est donc en $O(1/nm)$. Donc, pour une précision de 10^3, il faut encore 1000 termes.

(iv) On a en intégrant par parties et en remarquant que $\sin nx$ s'annule en 0 et 2π,

$$c_n(f) = \frac{1}{i\pi n}\int_0^{2\pi} \sin nx f'(x)dx.$$

Donc, par le lemme de Riemann-Lebesgue, $c_n(f) = o(1/n)$. Les coefficients de Fourier « en cosinus » décroissent donc plus vite qu'avec la transformée de Fourier classique et on peut donc en transmettre moins pour une qualité d'image égale. Pour transmettre une image, on la découpe en petits carrés et on transmet une partie des coefficients de Fourier de chaque imagette. On augmente ainsi la probabilité qu'une imagette présente une couleur homogène et soit donc régulière. L'utilisation de la tranformée en cosinus permet donc de comprimer l'information dans les sous-carrés de l'image où celle-ci est régulière. Par contre, les calculs précédents prouvent qu'on ne gagne rien quand un « bord » est présent dans l'imagette. En effet, (on pourra expliciter le calcul pour une image blanche au dessus de la diagonale et noire en dessous), un calcul du même type qu'au (5) implique que les coefficients décroissent en $O(1/nm)$. C'est ce qui explique les phénomènes de « halo » autour des objets sur un fond contrasté : le petit nombre de coefficients transmis ne suffit pas à approcher bien l'imagette. Il y a une autre raison à cela : comme nous verrons plus bas dans l'exercice sur le phénomène de Gibbs, les bords présentent toujours des oscillations résiduelles, quelque soit le nombre de coefficients transmis. □

1.3. Phénomène de Gibbs (sous forme d'exercice corrigé). Ce phénomène est observé à la sortie de tout système physique ou numérique mesurant ou calculant une fonction f. Si la fonction $f(t)$ (t désignant par exemple le temps) « saute » brusquement d'une valeur à une autre, alors l'expérimentateur observe une série d'oscillations avant et après le saut. Il se gardera bien de les interpréter comme faisant partie du signal. En effet, le phénomène est dû au fait que les appareils de mesure (et les programmes numériques sur ordinateur) « tronquent » nécessairement les hautes fréquences. Cela veut aussi dire que l'on n'observe jamais les fonctions elles mêmes, mais des sommes partielles de leur série de Fourier. Et on observe donc aussi les « parasites » dûs à cette troncature en fréquence ; en particulier, le phénomène de Gibbs. Du point de vue mathématique, on peut énoncer le phénomène comme suit :

« Si une fonction f, par ailleurs régulière, présente un saut en un point, alors les sommes partielles $s_N f$ de sa série de Fourier accentuent ce saut en le multipliant par un facteur qui ne dépend pas de N. »

En fait, l'accentuation du saut n'est qu'une partie du phénomène et nous allons voir comment calculer le détail des oscillations.

(i) Démontrer la formule

$$\frac{1}{2}+\sum_{1}^{n}\cos(kx)-\frac{1}{2}\cos(nx)=\frac{\sin(nx)}{2\operatorname{tg} x/2}.$$

(ii) On considère la fonction « en dents de scie » $s(x)$, 2π-périodique et telle que $s(x)=(\pi-x)/2$ sur $[0,2\pi[$. Tracer $s(x)$, montrer que

$$s(x)\text{''} = \text{''}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(kx)}{k}.$$

En quels sens cette relation est-elle vraie ? (Utiliser les résultats des exercices précédents). Dans la suite, on considère les sommes partielles de cette série de Fourier, $s_n(x) := \sum_{k=1}^{n}\dfrac{\sin(kx)}{k}$.

(iii) Montrer la relation

$$s_n(x)-\int_0^x\frac{\sin(nt)}{t}dt=\int_0^x\left(\sin(nt)\big(\frac{\operatorname{cotg}(t/2)}{2}-\frac{1}{t}\big)+\frac{\cos(nt)}{2}\right)-\frac{x}{2}.$$

En déduire que pour $|x|\leq 1$ et uniformément en x,

$$s_n(x)=\int_0^x\frac{\sin(nt)}{t}dt-\frac{x}{2}+O(x,1/n).$$

(iv) Étudier les variations de la fonction $G(a) := \displaystyle\int_0^a\frac{\sin(t)}{t}dt$ et en déduire que $G(\pi)>G(+\infty)$. Indications numériques que vous pouvez retrouver sur une calculette :

$$G(\pi)=1,851,\ G(2\pi)=1,428,\ \frac{\pi}{2}=1,57.$$

(v) Comment se comporte la suite $s_n(\pi/n)$ quand $n \to \infty$? On rappelle que $G(+\infty) = \pi/2$. En déduire que

$$\limsup_{n\to\infty,\, x\to 0^+} s_n(x) = (1+c)s(0^+); \qquad \liminf_{n\to\infty,\, x\to 0^+} s_n(x) = (1-c')s(0^+).$$

Estimer les constantes (positives) c et c'. Tracer sur un même graphe les fonctions $s_n(x)$ pour n grand et $s(x)$ en utilisant la formule

$$s_n(x) = G(nx) - G(\infty) + s(x) + O(1/n).$$

(vi) Généraliser au cas d'une fonction C^1 sur $[0, 2\pi]$, mais pas 2π périodique. (Soustraire à la fonction une fonction en « dents de scie », de manière à la rendre lipschitzienne, et appliquer à la différence le principe de localisation).

Corrigé

(i)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} + \sum_1^n \cos nx &= \frac{1}{2}\sum_{-n}^{n} e^{ikx} = \frac{1}{2}e^{-inx}\left(\frac{e^{(2n+1)ix}-1}{e^{ix}-1}\right)\\ &= \frac{1}{2}\frac{e^{ix(n+1/2)} - e^{-ix(n+1/2)}}{e^{ix/2}-e^{-ix/2}} = \frac{\sin nx \cos x/2 + \sin x/2 \cos nx}{2\sin x/2}\\ &= \frac{1}{2}\frac{\sin nx}{\operatorname{tg} x/2} + \frac{\cos nx}{2}.\end{aligned}$$

(ii) Comme $s \in L^2([0, 2\pi])$, on a $s(x) = \sum_k c_k(s)e^{ikx}$, la convergence se vérifiant au sens de L^2 et, en vertu du principe de localisation, en tout point de l'intervalle ouvert $]0, 2\pi[$. On calcule les coefficients de Fourier $c_k(s)$.

$$c_k(s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\pi - x}{2}\right)e^{-ikx}dx = -\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} xe^{-ikx}dx = \frac{1}{2ik}$$

si $k \neq 0$, en intégrant par parties. D'où

$$s(x) = \sum_{k\neq 0}\frac{e^{ikx}}{2ik} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}.$$

(iii) Cette relation s'obtient en intégrant la relation du (i) entre 0 et x et en soustrayant des deux cotés $\frac{x}{2} + \int_0^x \frac{\sin nt}{t}dt$. On remarque que la fonction $\frac{\cos t/2}{2\sin t/2} - \frac{1}{t}$

est C^1. En effet, en développant au voisinage de 0,

$$\begin{aligned}\frac{\cos t/2}{2\sin t/2}-\frac{1}{t}&=\frac{t\cos t/2-2\sin t/2}{2t\sin t/2}\\&=\frac{t(1-\frac{t^2}{8})-2(\frac{t}{2}-\frac{t^3}{48})+o(t^3)}{t^2-\frac{t^4}{24}+o(t^4)}=\frac{t^3(-\frac{1}{8}+\frac{1}{24})+o(t^3)}{t^2-\frac{t^4}{24}+o(t^4)}\\&=-\frac{t}{12}+o(t).\end{aligned}$$

On peut donc intégrer par parties $\int_0^x (\sin(nt)\big(\frac{\operatorname{cotg}(t/2)}{2}-\frac{1}{t})+\frac{\cos(nt)}{2})$, et cette expression est donc majorée par C/n pour une constante C adéquate.

(iv) La fonction $G(a)$ est croissante sur les intervalles pairs $[2k\pi,(2k+1)\pi]$ et décroissante sur les intervalles impairs. On voit aisément que $|G((n+1)\pi)-G(n\pi)|$ est une suite décroissante. Il en résulte que la suite $G(2n\pi)$ est une suite croissante strictement, la suite $G((2n+1)\pi)$ une suite strictement décroissante, et les deux convergent vers une valeur commune notée $G(+\infty)$. On a donc $G(\pi)>G(+\infty)$.

(v) On a

$$\begin{aligned}s_n(\pi/n)&=\int_0^{\frac{\pi}{n}}\frac{\sin nt}{t}dt-\frac{\pi}{2n}+O(\frac{1}{n})=\int_0^{\pi}\frac{\sin u}{u}du\\&=G(\pi)>G(+\infty)=\frac{\pi}{2}=s(0^+),\end{aligned}$$

car $s(0^+)=\pi/2=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}du$. Donc pour tout n, il y a une valeur très proche de 0, en l'occurrence π/n, telle que la somme partielle de la série de Fourier dépasse d'un facteur constant $G(\pi)/G(+\infty)$ la valeur de la limite $s(0^+)$. Pour raisons de symétrie, la même chose se produit en 0^- avec la suite $s_n(-\pi/n)$. On remarquera l'existence d'oscillations plus amorties un peu plus loin de 0, elles aussi prédictibles et observables :

$$s_n(\frac{\pi}{2n})=G(2\pi)+O(\frac{1}{n})<G(+\infty)=s(0^+),$$

etc.

(vi) Généralisation au cas d'une fonction f, C^1 sur $[0,2\pi]$, mais pas 2π périodique : on soustrait à la fonction f une fonction en « dents de scie » $\lambda s+\mu=\widetilde{s}$, où λ et μ ont été choisis de manière à la rendre lipschitzienne et on applique à la différence $f-\widetilde{s}$ le principe de localisation. Il y a donc convergence uniforme de la série de Fourier de $f-\widetilde{s}$ vers $f-\widetilde{s}$, alors que la série de Fourier de $\widetilde{s}$ présente le phénomène de Gibbs. Le développement de Fourier de f présente donc aussi le phénomène de Gibbs. □

2. Transformées de Fourier bidimensionnelles

2.1. Base de Fourier sur un carré. Dans ce chapitre, on va d'abord généraliser les séries de Fourier à des fonctions définies sur le carré $[0, 2\pi]^2$, puis à des fonctions périodiques sur un réseau de $\mathbb{R}^2$. Tous les énoncés se généralisent sans changement de démonstration à la dimension N. Nous traitons le cas $N = 2$ pour éviter des indices de sommation inutiles. On pose $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2$ et on note $k \cdot x = k_1x_1 + k_2x_2$ leur produit scalaire.

Lemme 2.1. *Les fonctions séparables, c'est-à-dire de la forme $w(x) = u(x_1)v(x_2)$ avec $u, v \in L^2([0, 2\pi])$, forment un système total de $L^2([0, 2\pi]^2)$.*

Démonstration. Les fonctions caractéristiques de rectangles sont séparables et elles forment un système total de $L^2([0, 2\pi]^2)$. □

Théorème 2.2. *Les fonctions $e_k(x) = \frac{1}{2\pi}e^{ik\cdot x}$, $k \in \mathbb{Z}^2$, forment une base hilbertienne de $L^2([0, 2\pi]^2)$ et on a donc pour toute fonction $u \in L^2([0, 2\pi]^2)$,*

$$u = \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} c_k(u)e^{ik\cdot x}, \text{ avec } c_k(u) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{[0,2\pi]^2} u(x)e^{-ik\cdot x}dx, \tag{2}$$

la convergence de la série ayant lieu au sens de L^2.

Démonstration. On vérifie facilement que e_k est un système orthonormé. Pour montrer qu'il est total, il suffit de montrer, par le lemme 2.1, que les e_k engendrent les fonctions séparables. Mais si $w(x) = u(x_1)v(x_2) \in L^2([0, 2\pi]^2)$ est une telle fonction, par une application directe du théorème de Fubini, $u(x_1)$ et $v(x_2)$ sont dans $L^2([0, 2\pi])$. Les fonctions u et v sont donc sommes au sens L^2 de leurs séries de Fourier :

$$u(x_1) = \sum_{k_1\in\mathbb{Z}} c_{k_1}e^{ik_1x_1}, \ \ c_{k_1} = \frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi]} u(x_1)e^{-ik_1x_1};$$

$$v(x_2) = \sum_{k_2\in\mathbb{Z}} c_{k_2}e^{ik_2x_2}, \ \ c_{k_2} = \frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi]} v(x_1)e^{-ik_2x_2};$$

En multipliant simplement les relations précédentes, on obtient une série double convergente dans $L^2([0, 2\pi]^2)$, ce qui donne (2) dans le cas d'une fonction séparable $w(x) = u(x_1)v(x_2)$ avec $c_k(w) = c_{k_1}(u)c_{k_2}(v)$. Il en résulte que le système $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}^2}$ est une base hilbertienne de $L^2([0, 2\pi]^2)$ et (2) est donc valide. □

2.2. Base de Fourier sur un réseau.

Définition 2.3. *Un sous-ensemble Γ de $\mathbb{R}^3$ est appelé un* réseau *s'il existe une base (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$ telle que les éléments de Γ soient exactement les vecteurs dont les composantes dans cette base sont entières : $\gamma = x_1e_1 + x_2e_2,\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$. On dit alors que (e_1, e_2) est une base du réseau Γ. On dit qu'une fonction f définie dans $\mathbb{R}^2$ est Γ-périodique si on a $f(x + \gamma) = f(x)$ pour tout γ dans Γ.*

Remarque 2.4. Tout changement de base

$$\widetilde{e}_1 = ae_1 + be_2,\ \widetilde{e}_2 = ce_1 + de_2 \ \text{ vérifiant } |ad - bc| = 1,\ a, b, c, d \in \mathbb{Z} \tag{3}$$

est licite et nous donne une nouvelle base du réseau. Réciproquement, si $(\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2) \in \Gamma$ est une autre base du réseau, on est assuré de l'existence de $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ vérifiant (3), car la matrice de changement de base doit être inversible et d'inverse à coefficients entiers, ce qui impose que son déterminant vaille $+1$ ou -1.

Définition et proposition 2.5. *On considère l'ensemble $\Gamma^\star$ des $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout $\gamma \in \Gamma$, on ait*

$$k \cdot \gamma \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

Alors $\Gamma^\star$ est un réseau, appelé réseau réciproque de Γ, et dont une base peut être définie de la manière suivante : si (e_1, e_2) est une base de Γ, on appelle base réciproque de (e_1, e_2) l'unique système $(e_1^\star, e_2^\star)$ vérifiant

$$e_i \cdot e_j^\star = 2\pi\delta_{ij}. \tag{4}$$

Alors $(e_1^\star, e_2^\star)$ engendre $\Gamma^\star$.

Démonstration. Si $k \in \mathbb{R}^2$ appartient à $\Gamma^\star$, on note (k_1, k_2) ses composantes dans la base réciproque $(e_1^\star, e_2^\star)$ d'une base (e_1, e_2) de Γ. On a, en utilisant les relations de réciprocité (4), $(k, e_1) = 2\pi k_1$ et $(k, e_2) = 2\pi k_2$ et comme k est dans $\Gamma^\star$, on en déduit que $k_1 \in \mathbb{Z}$, $k_2 \in \mathbb{Z}$. Réciproquement, si k est dans le réseau engendré par $(e_1^\star, e_2^\star)$, on a $k = k_1e_1^\star + k_2e_2^\star$. Si $\gamma = x_1e_1 + x_2e_2 \in \Gamma$, on a par les relations de réciprocité (4),

$$k \cdot \gamma = 2\pi k_1x_1 + 2\pi k_2x_2 \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

□

Corollaire 2.6. *Soit Γ un réseau de $\mathbb{R}^2$ et $\Gamma^\star$ son réseau réciproque. Alors la fonction de deux variables $x \to e^{ik\cdot x}$ est Γ-périodique si et seulement si $k \in \Gamma^\star$.*

Démonstration. Comme $e^{ik\cdot(x+\gamma)} = e^{ik\cdot x}e^{ik\cdot\gamma}$, la Γ-périodicité équivaut à $e^{ik\cdot\gamma} = 1$ pour tout $\gamma \in \Gamma$, soit $k \cdot \gamma \in 2\pi\mathbb{Z}$, et donc à $k \in \Gamma^\star$. □

***Définition 2.7* (mailles d'un réseau)**. *Soit Γ un réseau et (e_j) une base de celui-ci. On appelle* maille *de Γ pour la base (e_j) un parallépipède*

$$M = \left\{ \sum_{j=1,2} x_j e_j,\ a_j \le x_j < a_j + 1 \right\}, \tag{5}$$

où les a_j appartiennent à $\mathbb{R}$. Lorsque γ parcourt Γ, les translatés $M+\gamma$ de la maille M sont deux à deux disjoints et recouvrent $\mathbb{R}^2$.

Théorème 2.8. *Soient M et M' deux mailles d'un réseau Γ, relatives à deux bases (e_1, e_2) et (e'_1, e'_2). Alors, pour toute fonction localement sommable et Γ-périodique, les intégrales de f sur M et M' sont égales. En particulier, M et M' ont la même surface.*

Démonstration. Le second énoncé découle du premier en prenant $f = 1$. Considérons les ensembles $A_\gamma = M' \cap (M + \gamma)$. L'ensemble M' étant borné, l'ensemble $\Gamma_0 \subset \Gamma$ constitué des γ tels que $A_\gamma \neq \varnothing$ est fini. Les A_γ sont disjoints et recouvrent M'. Notons B_γ le translaté $A_\gamma - \gamma$. Les B_γ sont contenus dans M. Montrons qu'ils sont disjoints : si on avait $x \in B_\gamma \cap B_{\gamma'}$, on aurait dans une même maille M' deux points $x+\gamma$ et $x+\gamma'$ dont la différence est un vecteur du réseau ; cela est interdit par (5). Montrons que la réunion des B_γ est M : si x appartient à M, il appartient aussi, comme tout point de $\mathbb{R}^2$, à un certain translaté M'_{γ_0} de la maille M' par un élément du réseau ; cela signifie que $x + \gamma_0 \in A_{\gamma_0}$ et donc que $x \in B_{\gamma_0}$. En conclusion, nous

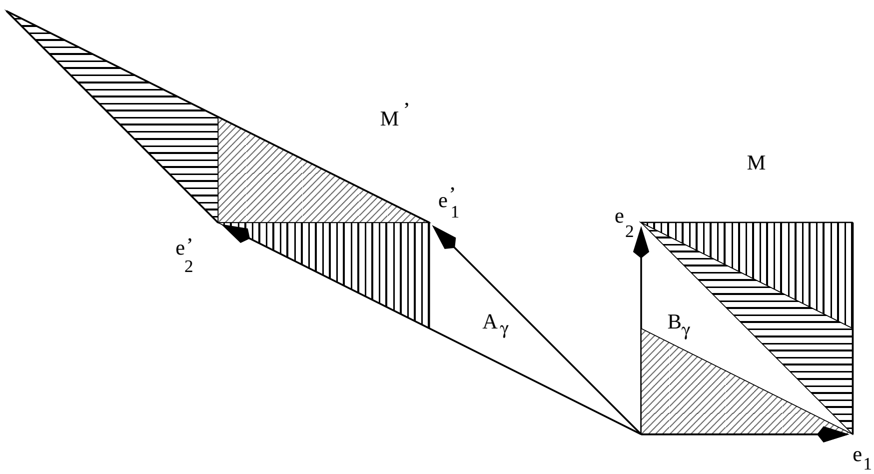


FIGURE 1

avons écrit M' comme réunion disjointe d'un nombre fini d'ensembles A_γ, $\gamma \in B_{\gamma_0}$

et M comme réunion disjointe des translatés $B_\gamma = A_\gamma - \gamma$. On a donc, pour f localement sommable et Γ-périodique,

$$\int_{M'} f(x)dx = \sum_{\gamma\in\Gamma_{\gamma_0}} \int_{A_\gamma} f(x)dx = \sum_{\gamma\in\Gamma_{\gamma_0}} \int_{B_\gamma} f(y+\gamma)dy$$
$$= \sum_{\gamma\in\Gamma_{\gamma_0}} \int_{B_\gamma} f(y)dy = \int_M f(y)dy.$$

□

Corollaire 2.9. *On appelle plus généralement* cellule *de Γ un sous-ensemble borné D de $\mathbb{R}^2$ tel que les translatés $D+\gamma, \gamma \in \Gamma$, soient deux à deux disjoints et recouvrent $\mathbb{R}^2$. Alors l'intégrale sur D d'une fonction f localement sommable et Γ-périodique ne dépend pas de D et est égale l'intégrale de f sur une maille du réseau.*

Démonstration. Il suffit de reprendre la démonstration précédente en remplaçant M par D. □

Théorème 2.10. *Notons L^2_Γ l'espace des fonctions localement de carré sommable et Γ-périodiques muni du produit scalaire*

$$(f,g) = \frac{1}{S}\int_M \overline{f(x)}g(x)dx,$$

où M est une cellule quelconque du réseau et S sa surface. Alors L^2_Γ est un espace de Hilbert, et les fonctions $x \to e^{ik\cdot x}$, $k \in \Gamma^\star$ en constituent une base hilbertienne. Toute fonction $f \in L^2_\gamma$ peut donc se décomposer d'une manière unique sous la forme

$$f = \sum_{k\in\Gamma^\star} c_k(f)e^{ik\cdot x}, \text{ avec } c_k(f) = \frac{1}{S}\int_M e^{-ik\cdot x}f(x)dx.$$

Démonstration. L'espace L^2_Γ est isométrique à $L^2(M)$ et est donc un espace de Hilbert. Soit (e_1, e_2) une base du réseau Γ et choisissons la maille

$$M = \{x_1e_1 + x_2e_2,\ 0 \le x_1, x_2 \le 1\}.$$

On considère l'isomorphisme I de $L^2(M)$ dans $L^2([0,1]^2)$ défini par $If(x_1,x_2) = f(x_1e_1+x_2e_2)$. Comme toute fonction de $L^2([0,1]^2)$ est décomposable en série double de Fourier (théorème 2.2), on peut écrire

$$If(x_1,x_2) = \sum_{k_1,k_2\in\mathbb{Z}} c_{k_1k_2}e^{2i\pi(k_1x_1+k_2x_2)}.$$

Posons $x = x_1e_1 + x_2e_2$; on a donc

$$f(x) = \sum_{k_1,k_2\in\mathbb{Z}} c_{k_1k_2}e^{2i\pi(k_1x_1+k_2x_2)}.$$

En utilisant la définition de la base duale $(e_1^\star, e_2^\star)$, on a

$$e_1^\star \cdot x = 2\pi x_1, \quad e_2^\star \cdot x = 2\pi x_2 \quad \text{et} \quad k = k_1 e_1^\star + k_2 e_2^\star \in \Gamma^\star.$$

Donc

$$f(x) = \sum_{k_1, k_2 \in \mathbb{Z}} c_{k_1 k_2} e^{i(k_1 e_1^\star + k_2 e_2^\star)\cdot x} = \sum_{k \in \Gamma^\star} c_k(f) e^{ik\cdot x}.$$

De plus (théorème 2.2),

$$c_k(f) = c_{k_1 k_2} = \int_{[0,1]^2} f(x_1 e_1 + x_2 e_2) e^{-2i\pi(k_1 x_1 + k_2 x_2)} dx_1 dx_2.$$

On fait le changement de variable $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$, qui applique $[0,1]^2$ sur M et dont le jacobien est le rapport des aires, c'est-à-dire S. Donc, pour tout $k \in \Gamma^\star$,

$$c_k(f) = \int_S f(x) e^{-ik\cdot x} \frac{dx}{S}.$$

□

On note L^1_Γ l'ensemble des fonctions Γ-périodiques et localement intégrables.

Définition et proposition 2.11. *Soit Γ un réseau de $\mathbb{R}^2$, D une cellule du réseau et u, v deux fonctions de L^1_Γ. On définit la convolée Γ-périodique de u et v par*

$$u * v(x) = \int_D u(x-y)v(y)dy. \tag{6}$$

Alors $u * v$ ne dépend pas du choix de la cellule D et appartient aussi à L^1_Γ.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du corollaire 2.9. □

Proposition 2.12. *La convolution Γ-périodique jouit des propriétés de la convolution sur $\mathbb{R}^2$: commutativité, associativité. Si $f, g \in L^2_\Gamma$, alors leur convolée est continue et Γ-périodique et on a*

$$\forall\, k \in \Gamma^\star, \;\; c_k(f * g) = S c_k(f) c_k(g). \tag{7}$$

Démonstration. Les démonstrations sont strictement les mêmes qu'en dimension 1 grâce au théorème 2.10 et au corollaire 2.9. □

3. Mémento de théorie des Distributions

3.1. Définition des distributions. On note $\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$ l'ensemble des fonctions C^∞ à support compact dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. Ces fonctions sont aussi appelées « fonctions test ». Si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$, on notera $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N$ et $\partial^\alpha u$ la dérivée partielle

$$\partial^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_N^{\alpha_N}}.$$

On dira qu'une suite φ_n de $\mathcal{D}(\Omega)$ tend vers $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ si

- il existe pour n assez grand un compact K de Ω tel que $\mathrm{Supp}(\varphi_n - \varphi) \subset K$,
- $\lim_{n\to\infty} \partial^\alpha \varphi_n = \partial^\alpha \varphi$ uniformément sur K pour tout multi-indice α.

On appelle espace des distributions, $\mathcal{D}'(\Omega)$ le dual de $\mathcal{D}(\Omega)$. Chaque distribution est donc une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$ continue pour la notion de convergence introduite ci-dessus. On note $\langle u, \varphi\rangle = u(\varphi)$. En d'autres termes,

Définition 3.1. *Une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$ est une distribution si et seulement si pour tout compact K de Ω il existe un entier p et une constante C tels que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ à support dans K on ait*

$$|\langle u, \varphi\rangle| \leq C \sup_{\substack{x\in K\\ |\alpha|\leq p}} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

Lorsque l'entier p peut être choisi indépendamment de K, on dit que la distribution est d'ordre fini, et la plus petite valeur de p possible est appelée l'ordre de u.

On munit $\mathcal{D}'(\Omega)$ de la topologie de la convergence simple, c'est-à-dire que u_n tend vers u si et seulement si $\langle u_n, \varphi\rangle \to \langle u, \varphi\rangle$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. On admettra le théorème suivant, qui est une conséquence du théorème de Banach-Steinhaus :

Si une suite de distributions u_n est telle que $\langle u_n, \varphi\rangle$ converge pour tout φ dans $\mathcal{D}(\Omega)$, alors u_n tend vers une distribution u telle que $\langle u, \varphi\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle u_n, \varphi\rangle$.

3.2. Exemples de distributions

Fonctions de L^1_{loc}. À $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ on associe $\widetilde{f}$ définie par $\langle \widetilde{f}, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx$.

- Alors $\widetilde{f}$ est une distribution.
- Si une suite de fonctions converge dans L^1_{loc}, elle converge aussi au sens des distributions.

Masse de Dirac. La « masse de Dirac » définie par $\langle \delta_{x_0}, \varphi\rangle = \varphi(x_0)$ est une distribution qui ne peut se mettre sous la forme $\widetilde{f}$ avec $f \in L^1_{loc}$.

Mesures de Radon. On appelle *mesure de Radon positive* toute forme linéaire positive sur $\mathcal{D}(\Omega)$.

- Une mesure de Radon positive est une distribution d'ordre 0 sur Ω.
- On appelle mesure de Radon toute différence de mesures de Radon positives.
- *Exemple.* Si F est une fonction croissante définie sur $\mathbb{R}$, sa dérivée au sens des distributions est une mesure de Radon positive (voir plus bas la définition de dérivée au sens des distributions).
- *Peignes de Dirac.* Soit Γ un réseau régulier de $\mathbb{R}^N$. On pose $\Delta_\Gamma = \sum_{\gamma\in\Gamma} \delta_\gamma$. C'est une mesure de Radon sur $\mathbb{R}^N$.

3.3. Opérations sur les distributions

Translatée d'une distribution. On pose $\langle \tau_h u, \varphi\rangle := \langle u, \tau_{-h}\varphi\rangle$, où $\tau_h\varphi(x) = \varphi(x-h)$. C'est une distribution si u en est une.

Dilatée d'une distribution. On appelle si f est une fonction et $\lambda > 0$, sa dilatée de λ : $f_\lambda(x) = f(x/\lambda)$. Si u est une distribution sur $\mathbb{R}^N$, on définit sa dilatée par $\langle u_\lambda, \varphi\rangle = |\lambda|^N \langle u, \varphi_{1/\lambda}\rangle$

Multiplication par une fonction C^∞. On pose, si $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$,

$$\langle fu, \varphi\rangle = \langle u, f\varphi\rangle .$$

C'est une distribution.

- On vérifie facilement que $f\delta_a = f(a)\delta_a$, et plus généralement,

$$f\Delta_\Gamma = \sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma)\delta_\gamma.$$

Conjuguée complexe. On pose $\langle \overline{u}, \varphi\rangle = \overline{\langle u, \overline{\varphi}\rangle}$.

On a toujours le droit de dériver une distribution. Si u est une distribution, $\partial^\alpha u$, définie par $\langle \partial^\alpha u, \varphi\rangle = (-1)^\alpha \langle u, \partial^\alpha \varphi\rangle$ est aussi une distribution.

- Alors l'ordre de $\partial^\alpha u$ est inférieur ou égal à l'ordre de u, s'il existe, augmenté de $|\alpha|$.
- Cette définition de la dérivée coïncide avec la définition classique quand u est une fonction C^1. On a donc toujours le droit de dériver une distribution !
- Si une suite de distributions converge ses dérivées convergent aussi.
- Inversement, si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ est localement intégrable et F une primitive de f, alors $F' = f$, la dérivée étant entendue au sens des distributions.

On appelle *fonction de Heaviside* $H(x) = 1$ si $x \geq 1$, 0 sinon. Alors H est une distribution et $H' = \delta_0$.

Dérivée de la masse de Dirac. On a $x\delta' = -\delta$.

Discrétisation de la dérivation. Si $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, sa dérivée est la limite, pour $h \to 0$, des distributions $h^{-1}(\tau_{-h}u - u)$.

3.4. Distributions à support compact

Définition 3.2*. Soit $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ une distribution. On considère le plus grand ouvert ω tel que la restriction de u aux fonctions test à support dans ω soit nulle. Le complémentaire de cet ouvert est appelé le support de u et noté* $\mathrm{Supp}(u)$.

On note $\mathcal{E}'(\Omega)$ l'espace des distributions dans Ω à support compact et il est facile de déduire de la définition des distributions que toute distribution à support compact est d'ordre fini. On peut alors étendre la dualité C_0^∞-$\mathcal{D}'$ en une dualité C^∞-$\mathcal{E}'$, car on voit aisément que si $\varphi \in C^\infty$ et $\theta \in C_0^\infty$ est une fonction égale à 1 sur un voisinage de $\mathrm{Supp}(u)$, alors $\langle u, \theta\varphi\rangle$ ne dépend pas de θ. On peut donc définir $\langle u, \varphi\rangle = \langle u, \theta\varphi\rangle$.

3.5. Distributions tempérées. On dit que φ est dans la classe de Schwartz, $\mathcal{S}$, et on note $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, si $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ et si pour tout n et tous multi-indices α et β, on a $|x|^\beta \partial^\alpha \varphi(x) \to 0$ quand $|x| \to +\infty$. On exprime aussi ces relations en disant que φ et toutes ses dérivées sont « à décroissance rapide ». Il est équivalent de dire que les quantités

$$\mathcal{N}_p(\varphi) = \sum_{\substack{|\alpha|\leq p \\ |\beta|\leq p}} ||x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)||_{L^\infty}$$

sont finies pour tout p.

(Notation : $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ et $\partial^\beta = \dfrac{\partial^{\beta_1+\cdots+\beta_n}}{\partial x_1^{\beta_1} \cdots \partial x_n^{\beta_n}}$).

On appelle *distribution tempérée* toute forme linéaire continue sur $\mathcal{S}$. Si u est une distribution tempérée, on note $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. D'une manière équivalente, u est une distribution tempérée s'il existe des constantes C_p pour $p \in \mathbb{N}$ telles que

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{S},\ |\langle u, \varphi\rangle| \leq C\mathcal{N}_p(\varphi). \tag{8}$$

On dit qu'une suite u_n d'éléments de $\mathcal{S}'$ converge vers $u \in \mathcal{S}'$ si $\langle u_n, \varphi\rangle \to \langle u, \varphi\rangle$ quand $n \to \infty$. D'après le théorème de Banach-Steinhaus, si $\langle u_n, \varphi\rangle$ converge pour tout $\varphi \in \mathcal{S}$, alors il existe u dans $\mathcal{S}'$ telle que $u_n \to u$.

On peut interpréter $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ comme le dual de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, l'inégalité précédente exprimant que u est continue par rapport à chacune des seminormes $\mathcal{N}_p$ définies sur $\mathcal{S}$.

3.5.1. *Propriétés des distributions tempérées, exemples (sous forme d'exercices)*

(1) Un contrexemple : démontrer que pour tout $\varphi \in C_0^\infty$ et pour tout entier p, il existe une constante C telle que $\mathcal{N}_p(\tau_a\varphi) \leq C(1+|a|^p)$. En déduire que la fonction e^x n'appartient pas à $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

(2) Peignes de Dirac dans $\mathcal{S}'$: démontrer que $u = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k\delta_k$ appartient à $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ si et seulement si la suite a_k est à croissance lente, *i.e.* $\exists\, C$, $\exists\, N$, $|a_k| \leq C(1+|k|^N)$.

(3) Généralisation : à quelle condition a-t-on $\sum a_k\delta_k^{(n_k)} \in \mathcal{S}'$?

(4) Soit $(a_k) \in \mathbb{R}$. Démontrer que $a_k\delta_k \to 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ mais que la convergence ne se vérifie dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ que si (a_k) est à croissance lente.

(5) Montrer que la fonction $x \to e^x(\cos(e^x) + i\sin(e^x))$ appartient à $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Pour cela, on calculera une primitive. Comparer avec le résultat du (1).

(6) Démontrer que si une fonction est « à croissance lente », *i.e.* il existe $k > 0$ et C tels que $|f(x)| \leq C(1+|x|^k)$, alors f est une distribution tempérée.

(7) Démontrer que toute fonction de L^1, de L^p, $p \geq 1$ est une distribution tempérée, ainsi que toute distribution à support compact.

(8) Démontrer que si $f_n(x)$ est une suite de fonctions qui tend simplement vers $f(x)$ et s'il existe C et p tels que $f_n(x) \leq C(1+|x|)^p$, alors $f_n \to f$ dans $\mathcal{S}'$.

Définition 3.3. *On dit qu'une fonction f est dans $\mathcal{O}(\mathbb{R}^N)$ si elle est à croissance lente ainsi que toutes ses dérivées, c'est-à-dire :*

$$\forall\,\alpha,\ \exists\, C,\ \exists\, m \quad |\partial^\alpha f(x)| \leq C(1+|x|)^m.$$

Démontrer que si $f \in \mathcal{O}$, alors pour tout $\varphi \in \mathcal{S}$, $f\varphi \in \mathcal{S}$; pour tout $u \in \mathcal{S}'$, $fu \in \mathcal{S}'$. Si de plus $u_n \to u$ dans $\mathcal{S}'$, alors $fu_n \to fu$ dans $\mathcal{S}'$.

3.6. Transformée de Fourier

Définition 3.4. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Par $f(x) \leftrightarrow \widehat{f}(\xi)$, ou par $\widehat{f}(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi)$ on entend que $\widehat{f}(\xi)$ est la transformée de Fourier de $f(x)$:*

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^N} f(x)e^{-ix\cdot\xi}dx.$$

Alors $\widehat{f}(\xi)$ est une fonction continue tendant vers 0 à l'infini.

3.6.1. *Transformée de Fourier des fonctions de $\mathcal{S}$ (par l'exercice).* Nous allons montrer toutes les propriétés formelles de la transformée de Fourier sur un espace de fonctions très régulières, de manière à ne jamais nous préoccuper des questions de sommabilité, dérivation sous le signe somme, etc. On rappelle que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, si

$f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ et si pour tout n et tous multi-indices α, β on a $|x|^\beta \partial^\alpha f(x) \to 0$ quand $|x| \to +\infty$. Il est équivalent de dire que pour tout p les seminormes

$$\mathcal{N}(f) = \sum_{|\alpha| \leq p,\ |\beta| \leq p} ||x^\alpha \partial^\beta f(x)||_{L^\infty}$$

sont finies pour tout entier naturel p.

Théorème 3.5. *Si $f \in \mathcal{S}$, alors $\widehat{f} \in \mathcal{S}$.*

Exemple canonique : la gaussienne, qui est un « point fixe » pour la transformée de Fourier.

Démonstration. On remarque que si f est dans $\mathcal{S}$, elle appartient à L^1 et il en est de même pour toutes ses dérivées et pour le produit de f par n'importe quel polynôme. Les transformées de Fourier de toutes ces fonctions sont donc continues et tendent vers zéro à l'infini. En utilisant la relation

$$\partial^\alpha \widehat{f} = \mathcal{F}((-ix)^\alpha f(x)), \tag{9}$$

obtenue en appliquant le théorème de dérivation sous le signe somme, on en déduit que $\widehat{f}$ est C^∞. Pour montrer que $\widehat{f}$ est à décroissance rapide, on intègre par parties $|\alpha|$ fois l'intégrale définissant $\widehat{f}$ et on obtient

$$\widehat{\partial^\alpha f}(\xi) = (i\xi)^\alpha \widehat{f}(\xi). \tag{10}$$

Comme $\widehat{f}$ et $\widehat{\partial^\alpha f}$ sont continues et bornées, on en déduit que $|\widehat{f}(\xi)| \leq C/1 + |\xi|^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et donc que $\widehat{f}$ est à décroissance rapide. Faut-il recommencer le raisonnement pour les dérivées successives de $\widehat{f}$? Certainement pas : on utilise le fait que les dérivées de $\widehat{f}$ sont les transformées de Fourier des fonctions $(-ix)^\alpha f(x)$ qui sont elles-mêmes à décroissance rapide. Le résultat que nous avons montré pour $\widehat{f}$ s'applique donc à toutes ses dérivées. □

Corollaire 3.6. *Il existe des constantes C'_p telles que*

$$\mathcal{N}_p(\widehat{f}) \leq C'_p \mathcal{N}_{p+N+1}(f). \tag{11}$$

Démonstration. On vérifie que si $|\alpha| \leq p$, $|\beta| \leq p$, alors

$$\left\| \Big(1 + \sum_{i=1,\ldots,N} x_i^{N+1}\Big) x^\alpha \partial^\beta f(x) \right\|_{L^\infty} \leq \mathcal{N}_{p+N+1}(f)$$

et qu'en conséquence

$$||x^\alpha \partial^\beta f(x)||_{L^1} \leq \mathcal{N}_{p+N+1}(f) \int \frac{1}{1 + \sum_{i=1,\ldots,N} |x_i|^{N+1}}\, dx \tag{12}$$

qui est une intégrale finie.

• On déduit alors des formules (10) et (9) que

$$\mathcal{F}(\partial^\alpha(x^\beta f))(\xi) = (i)^{\alpha+\beta}\xi^\alpha\partial^\beta\widehat{f}(\xi). \tag{13}$$

Cette formule magnifique, qui résume tout, est très facile à retenir.

• On conclut qu'il existe une constante C'_p telle que

$$\mathcal{N}_p(\widehat{f}) \le \sum_{|\alpha\le p,\ |\beta|\le p} ||\partial^\alpha(x^\beta f)||_{L^1} \le C'_p \sum_{|\alpha\le p,\ |\beta|\le p} ||x^{\alpha'}\partial^{\beta'} f||_{L^1}. \tag{14}$$

(Utiliser l'estimation (12)). □

Proposition 3.7 **(Transformée de Fourier de la gaussienne)**
La gaussienne $g(x) = e^{-a|x|^2}$ appartient à $\mathcal{S}$ et $e^{-a|x|^2} \leftrightarrow (\pi/a)^{n/2}e^{-|\xi|^2/4a}$.

Démonstration. On commence par poser, en dimension 1, $g(\xi) = \int e^{-ix\xi}e^{-x^2}dx$ et on montre que $2g'(\xi) + \xi g(\xi) = 0$, de sorte que $g(\xi) = \sqrt{\pi}e^{-\xi^2/4}$. On rappelle que $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$, ce qui se démontre facilement en prenant le carré de cette intégrale, le considérant par Fubini comme une intégrale sur $\mathbb{R}^2$ que l'on calcule en coordonnées polaires. Pour passer en dimension n, il suffit de remarquer que la gaussienne est séparable, *i.e.* $e^{-|x|^2} = e^{-x_1^2}e^{-x_2^2}\cdots e^{-x_n^2}$, de sorte que son intégrale de Fourier est également séparable. On applique alors n fois la formule en dimension 1. □

Dans la suite on notera

$$\overline{\mathcal{F}}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi.$$

Cette notation est commode pour exprimer la formule d'inversion de Fourier.

Proposition 3.8 **(Formule d'inversion de Fourier)**. *Si f est dans la classe de Schwartz, alors*

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^N}\int_{\mathbb{R}^N} \widehat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi.$$

En d'autres termes,

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^N}\mathcal{F}(\widehat{f}(-\xi))(x),$$

ou bien

$$f = \frac{1}{(2\pi)^N}\overline{\mathcal{F}}(\widehat{f}),$$

c'est-à-dire encore

$$\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F} = (2\pi)^N Id.$$

Démonstration. Pour prouver la formule d'inversion précédente, on pose

$$f_a(x) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int e^{-a|\xi|^2} \widehat{f}(\xi) e^{ix\cdot\xi} d\xi.$$

On remarque que par le théorème de Lebesgue, $f_a(x)$ tend vers

$$\frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{f}(\xi) e^{ix\cdot\xi} d\xi = \frac{1}{(2\pi)^N} \mathcal{F}(\widehat{f}(-\xi))(x).$$

Il suffit donc pour conclure de montrer que $f_a(x) \to f(x)$ simplement quand $a \to 0$.

On a

$$f_a(x) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int e^{-a|\xi|^2} \Big(\int f(y) e^{-iy\cdot\xi} dy \Big) d\xi.$$

On utilise le théorème de Fubini et la formule donnant la transformée de Fourier de la gaussienne pour obtenir :

$$f_a(x) = \int f(y) \frac{e^{-|y|^2/4a}}{(4\pi a)^{N/2}} dy.$$

La gaussienne sous l'intégrale précédente est d'intégrale 1 et tend vers la masse de Dirac quand $a \to 0$. On déduit que $f_a(x) \to f(x)$, ce qui achève la démonstration. $\square$

***Proposition 3.9* (Transformée de Fourier et convolution).** *Si f et g appartiennent à $L^1(\mathbb{R}^N)$, alors la convolée $f * g$ aussi et on a*

$$\mathcal{F}(f * g) = \widehat{f}\widehat{g}.$$

Démonstration. C'est une application directe du théorème de Fubini. $\square$

***Proposition 3.10* (Formule de Parseval)**

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g}(x) dx = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}}(\xi) d\xi.$$

Démonstration. En appliquant la proposition 3.9, on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x-y) dy = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi) e^{ix\xi} d\xi,$$

puis par de faciles ajustements, la formule de Parseval. $\square$

***Corollaire 3.11* (Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^n)$).** *Grâce à la Formule de Parseval, qui exprime que la transformée de Fourier conserve la norme L^2, la transformée de Fourier peut-être prolongée de manière unique de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ à $L^2(\mathbb{R}^n)$ et elle est donc un isomorphisme de L^2.*

4. Transformée de Fourier des distributions tempérées

On définit la transformée de Fourier $\widehat{u}$ d'une distribution tempérée u par

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N), \quad \langle \widehat{u}, \varphi \rangle = \langle u, \widehat{\varphi} \rangle\,.$$

Théorème 4.1. *Si u est une distribution tempérée, alors $\widehat{u}$ est une distribution tempérée.*

Démonstration. On rappelle (11) que si $f \in \mathcal{S}$, on a

$$\mathcal{N}_p(\widehat{f}) \leq C'_p \mathcal{N}_{p+N+1}(f). \tag{15}$$

Donc pour tout φ dans $\mathcal{S}$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, on obtient en utilisant la définition des distributions tempérées (8) et (11)

$$|\, \langle \widehat{u}, \varphi \rangle \,| = |\, \langle u, \widehat{\varphi} \rangle \,| \leq C_p \mathcal{N}_p(\widehat{\varphi}) \leq C_p C'_p \mathcal{N}_{p+N+1}(\varphi),$$

ce qui prouve que $\widehat{u}$ est une distribution tempérée. ☐

4.1. Formulaire sur la transformée de Fourier dans la classe de Schwartz

- Gaussienne : $\mathcal{F}(e^{-a|x|^2}) = (\pi/a)^{N/2} e^{-|\xi|^2/4a}$.
- Séparation des variables : $\mathcal{F}(f_1(x_1) \cdots f_N(x_N)) = \widehat{f_1}(\xi_1) \cdots \widehat{f_N}(\xi_N)$.
- Convolution-produit : $f * g \leftrightarrow \widehat{f}\widehat{g}$.
- produit-convolution : $f.g \leftrightarrow (2\pi)^{-N} \widehat{f} * \widehat{g}$.
- Formule d'inversion : $\overline{\mathcal{F}}(\widehat{f}) = (2\pi)^N f$, soit aussi
$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^N} \mathcal{F}(\widehat{f}(-\xi))(x).$$
- Si f est réelle et paire, $\widehat{f}(\xi)$ est réelle et $\widehat{f}(\xi) = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\cos(\xi x)dx$.
- Si f est réelle et impaire, $\widehat{f}(\xi)$ est imaginaire et $\widehat{f}(\xi) = -2i\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\sin(\xi x)dx$.
- Conjuguées : $\overline{f}(x) \leftrightarrow \overline{\widehat{f}}(-\xi)$
- Changement d'échelle : $f(ax) \leftrightarrow \frac{1}{|a|^N}\widehat{f}(\xi/a)$. Autre forme :
$$\mathcal{F}(f(ax))(\xi) = \frac{1}{a^N}\widehat{f}(\xi/a).$$
- « Shift » : $f(x-a) \leftrightarrow e^{-ia\xi}\widehat{f}(\xi)$, $e^{iax}f(x) \leftrightarrow \widehat{f}(\xi - a)$.
- « Modulation » : $f(x)\cos(\xi_0 x) \leftrightarrow \dfrac{1}{2}\Big(\widehat{f}(\xi+\xi_0) + \widehat{f}(\xi-\xi_0)\Big)$.
- Dérivées : $(-ix)^n f(x) \leftrightarrow \widehat{f}^{(n)}(\xi)$, $f^{(n)}(x) \leftrightarrow (i\xi)^n \widehat{f}(\xi)$.
- Théorème des moments : on appelle « moment d'ordre n » de f la quantité $m_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x)dx$. Alors $\widehat{f}^{(n)}(0) = (-i)^n m_n$.

– *Régularité et décroissance à l'infini* : Si f est à support compact, $\widehat{f}$ est C^∞.
– Le « sinus cardinal » :

$$(16) \qquad (N=1) \qquad \mathbf{1}_{[-T/2,T/2]} \leftrightarrow 2\frac{\sin T\xi}{\xi}.$$

***Proposition 4.2* (Principe d'incertitude).** *Soit f une fonction telle que f, xf et $\xi\widehat{f}$ soient dans $L^2(\mathbb{R})$. On note*

$$\sigma_f^2 = \int x^2|f(x)|^2dx \quad \textit{(dispersion d'énergie en temps)}$$
$$\sigma_{\widehat{f}}^2 = \int \xi^2|\widehat{f}(\xi)|^2d\xi \quad \textit{(dispersion d'énergie en fréquence)}$$
$$E_f = \int |f(x)|^2dx \quad \textit{(énergie de } f\textit{)}.$$

Alors

$$\sigma_f\sigma_{\widehat{f}} \geq \frac{E_f}{4\pi}.$$

Une version moins précise, mais qualitativement importante du principe d'incertitude est la suivante :

Proposition 4.3. *Il n'existe pas de fonction $f \neq 0$ dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ telle que $\widehat{f}$ et f soient simultanément à support compact.*

Démonstration. Si par exemple f est à support compact, on pose pour $\xi \in \mathbb{R}^N$ fixé et pour $z \in \mathbb{C}$,

$$g(z) = \int_K e^{-iz\xi\cdot x}f(x)dx.$$

On vérifie aisément que g est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$: on peut dériver sous le signe somme, puisque K est compact. Si $z \in \mathbb{R}$, on a $g(z) = \widehat{f}(z\xi)$. Si $\widehat{f}$ a un support compact, $g(z)$ est identiquement nulle sur un intervalle de $\mathbb{R}$. Mais ceci implique par le principe du prolongement analytique que $g(z)$ est identiquement nulle. Donc $\widehat{f}(\xi) = g(1) = 0$ et donc $\widehat{f}$ est identiquement nulle. $\square$

4.2. Formulaire sur la tranformée de Fourier des distributions tempérées

Sauf mention contraire, u et v désignent dans la suite des distributions tempérées. Si $u \in \mathcal{S}$ et $\varphi \in S$, $\langle \widehat{u}, \varphi \rangle = \langle u, \widehat{\varphi} \rangle$.

$$\widehat{1} = (2\pi)^N \delta \qquad \widehat{\delta} = 1$$
$$\mathcal{F}(e^{ia\cdot x}) = (2\pi)^N \delta_a \qquad \mathcal{F}(\delta_a) = e^{-ia\cdot\xi}$$
$$\mathcal{F}(\partial^\alpha \delta) = i^{|\alpha|}\xi^\alpha \qquad \mathcal{F}(x^\alpha) = (2\pi)^N i^{|\alpha|}\partial^\alpha \delta$$

$$\mathcal{F}(\tau_a u) = e^{-ia\cdot\xi}\mathcal{F}(u) \qquad \mathcal{F}(e^{ia\cdot x}u) = \tau_a \widehat{u}$$
$$\mathcal{F}(u(x/\lambda))(\xi) = |\lambda|^N \widehat{u}(\xi) \qquad \overline{\mathcal{F}}(\widehat{u}) = (2\pi)^N f$$
$$\mathcal{F}(\partial^\alpha u) = i^{|\alpha|}\xi^\alpha \widehat{u} \qquad \mathcal{F}(x^\alpha u) = i^{|\alpha|}\partial^\alpha(\widehat{u}).$$

Si $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$, alors $\widehat{u} \in \mathcal{O}_M$ (espace des fonctions C^∞ à croissance lente ainsi que toutes leurs dérivées.)

4.3. Convolution des distributions

Théorème et définition 4.4. *Soient $u \in \mathcal{E}'$ et $\varphi \in C_0^\infty$. Leur produit de convolution est défini en chaque point par*

$$(u * \varphi)(x) = \langle u(y), \varphi(x-y) \rangle .$$

La fonction $u * \varphi$ appartient à C_0^∞ et on a

$$\partial^\alpha(u * \varphi) = u * (\partial^\alpha \varphi) = (\partial^\alpha u) * \varphi,$$

$$\mathrm{Supp}(u * \varphi) \subset \mathrm{Supp}(u) + \mathrm{Supp}(v).$$

De plus, si $\psi \in C_0^\infty$, on a

$$(u * \varphi) * \psi = u * (\varphi * \psi).$$

On a des résultats analogues si $u \in \mathcal{S}'$ et $\varphi \in \mathcal{S}$.

Cette définition de la convolution s'étend successivement par des prolongements continus de la convolution ou par dualité aux cas où

- $u \in \mathcal{D}'$ et $\varphi \in C^\infty$, à condition que l'une des deux soit à support compact (plus généralement, si les supports sont convolutifs).
- u et v sont dans $\mathcal{E}'$. Alors $u * v$ est dans $\mathcal{E}'$ et on a $\mathrm{Supp}(u * \varphi) \subset \mathrm{Supp}(u) + \mathrm{Supp}(v)$.
- u et v sont dans $\mathcal{D}'$ et leurs supports sont convolutifs (par exemple, l'un des supports est compact). On a alors $u * v = v * u$.

Enfin, diverses extensions du produit de convolution sont possibles grâce au résultat de prolongement par continuité suivant :

Proposition 4.5. *Soit $u \in \mathcal{E}'$ et $v \in \mathcal{D}'$. Si u_n tend vers u et v_n tend vers v au sens des distributions et si le support des u_j est contenu dans un compact fixe, alors*

$$\lim_{n \to +\infty} u_n * v_n = u * v.$$

L'interaction entre transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'$ et convolution dans $\mathcal{S}'$ généralise le cadre fonctionnel, comme le montrent les deux propriétés d'échange de la convolution et de la multiplication qui suivent.

Proposition 4.6. *Si $u \in \mathcal{E}'$ et $v \in \mathcal{S}'$, alors $u * v \in \mathcal{S}'$ et $\widehat{u} \in \mathcal{O}_M$ et de plus*

$$\mathcal{F}(u * v) = \mathcal{F}(u)\mathcal{F}(v).$$

Proposition 4.7. *Si $u \in \mathcal{S}'$ et $\varphi \in \mathcal{O}_M$ est telle que $\widehat{\varphi} \in \mathcal{E}'$, alors*

$$\mathcal{F}(\varphi u) = (2\pi)^{-N} \widehat{\varphi} * \widehat{u}.$$

5. Distributions périodiques sur un réseau et leurs séries de Fourier

***Définition 5.1* (Rappel)**. *Si $\gamma \in \mathbb{R}^2$, on note $\tau_\gamma u$ et on appelle γ-translatée de u la fonction $\tau_\gamma u(x) = u(x - \gamma)$. Si u est une distribution sur $\mathbb{R}^2$, on pose pour toute fonction test $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$,*

$$\langle \tau_\gamma u, \varphi \rangle = \langle u, \tau_{-\gamma} \varphi \rangle .$$

Remarque 5.2. Cette définition est compatible avec celle de la translatée d'une fonction quand u est une fonction de L^1_{loc}, car alors

$$\int u(x - \gamma)\varphi(x)dx = \int u(y)\varphi(y + \gamma)dy.$$

Définition 5.3. *On se donne un réseau Γ de $\mathbb{R}^2$. On dit qu'une distribution u est Γ-périodique si ses translatées $\tau_\gamma u$ sont égales à u pour tout γ dans Γ.*

Commençons par définir et étudier comme premier exemple les périodisées de fonctions de la classe de Schwartz. On remarque qu'une telle périodisée $\sum_{\gamma \in \Gamma} \varphi(x+\gamma)$ est C^∞ et Γ-périodique.

5.1. Fonctions périodiques, périodisation

Proposition 5.4. *Soit f une fonction Γ-périodique et de classe C^∞. Alors la suite de ses coefficients de Fourier sur le réseau $k \in \Gamma^\star$, $c_k(f) = \frac{1}{S}\int_M f(x)e^{ik\cdot x}dx$ est à décroissance rapide, c'est-à-dire que l'on a*

$$|c_k(f)| \leq C_N(1+|k|)^{-N} \tag{17}$$

pour tout N et la différence

$$f - \sum_{k\in\Gamma^\star,\ |k|\leq n} c_k(f)e^{ik\cdot x}$$

tend vers 0 uniformément ainsi que chacune de ses dérivées lorsque n tend vers $+\infty$.

Démonstration. On peut exprimer les coefficients de Fourier $c_k(f)$ sur une maille M, c'est-à-dire le parallélogramme engendré par une base du réseau (e_1, e_2). On pose alors $x = x_1e_1 + x_2e_2$, ce qui définit un isomorphisme affine $h(x_2, x_2) = x_1e_1 + x_2e_2$ de $[0,1]^2$ sur la maille M. On a évidemment $\det(h) = S$. On pose de même $k = k_1e_1^\star + k_2e_2^\star$ où k_1 et k_2 sont les coordonnées de k sur la base duale $(e_1^\star, e_2^\star)$. Cela donne $k \cdot x = 2\pi(k_1x_1 + k_2x_2)$. On a donc

$$c_k(f) = \frac{1}{S}\int_M f(x)e^{-ik\cdot x}dx = \int_0^1\int_0^1 f(x_1e_1+x_2e_2)e^{-2i\pi(k_1x_1+k_2x_2)}dx_1dx_2. \tag{18}$$

La fonction $(x_1, x_2) \mapsto f(x_1e_1 + x_2e_2)$ est évidemment $\mathbb{Z}^2$-périodique. En intégrant (18) par parties $2N$ fois par rapport à x_1 et en utilisant la $(1,0)$ périodicité de l'intégrand, on obtient une estimation de la forme $|c_k(f)| \leq C'_N(1+|k_1|)^{-2N}$. On a de même en intégrant par parties par rapport à la deuxième variable x_2, $|c_k(f)| \leq C''_N(1+|k_2|)^{-2N}$. En multipliant ces deux estimations, on déduit aisément une relation du type (17). Grâce à cette estimation, la série double $\sum_k c_k(f)e^{ik\cdot x}$ et toutes ses dérivées terme à terme sont uniformément convergentes. On peut donc intervertir sommation et dérivation. □

Les fonctions test φ dont la périodisée est égale à 1 vont nous être particulièrement utiles.

***Définition et proposition 5.5* (partition périodique de l'unité).** *Il existe $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ telle que*

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} \chi(x+\gamma) = 1. \tag{19}$$

On dit que χ définit une partition Γ-périodique de l'unité.

Démonstration. Soit M une maille du réseau Γ. Il suffit de prendre $\phi \in C_0^\infty$ positive ou nulle partout et strictement positive sur $\overline{M}$, puis de poser

$$\chi(x) = \frac{\phi(x)}{\sum_{\gamma\in\Gamma} \varphi(x+\gamma)}.$$

Comme le support de φ est compact, la somme au dénominateur est une somme finie pour chaque x. □

Lemme 5.6. *Soit $\varphi \in C_0^\infty$ une fonction test et $\widetilde{\varphi}(x) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \varphi(x)$ sa Γ-périodisée. Alors le développement en série de Fourier de $\widetilde{\varphi}$ peut s'écrire sous la forme*

$$\widetilde{\varphi}(x) = \sum_{k\in\Gamma^\star} c_k(\widetilde{\varphi}) e^{ik\cdot x} \text{ avec } c_k(\widetilde{\varphi}) = \frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x) e^{-ik\cdot x} dx. \tag{20}$$

Démonstration. Les coefficients de Fourier de $\widetilde{\varphi}$ sont

$$\begin{aligned} c_k(\widetilde{\varphi}) &= \frac{1}{S}\int_M \widetilde{\varphi}(x) e^{-ik\cdot x} dx = \frac{1}{S}\int_M \sum_{\gamma\in\Gamma} \varphi(x+\gamma) e^{-ik\cdot(x+\gamma)} dx \\ &= \frac{1}{S}\sum_{\gamma\in\Gamma}\int_{M+\gamma} \varphi(x) e^{-ik\cdot x} dx = \frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x) e^{-ik\cdot x} dx. \end{aligned}$$

□

Corollaire 5.7. *Soit $\Gamma^\star$ un réseau de $\mathbb{R}^2$, dual d'un réseau Γ. Alors pour tout $k_0 \in \Gamma^\star$, il existe une fonction $\varphi \in C_0^\infty$ telle que*

$$\forall\, k \in \Gamma^\star,\ \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x) e^{ik\cdot x} dx = \delta_{k,k_0}. \tag{21}$$

Démonstration. Il suffit de prendre $\varphi(x) = \chi(x) e^{-ik_0\cdot x}$, où $\chi(x)$ définit une partition de l'unité. On a alors $\widetilde{\varphi}(x) = e^{-ik_0\cdot x}$. On applique à $\widetilde{\varphi}$ le lemme 5.6. Par unicité des coefficients de Fourier de $\widetilde{\varphi}$, on obtient (21). □

Soit u une distribution Γ-périodique. Il serait logique de définir ses coefficients en série de Fourier en « restreignant » u à une maille M du réseau. Mais une telle restriction pose problème, comme le montre l'exemple du peigne de Dirac $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n$. Pour contourner la difficulté, on considère une fonction test χ définissant une partition de l'unité Γ-périodique. On peut alors écrire

$$u = \sum_{\gamma\in\Gamma} \chi(x-\gamma) u,$$

ce qui prouve immédiatement que u est la périodisée d'une distribution à support compact,

$$u = \sum_{\gamma \in \Gamma} \tau_\gamma(\chi u). \tag{22}$$

5.2. Caractérisation des distributions périodiques par leur série de Fourier

Nous allons maintenant examiner la possibilité de définir les distributions Γ-périodiques comme sommes de séries de Fourier.

Proposition 5.8. *Soit $(c_k)_{k\in\Gamma^\star}$ une suite indexée par un réseau $\Gamma^\star$ et à croissance lente, c'est-à-dire vérifiant pour au moins une valeur de $M \in \mathbb{N}$ une inégalité du type*

$$\forall\, k \in \Gamma^\star,\ |c_k| \leq C(1+|k|)^M.$$

Alors la série

$$\sum_{k\in\Gamma^\star} c_k e^{ik\cdot x} \tag{23}$$

converge au sens des distributions et définit une distribution Γ-périodique.

Démonstration. La convergence au sens des distributions de la série $\sum_{k\in\Gamma^\star} c_k e^{ik\cdot x}$ équivaut à la convergence de la série numérique $\sum_{k\in\Gamma^\star} c_k \left\langle e^{ik\cdot x}, \varphi\right\rangle$ pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. En utilisant le même changement de variable que dans la preuve de la Définition-proposition 5.4, on a

$$\left\langle e^{ik\cdot x}, \varphi\right\rangle = S\int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x_1e_1 + x_2e_2)e^{2i\pi(k_1x_1+k_2x_2)}dx_1dx_2.$$

En intégrant m fois par parties et en tenant compte du fait que φ est à support compact, on obtient donc

$$|\left\langle e^{ik\cdot x}, \varphi\right\rangle| \leq \frac{C'_m}{(1+|k|)^m}$$

pour tout $m \in \mathbb{N}$. En choisissant (e.g.) $m = M+4$, on obtient donc

$$\sum_{k\in\Gamma^\star} |c_k \left\langle e^{ik\cdot x}, \varphi\right\rangle| \leq CC'_{M+4}\sum_{k\in\Gamma^\star}\frac{1+|k|^M}{1+|k|^{M+4}}.$$

Cette série double est convergente car elle est majorée par une série double séparable du type $C\sum_{k_1,k_2} 1/k_1^2k_2^2$. Les sommes finies de la série (23) étant Γ-périodiques, il en est de même de sa limite au sens des distributions. □

La proposition 5.8 nous permet de construire des distributions périodiques comme sommes de séries de Fourier. Montrons maintenant que les coefficients de Fourier d'une telle distribution sont uniques.

***Théorème 5.9* (unicité des coefficients de Fourier)**. *Soit $\Gamma^\star$ un réseau de $\mathbb{R}^2$. Si $(c_k)_{k\in\Gamma^\star}$ est une suite à croissance lente telle que l'on ait $u = \sum_{k\in\Gamma^\star} c_k e^{ik\cdot x} = 0$ au sens des distributions, alors $\forall\, k, c_k = 0$.*

Démonstration. Pour tout $\varphi \in C_0^\infty$,

$$\left\langle \sum_k c_k e^{ik\cdot x}, \varphi \right\rangle = \sum_k c_k \left\langle e^{ik\cdot x}, \varphi \right\rangle = \sum_k c_k \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x) e^{ik\cdot x}.$$

Le théorème résulte alors immédiatement en choisissant φ comme indiqué dans le Corollaire 5.7. □

Proposition 5.10. *Si u est une distribution Γ-périodique, on définit ses coefficients de Fourier $c_k(u)$, $k \in \Gamma^\star$ par*

$$c_k(u) = \frac{1}{S} \left\langle u, \chi e^{-ik\cdot x} \right\rangle \tag{24}$$

où χ est une partition de l'unité Γ-périodique. Alors $c_k(u)$, $k \in \Gamma^\star$ est à croissance lente, ne dépend que de u et l'on a

$$u = \sum_{k\in\Gamma^\star} c_k(u) e^{ik\cdot x}. \tag{25}$$

Démonstration. Soit K le support de χ. Par définition d'une distribution, il existe une constante C et un entier p tels que

$$|\langle u, \chi e^{-ik\cdot x}\rangle| \le \sum_{|\alpha|\le p} ||\partial^\alpha(\chi(x) e^{-ikx})||_{L^\infty},$$

où $\partial^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2}$ désigne une dérivée partielle d'ordre total $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$. En développant les dérivées par la formule de Leibnitz, on voit qu'il existe une constante C telle que

$$|\langle u, \chi e^{-ik\cdot x}\rangle| \le C(1 + |k|^p).$$

La suite $c_k(u) = \langle u, \chi e^{-ik\cdot x}\rangle$ est donc à croissance lente et on a le droit de parler de la distribution

$$u_1 = \sum_{k\in\Gamma^\star} c_k(u) e^{ik\cdot x}.$$

Il nous reste à montrer que u_1 et u sont égales, ce que l'on vérifie en considérant une fonction test $\varphi \in C_0^\infty$. Notons comme usuel $\widetilde{\varphi}$ la Γ-périodisée de φ, $\widetilde{\varphi}(x) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \varphi(x)$ et rappelons que par le lemme 5.6,

$$\widetilde{\varphi}(x) = \sum_{k\in\Gamma^\star} c_k(\widetilde{\varphi}) e^{ik\cdot x} \text{ avec } c_k(\widetilde{\varphi}) = \frac{1}{S} \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x) e^{-ik\cdot x} dx. \tag{26}$$

On remarque aussi que les coefficients de Fourier $c_k(\widetilde{\varphi})$ sont à décroissance rapide par la proposition 5.4.

On a d'une part

$$\begin{aligned}\langle u, \varphi\rangle &= \left\langle \sum_{\gamma\in\Gamma} \tau_\gamma(\chi u), \varphi \right\rangle = \left\langle \chi u, \sum_{\gamma\in\Gamma} \tau_{-\gamma}\varphi \right\rangle \\ &= \langle \chi u, \widetilde{\varphi}\rangle = \left\langle \chi u, \sum_{k\in\Gamma^\star} c_k(\widetilde{\varphi}) e^{ik\cdot x} \right\rangle \\ &= \sum_{k\in\Gamma^\star} c_{-k}(\widetilde{\varphi}) \left\langle \chi u, e^{-ik\cdot x}\right\rangle = S \sum_{k\in\Gamma^\star} c_{-k}(\widetilde{\varphi}) c_k(u).\end{aligned}$$

Par ailleurs, on a

$$\langle u_1, \varphi\rangle = \left\langle \sum_{k\in\Gamma^\star} c_k(u) e^{ik\cdot x}, \varphi \right\rangle = \sum_{k\in\Gamma^\star} c_k(u) \left\langle e^{ik\cdot x}, \varphi\right\rangle = S \sum_{k\in\Gamma^\star} c_k(u) c_{-k}(\widetilde{\varphi}).$$

Les deux distributions u et u_1 sont donc bien égales. □

5.3. Conclusion. On peut énoncer les résultats de cette section de manière très condensée en disant :

(1) Toute distribution u Γ-périodique est la somme d'une série de Fourier dont les coefficients $c_k(u)$ sont à croissance lente,

$$u = \sum_{k\in\Gamma^\star} c_k(u) e^{ik\cdot x}.$$

Réciproquement, toute série de Fourier à coefficients à croissance lente est une distribution Γ-périodique.

(2) Les coefficients de Fourier de u se calculent avec une quelconque fonction χ donnant lieu à une partition de l'unité Γ-périodique ($\sum_{\gamma\in\Gamma} \chi(x+\gamma) = 1$) par la formule

$$c_k(u) = \frac{1}{S}\left\langle u, \chi e^{-ik\cdot x}\right\rangle$$

(3) La dualité entre distributions périodiques u et fonctions tests $\varphi \in C_0^\infty$ s'exprime grâce aux coefficients de Fourier de u et de la périodisée $\widetilde{\varphi}$ par

$$\langle u_1, \varphi\rangle = S \sum_{k\in\Gamma^\star} c_k(u) c_{-k}(\widetilde{\varphi}).$$

(4) Cette dernière formule traduit donc la dualité distributions périodiques-fonctions test en une dualité entre suites indexées par $\Gamma^\star$ ʒoissance lente et suites à décroissance rapide.

5.4. La formule de Poisson. Comme application immédiate (et une des plus importantes), on va calculer la transformée de Fourier d'un « peigne de Dirac » $u = \sum_{\gamma\in\Gamma} \delta_\gamma$ sur un réseau Γ. Par les formules (24, 25) on a

$$u = \sum_{k\in\Gamma^\star} c_k(u)e^{ik\cdot x}.$$

avec

$$c_k(u) = \frac{1}{S}\left\langle u, \chi e^{-ik\cdot x}\right\rangle = \frac{1}{S}\sum_{\gamma\in\Gamma}\chi(\gamma)e^{-ik\cdot\gamma} = \frac{1}{S}\sum_{\gamma\in\Gamma}\chi(\gamma) = \frac{1}{S},$$

où χ est une partition de l'unité Γ-périodique. Donc

$$u = \frac{1}{S}\sum_{k\in\Gamma^\star} e^{ik\cdot x}.$$

On vient de montrer la *formule de Poisson,*

$$\sum_{\gamma\in\Gamma}\delta_\gamma = \frac{1}{S}\sum_{k\in\Gamma^\star} e^{ik\cdot x} \tag{27}$$

Il est bon de donner une version en dimension 1 où les échelles en jeu apparaissent : soit $T > 0$ un « pas d'échantillonnage », alors

$$\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}\delta_{kT} = \frac{1}{T}\sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} e^{i\frac{2\pi p}{T}x}, \tag{28}$$

formule où l'on a pris comme réseau primal $\Gamma = T\mathbb{Z}$. Le réseau dual est alors $\Gamma^\star = \frac{2\pi}{T}\mathbb{Z}$. Si on applique cette dernière formule à une fonction test $\varphi \in C_0^\infty$, on obtient la formule de Poisson proprement dite,

$$\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}\varphi(kT) = \frac{1}{T}\sum_{p=-\infty}^{p=+\infty}\widehat{\varphi}\big(\frac{2p\pi}{T}\big) \tag{29}$$

On va encore donner une autre forme à la formule de Poisson, qui sera utile pour la théorie de l'échantillonnage (théorie de Shannon). On commence par remarquer que le peigne de Dirac $\Pi_\Gamma = \sum_{\gamma\in\Gamma}\delta_\gamma$ est une distribution tempérée et que la série double converge dans $\mathcal{S}'$. On a donc en appliquant la transformation de Fourier des distributions tempérées,

$$\widehat{\Pi_\Gamma} = \sum_{\gamma\in\Gamma}\widehat{\delta_\gamma} = \sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-i\gamma\cdot x}.$$

On utilise alors la formule de Poisson 27, en échangeant les rôles (symétriques) de Γ et $\Gamma^\star$. Cela donne

$$\widehat{\Pi_\Gamma} = S^\star\sum_{k\in\Gamma^\star}\delta_k,$$

où $S^\star$ est la surface de la maille du réseau dual. Il est facile de voir que $SS^\star = (2\pi)^2$. On obtient donc la formule de base de la cristallographie selon laquelle « la transformée de Fourier d'un réseau est le réseau dual », et plus précisément

$$\widehat{\Pi_\Gamma} = \frac{(2\pi)^2}{S}\Pi_{\Gamma^\star} = S^\star \Pi_{\Gamma^\star}. \tag{30}$$

5.5. Théorie de Shannon pour les images. On va d'abord se placer dans un cadre idéal, continu et infini. On choisit un point focal et un plan ne contenant pas ce point. Dans ce plan, on délimite une région qui est l'ouverture (en général un disque). En tout point de cette ouverture, on compte les photons passant par le plan et se dirigeant vers le point focal. On peut imaginer l'image idéale résultante O, que l'on appellera « paysage » et il sera commode de s'y référer pour toutes les opérations effectuées par les appareils optiques artificiels ou naturels. Les dispositifs physiques sont en effet un peu plus complexes. Le flux de photons passe d'abord par plusieurs ouvertures généralement circulaires. Ces ouvertures peuvent être le diaphragme d'un appareil photographique, l'orifice d'un téléscope ou d'un zoom, la pupille de l'oeil. Dans le dispositif le plus primitif, la « chambre noire » (*camera oscura*) connue dès l'antiquité, la lumière passe directement par un trou dans une paroi mince et se projette directement sur le mur en face, ce qui est le cas le plus simple : dans ce cas, point focal (qui n'est pas un point) et ouverture sont simplement confondus. Pour réaliser une focalisation meilleure, une lentille concentre les photons et les fait se projeter sur un plan focal rapproché. Supposons, pour éviter les problèmes de profondeur de champ, que les trajectoires des photons soient parallèles (cas d'un téléscope : point focal et ouverture sont éloignés). Alors les différents éléments du dispositif optique agissent sur le « paysage » comme des convolutions. Enfin, dernier point à ne pas négliger, les photons sont comptés au moment de l'impact par des capteurs tapissant la rétine ou le plan focal. Dans la rétine humaine, ces capteurs forment un réseau hexagonal en nid d'abeille. La plupart des capteurs CCD sont approximativement carrés et disposés en matrice. Dans tous les cas, on peut modéliser l'opération d'échantillonnage comme un décompte des photons effectué par chaque capteur dans un temps donné (le « temps d'obturation » pour un appareil photographique). Cette opération d'échantillonnage comporte deux étapes du point de vue mathématique : la convolution du champ photonique par une fonction $g(x)$ représentant la fonction porte du capteur, puis l'attribution de cette valeur au centre du capteur. On supposera que ces centres forment un réseau de $\mathbb{R}^2$, ce qui est vrai si les capteurs forment un pavage régulier du plan.

On notera (toutes les fonctions et distributions considérées sont définies sur $\mathbb{R}^2$)

- O, le paysage initial conçu comme un décompte d'énergie lumineuse au point x dans un plan perpendiculaire à l'axe de l'appareil optique. Comme l'ouverture de l'appareil optique a une surface finie, ce décompte s'effectue dans une région du plan compacte (un disque ou un rectangle en général). On note $x \in \mathbb{R}^2$ les points de ce plan. *A priori*, O est donc une fonction intégrable dans un modèle infinitésimal ou une mesure de Radon a support compact si on adopte un modèle quantique de compte-photons, modèle justifié avec les capteurs biologiques ou digitaux.
- $h(x)$ le noyau de convolution obtenu en multipliant les différents noyaux (y compris celui du capteur). En fait, $h = h_{\text{detect}} * h_{\text{opt}} * h_{\text{filé}}$, où le premier noyau est la fonction caractéristique du détecteur, le second la convolution due à la lentille, et le troisième est le flou de mouvement ou de « filé » du capteur lui-même, dû au fait que capteur lui-même bouge dans l'intervalle de temps d'acquisition de l'image (le temps d'ouverture du diaphragme dans un appareil photographique classique). h s'appelle la « réponse impulsionnelle » de l'appareil et $\widehat{h}$ sa « fonction de transfert de modulation » ou « FTM ». Il est à noter que $\widehat{h}$ est à support compact, car $\widehat{h}_{\text{opt}}$ l'est et que $\widehat{h} = \widehat{h}_{\text{detect}}\widehat{h}_{\text{opt}}\widehat{h}_{\text{filé}}$.
- Γ, le réseau d'échantillonnage et son peigne de Dirac $\Pi_\Gamma = \sum_{\gamma\in\Gamma} \delta_\gamma$
- Le réseau effectif de capteurs se modélise comme $F_{n,m}\Pi_\Gamma$, où $F_{n,m}$ est la fonction caractéristique d'un parallélogramme adapté au réseau Γ : si e_1 et e_2 forment une base du réseau, les capteurs effectifs ont leurs centres dans un parallélogramme discret

  $$P = \{ke_1 + le_2,\ 1 \leq k \leq n,\ 1 \leq l \leq m\}.$$

  On peut, et cela sera utile pour donner un sens aux expressions qui suivent, supposer que $F_{n,m}$ est dans C_0^∞, car on peut trouver une telle fonction satisfaisant $F_{n,m} = 1$ dans P et $F_{n,m}(k) = 0$ aux autres points du réseau Γ.

On peut donc modéliser l'image digitale résultante par

$$u = (h * O) \cdot \Pi_\Gamma \cdot F_{n,m} \tag{31}$$

O est une mesure de Radon à support compact et on doit supposer une régularité suffisante pour h afin que le produit de convolution avec h soit défini et continu. En fait, $\widehat{h}$ est continue et à support compact, donc intégrable et de carré intégrable. On en déduit que h appartient à $\mathcal{O}_M$, est donc C^∞, appartient aussi à $L^2(\mathbb{R}^2)$ et tend vers 0 l'infini. Donc $h * O$ est une fonction C^∞ tendant vers zéro à l'infini ; elle est également dans $L^2(\mathbb{R}^2)$. La théorie de Shannon-Whittaker va nous permettre d'étudier dans quelle mesure l'image convolée $h * O$ peut être recouvrée à partir de ses échantillons $(h * O) \cdot \Pi_\Gamma \cdot F_{n,m}$. On commence par appliquer la transformation de Fourier des distributions tempérées à la relation (31)

Lemme 5.11. *On suppose que le paysage initial O est une mesure de Radon à support compact et que la FTM $\widehat{h}$ est continue à support compact. Alors*

$$\widehat{u} = S^\star(\widehat{h}\widehat{O}) * (2\pi)^{-N}\Pi_{\Gamma^\star} * (2\pi)^{-N}\widehat{F_{n,m}} \tag{32}$$

Démonstration. Vérifions que le second membre de cette relation a un sens. O est une mesure de Radon à support compact. Donc $\widehat{O}$ est une fonction C^∞. Par ailleurs $\widehat{h}$ est par hypothèse une fonction continue à support compact. Le produit $\widehat{h}\widehat{O}$ est donc une fonction continue à support compact. Sa convolée avec le peigne de Dirac $\Pi_{\Gamma^\star}$ est donc aussi une fonction continue et bornée qui est la $\Gamma^\star$-périodisée de $\widehat{h}\widehat{O}$. Enfin, cette fonction bornée est convolée avec $\widehat{F}_{n,m}$ qui est dans la classe de Schwartz. Le résultat final est donc une fonction C^∞, $\Gamma^\star$-périodique et bornée. La relation (32) est vraie par une application répétée de la proposition 4.7, de la formule d'inversion de Fourier dans $\mathcal{S}'$. La transformée de Fourier de Π_Γ est donnée par la formule (30). $\square$

Dans le théorème qui suit, on va négliger l'effet de fenêtrage $F_{n,m}$ dans la digitalisation et supposer que l'image digitalisée est infinie.

***Théorème 5.12* (Shannon-Whittaker)**. *On suppose que le support de la FTM h, $K = \mathrm{Supp}(\widehat{h})$ est contenu dans une cellule R du réseau dual (appelé aussi réseau réciproque : c'est pourquoi on la note R). Alors le paysage convolé $h*O$ peut être recouvré à partir de l'image « digitalisée » infinie $u = (h*O)\cdot\Pi_\Gamma$ par la formule d'interpolation*

$$h * O = \widehat{u} * \frac{1}{S^\star}\overline{\mathcal{F}}(\mathbf{1}_R), \tag{33}$$

ou encore

$$(h * O)(x) = \sum_{\gamma\in\Gamma}(h * O)(\gamma)\frac{1}{S^\star}\overline{\mathcal{F}}(\mathbf{1}_R)(x-\gamma). \tag{34}$$

Démonstration. On considère la fonction caractéristique de R, $\mathbf{1}_R(\xi) = 1$ si $\xi \in R$ et 0 sinon. Par le lemme 32, on a

$$\widehat{u}(\xi) = (2\pi)^{-N}S^\star(\widehat{h}\widehat{O}) * \Pi_{\Gamma^\star} = \frac{1}{S}\sum_{k\in\Gamma^\star}\widehat{h}(\xi+k)\widehat{O}(\xi+k)$$

et en multipliant cette relation par $\mathbf{1}_R$ et en tenant compte du fait que les supports des différentes fonctions translatées $\widehat{h}(\xi+k)O(\xi+k)$ sont disjoints, on a

$$\mathbf{1}_R(\xi)\widehat{u}(\xi) = \frac{1}{S}\widehat{h}(\xi)\widehat{O}(\xi)\mathbf{1}_R(\xi).$$

Mais comme $\mathbf{1}_R$ est identiquement égale à 1 sur le support de $\widehat{h}$, on a $\mathbf{1}_R(\xi)\widehat{h}(\xi) = \widehat{h}(\xi)$ et donc

$$\widehat{O}(\xi)\widehat{h}(\xi) = S\mathbf{1}_R(\xi)\widehat{u}(\xi).$$

Appliquons la transformée de Fourier inverse ($\overline{\mathcal{F}}$). Par la proposition 4.7,

$$h * O = \frac{S}{(2\pi)^N} u * \overline{\mathcal{F}}(\mathbf{1}_R) = u * \frac{1}{S^\star}\overline{\mathcal{F}}(\mathbf{1}_R).$$

Il est commode de réécrire cette formule comme une formule d'interpolation. On a

$$u = \sum_{\gamma\in\Gamma}(h * O)(\gamma)\delta_\gamma.$$

Donc

$$(h * O)(x) = \sum_{\gamma\in\Gamma}(h * O)(\gamma)\frac{1}{S^\star}\overline{\mathcal{F}}(\mathbf{1}_R)(x-\gamma).$$

On a donc montré la convergence de cette série dans $\mathcal{S}'$ mais il n'est pas difficile de prouver qu'elle a lieu dans $L^2(\mathbb{R}^2)$. □

Application : la formule de Shannon pour l'échantillonnage de signaux. Considérons le cas de la dimension $N = 1$ et d'un réseau d'échantillonnage $\Gamma = T\mathbb{Z}$. On a $e_1 = 1$, $e_1^\star = 2\pi$, $S = T$, $\Gamma^\star = \frac{2\pi}{T}\mathbb{Z}$. Prenons le cas le plus simple d'une cellule $R = [-\pi/T, \pi/T]$. Alors $\overline{\mathcal{F}}(\mathbf{1}_R)(\xi) = 2\dfrac{\sin(\pi\xi/T)}{\xi}$ (formule (16)) et par le théorème 33, le paysage convolé s'obtient par

$$h * O = \frac{T}{2\pi} u * \overline{\mathcal{F}}(\mathbf{1}_R).$$

Or,

$$u = \sum_{k\in\mathbb{Z}}(h * O)(kT)\delta_{kT}$$

et donc

$$h * 0 = \sum_{k\in\mathbb{Z}}(h * O)(kT)\frac{T}{2\pi}2\frac{\sin(\frac{\pi(x-kT)}{T})}{x-kT},$$

soit

$$h * 0 = \sum_{k\in\mathbb{Z}}(h * O)(kT)\frac{\sin(\frac{\pi}{T}(x-kT))}{\frac{\pi}{T}(x-kT)}. \tag{35}$$

Cette dernière formule est la formule de Shannon la plus classique.

5.6. L'artifice de la périodisation. L'aliasage nécessaire. La théorie de Shannon telle que nous venons de la décrire n'est pas une théorie numérique, puisque l'échantillonnage est supposé infini. Le peigne de Dirac u n'est donc pas numérisé à ce stade, si on entend par donnée numérique une donnée finie. De même, $\widehat{u}$ n'est pas numérisée, puisque c'est une fonction, certes à support compact. Or, pour en venir à la numérisation, il nous faudrait un spectre de Fourier à la fois discret et borné. Or, la donnée numérique discrète observée est, on l'a vu, (31). À partir de cette donnée finie nous avons un moyen efficace de recréer un spectre discret : il suffit de prolonger u par périodicité en dehors de sa fenêtre de définition. On considère pour cela le réseau Γ_{nm} engendré par ne_1 et me_2. La fenêtre $F_{n,m}$ correspond ňe maille de ce réseau. On rappelle que l'image discrète est

$$u = (h * O) \cdot \Pi_\Gamma \cdot F_{n,m} \tag{36}$$

Périodiser u revient à le convoler avec $\Pi_{\Gamma_{nm}}$ et on pose donc

$$\widetilde{u} = \Pi_{\Gamma_{nm}} * ((h * O) \cdot \Pi_\Gamma \cdot F_{n,m}). \tag{37}$$

On Fouriérise et on obtient donc

$$\widehat{\widetilde{u}} = c\Pi_{\Gamma^\star_{\frac{1}{n}\frac{1}{m}}} \cdot (\Pi_{\Gamma^\star} * (\widehat{h}\widehat{O} * \widehat{F_{n,m}})), \tag{38}$$

avec $c = \frac{1}{nm}(S^\star)^2(2\pi)^{-2N}$. La surface de la maille de $\Pi_{\Gamma_{nm}}$ est en effet mnS et donc la maille duale est de surface $\frac{1}{nm}S^*$. Interprétons maintenant la formule (38), qui décrit de manière synthétique toutes les manipulations de spectre en jeu dans la digitalisation d'une image. La multiplication par le premier terme signifie que $\widehat{\widetilde{u}}$ est un peigne de Dirac sur le réseau fin $\frac{1}{nm}\Gamma^\star$. Ce peigne est $\Gamma^\star$-périodique à cause de la convolution par $\Pi_{\Gamma^\star}$. On a donc bien une donnée numérique discrète, composée de nm coefficients. Nous avons néanmoins commis un abus, la périodisation d'une fonction qui n'a rien de périodique, et nous allons maintenant le payer. D'abord, remarquons que $\widehat{F_{n,m}}$ n'est pas à support compact (principe d'incertitude : $F_{n,m}$ est à support compact). Donc le terme $*\widehat{F_{n,m}}$ dans le calcul de $\widehat{\widetilde{u}}$ implique que la fonction à $\psi = (\widehat{h}\widehat{O} * \widehat{F_{n,m}})$ n'est plus à support compact. Donc la théorie de Shannon ne s'applique plus. Si on convole la fonction ψ avec $\Pi_{\Gamma^\star}$, on fait la somme de ψ et de ses translatées par les vecteurs de $\Gamma^\star$, que l'on appelle des « alias ». Ces alias n'ont pas des supports disjoints. On ne peut donc pas reconstituer $O * h$ à partir de u. Si on applique quand même, par une sorte de forçage, la formule de Shannon, on obtient une fonction qui coïncide avec $O * h$ sur le réseau Γ mais qui présente deux types d'artefacts :

- L' « aliasage » (*aliasing*), autrement dit « repliement de spectre » : la transformée de Fourier de la reconstituée comporte dans les basses et moyennes fréquences des ondes parasites provenant de fréquences hautes (voir figure dans le chapitre suivant).

– Le phénomène de Gibbs dû aux sauts induits au bord de l'image par la périodisation (les valeurs de bord à droite et à gauche, en haut et en bas, n'ont aucune raison d'être égales pour $O * h$!).

6. Le cas discret

6.1. Présentation. Soit un signal f dont on connaî t la période a ainsi que les valeurs $y_k = f(ka/N)$ pour $k = 0, \dots, N-1$. On se propose d'interpoler la fonction f en ces points par un polynôme trigonométrique

$$p(t) = \sum_{n=0}^{N-1} Y_n e^{2i\pi nt/a}, \text{ en sorte que } p\left(\frac{ka}{N}\right) = y_k$$

Posons $\omega_N = e^{2i\pi/N}$. On a donc $p\,(ka/N) = \sum_{n=0}^{N-1} Y_n \omega_N^{kn}$. On remarque que

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N-1} y_k \omega_N^{-kl} &= \sum_{k=0}^{N-1} p\left(\frac{ka}{N}\right) \omega_N^{-kl} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} Y_n \omega_N^{k(n-l)} = \sum_{n=0}^{N-1} Y_n \sum_{k=0}^{N-1} \omega_N^{k(n-l)} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} Y_n N \delta_{n,l} = N Y_l.\end{aligned}$$

D'où

$$Y_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k \omega_N^{-nk}.$$

On a déjà

$$y_n = \sum_{k=0}^{N-1} Y_k \omega_N^{nk}.$$

On a ainsi ramené le problème de la détermination des Y_n à l'évaluation d'un certain polynôme aux racines N-ièmes de l'unité. En fait, n'importe quel polynôme du type

$$\sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} Z_n e^{2i\pi nt/a}.$$

ferait l'affaire, la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ étant périodique de période N. Cependant, comme nous le verrons plus loin, le « bon » intervalle (même s'il n'est pas le plus pratique à manipuler) est $-\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1$.

6.2. L'algorithme de la TFR. Comme nous l'avons vu plus haut, le calcul des coefficients de Fourier Y_n revient à l'évaluation d'un certain polynôme aux racines N-ièmes de l'unité. Dans le cas général, l'évaluation classique (ex. méthode de Hörner) d'un polynôme de degré $N-1$ en un point prend $\mathcal{O}(N)$ opérations. Donc si l'on répète cela pour les N racines de l'unité on devra effectuer $\mathcal{O}(N^2)$ opérations. L'algorithme de la Transformée de Fourier Rapide (TFR) permet de résoudre le problème en $\mathcal{O}(N \log N)$ opérations. Appelons « calcul d'ordre N » l'évaluation d'un polynôme de degré $N-1$ aux racines N-ièmes de l'unité. Et soit $T(N)$ le nombre d'opérations (additions et multiplications) demandé par ce calcul.

On se place dans le cas $N = 2^n$ et soit un polynôme

$$P(X) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k X^k.$$

On pose

$$Q(X) = \sum_{k=0}^{N/2-1} a_{2k} X^k, \quad R(X) = \sum_{k=0}^{N/2-1} a_{2k+1} X^k.$$

Alors

$$(*) \qquad P(\omega_N^k) = Q\left(\left(\omega_N^k\right)^2\right) + \omega_N^k R\left(\left(\omega_N^k\right)^2\right).$$

Or, si N est pair les $\left(\omega_N^k\right)^2$ sont exactement les racines d'ordre $N/2$ de l'unité. Il suffit donc d'évaluer les deux polynômes Q et R aux racines d'ordre $N/2$ de l'unité ce qui est un problême d'ordre $N/2$. On a donc, en tenant compte additions et multiplications demandées par $(*)$,

$$T(N) = 2T\left(\frac{N}{2}\right) + 2N.$$

On en tire aisément $T(N) = \mathcal{O}(N \log(N))$.

6.3. Lien avec la théorie de Shannon

Théorème 6.1 **(de Shannon pour les polynômes trigonométriques)**

Soit un signal trigonométrique

$$f(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{2i\pi\lambda_n t}.$$

On a encore la formule de Shannon

$$\forall\, a \in \left]0, \frac{1}{2\lambda_c}\right[, \ \forall\, t \in \mathbb{R}, \ f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(na) \frac{\sin \frac{\pi}{a}(t-na)}{\frac{\pi}{a}(t-na)},$$

avec $\lambda_c = \max\{|\lambda_n|\}$. *La convergence est ponctuelle.*

Remarque 6.2. Ce théorème complète le théorème de Shannon pour un signal qui est ni périodique ni dans L^2.

Démonstration. il suffit de démontrer le résultat dans le cas d'une seule onde. Soit donc

$$f(t) = e^{2i\pi\lambda t}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Soit g périodique de période $1/a$ et égale à f sur $(-1/2a, 1/2a)$. Les coefficients de Fourier de f sont

$$c_n = \frac{a \sin\frac{\pi}{a}(\lambda - na)}{\pi(\lambda - na)}.$$

Donc

$$g(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{a}(\lambda - na)}{\frac{\pi}{a}(\lambda - na)} e^{2i\pi nat}.$$

Comme f est C^1 sur $]-1/2a, 1/2a[$, Cette égalité est ponctuelle pour $t \in]-1/2a, 1/2a[$ (principe de localisation). D'où

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \quad e^{2i\pi\lambda t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi nat} \frac{\sin\frac{\pi}{a}(\lambda - na)}{\frac{\pi}{a}(\lambda - na)}, \quad |t| < 1/2a.$$

En intervertissant λ et t, on obtient

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad e^{2i\pi\lambda t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi na\lambda} \frac{\sin\frac{\pi}{a}(t - na)}{\frac{\pi}{a}(t - na)}, \quad |\lambda| < 1/2a.$$

□

Dans la pratique. On possède un signal f périodique de période T. On l'échantillonne de manière régulière N fois sur l'intervalle $[0, T]$. A quelle condition sur le signal a-t-on capturé toute l'information de f ? Le théorème précédent nous indique qu'il suffit que f n'ait pas de fréquences $|\lambda| \geq N/2T$. Á cette condition, et comme la transformée de Fourier de f est un peigne de Dirac à support compact, f est un polynôme trigonométrique. D'où

$$f(t) = \begin{cases} \sum_{k=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} c_k e^{2i\pi kt/T} & \text{pour } N \text{ impair,} \\ \sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}-1} c_k e^{2i\pi kt/T} & \text{pour } N \text{ pair.} \end{cases}$$

Quand N est impair, un tel polynôme a bien N coefficients et suffit donc à interpoler n'importe quelle suite de N valeurs constatées pour f. En revanche, dans le cas où N est pair le polynôme a seulement $N - 1$ coefficients et on a besoin d'un coefficient supplémentaire, en général, pour rendre compte des valeurs échantillonnées.

On ajoute alors un terme en $e^{2i\pi Nt/2T}$, qui ne rentre pas dans le cadre de la théorie de Shannon (sa fréquence est sur le bord de la cellule réciproque) mais qui se justifie pour rendre compte des comportements possibles de f.

6.4. Applications

6.4.1. *La TFR bidimensionnelle.* On a échantillonné un signal f bidimensionnel suivant une grille carrée $[0, N_x - 1] \times [0, N_y - 1]$. On souhaite écrire

$$f(t) = \sum_{k=1-N_x/2}^{N_x/2} \sum_{l=1-N_y/2}^{N_y/2} c_{k,l} e^{2i\pi t\left(\frac{k}{N_x}+\frac{l}{N_y}\right)}$$

Pour calculer les $c_{n,k}$ il suffit alors de calculer la TFR sur chaque ligne du tableau des valeurs de f, puis de calculer la TFR pour chacune des colonnes du tableau ainsi obtenu (l'ordre de traitement ligne/colonne n'a évidemment pas d'importance...).

6.4.2. *Les zooms*

Par la TFR. Étant donné N valeurs d'une fonction f aux points $0, \dots, N-1$ on cherche à évaluer les valeurs de $g(x) = f(x/2)$ aux points $0, \dots, 2N-1$ Ainsi on possède plus de détails de f, on dit alors que l'on a effectué un agrandissement (ou zoom) de f. Dans la pratique, on calcule les coefficients du polynôme

$$p(t) = \sum_{k=1-N/2}^{N/2} c_k e^{2i\pi tk/N},$$

puis on étend ce polynôme par

$$q(t) = \sum_{k=-N+1}^{N} c'_k e^{i\pi tk/N}$$

avec

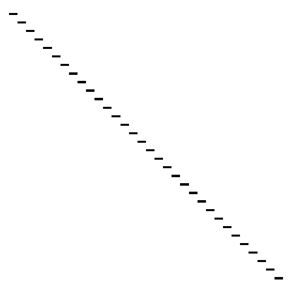
$$c'_k = \begin{cases} c_k & |k| < N/2 \\ \dfrac{c_{N/2}}{2} & k = \pm N/2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il suffit alors d'évaluer q aux points qui nous intéressent. Le calcul des coefficients c_k ainsi que celui des valeurs de q se ramène au calcul des valeurs d'un polynôme aux racines de l'unité. On peut donc utiliser l'algorithme de la TFR. Le cas bidimensionnel est analogue au cas unidimensionnel. Cette méthode est connue sous le nom de *zero-padding* (remplissage par des zéros).

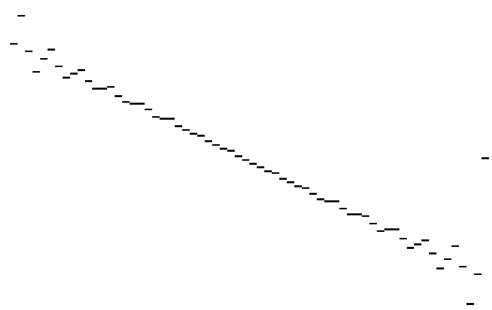
Remarque 6.3. On a supposé ici que le signal avait une période N ce qui veut dire que l'on a « recollé » les deux bords du signal. Du fait de ce recollement qui nous conduit a juxtaposer deux valeurs très différentes de f, on constate dans l'image zoomée l'apparition d'un effet de Gibbs.

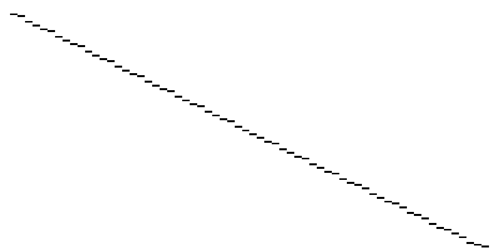
Par la TCD. Le but de la TCD (Transformée en Cosinus Discrète) est de se débarrasser de l'effet de Gibbs. On commence par symétriser le signal par rapport à la droite $x = N - 1/2$. Puis on fait l'hypothèse que le signal est de période $2N$. Enfin on applique l'algorithme ci-dessus. Le recollement signalé à la remarque précédente ne donne plus lieu à un effet de Gibbs car la fonction est « continue » aux bords de l'intervalle. Á la fin de l'algorithme on ne garde que les $2N$ premières valeurs parmi les $4N$ fournies par l'algorithme (les suivantes étant les symétriques de celles-ci).

Exemple 6.4



originale





zomée par TFR **zomée par TCD**

FIGURE 2

6.4.3. *la translation.* On possède N échantillons consécutifs d'un signal f. On cherche à évaluer la valeur de la translatée $g(t) = f(t - x)$, $x \in \mathbb{R}$, par exemple aux points $0, \ldots, N-1$. Soit donc le polynôme,

$$p(t) = \sum_{k=-N/2}^{N/2} c_k e^{2i\pi tk/N}.$$

On a alors

$$g(t) = \sum_{k=-N/2}^{N/2} c'_k e^{2i\pi tk/N},$$

avec

$$c'_k = c_k e^{-2i\pi xk/N}.$$

La démarche à suivre est donc la suivante :

1. On applique la TFR à f pour obtenir les c_k.
2. On multiplie chaque c_k par $e^{-2i\pi xk/N}$ pour obtenir les c'_k.
3. Enfin, on applique la TFR inverse aux c'_k pour obtenir rapidement les valeurs de g aux points entiers.

Remarque 6.5. Dans l'expression de $p(t)$ on a considéré à la fois un terme en $e^{i\pi t}$ et un autre en $e^{-i\pi t}$. Ceci pour maintenir de la manière la plus simple le caractère réel du signal, et ce en utilisant l'indétermination laissée par la théorie de Shannon pour ces deux termes. Si on note $d_{N/2}$ le coefficient obtenu par la TFR appliquée au signal de f alors les coefficients

$$c_{N/2} = \frac{1}{2} d_{N/2} \text{ et } c_{-N/2} = \frac{1}{2} \overline{d}_{N/2}$$

conviennent.

La rotation. Une application inattendue de la translation par TFR, est une rotation presque exacte. En effet, on remarque que la matrice d'une rotation d'angle θ se décompose comme suit

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\tan\theta/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sin\theta & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -\tan\theta/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Chacune des trois matrices précédentes peut s'interpréter comme une « translation » suivant un des deux axes dont la valeur dépend linéairement de l'autre coordonnée. Par exemple, appliquer la dernière matrice à l'image revient à translater chaque ligne d'une valeur égale à $-\tan(\theta/2)\, y$. La démarche à suivre est alors simple : pour chacune des trois matrices ci-dessus on translate les lignes (ou les colonnes) de l'image et ce par l'application de la méthode vue à la partie précédente. L'image finalement obtenue est le résultat de la combinaison des trois « translations », soit une rotation d'angle θ.

Remarque 6.6. Cette méthode présente un défaut. En effet, du fait que l'on manipule des fonctions périodiques, une translation conduit à faire sortir une partie de l'image par un bord pour la faire entrer par l'autre. Ce qui conduit à l'apparition, sur les bords de l'image d'un certain nombre de détails qui sont en fait mal placés. Les schémas de la figure 3 le montrent bien : On peut se débarrasser de ce problème en

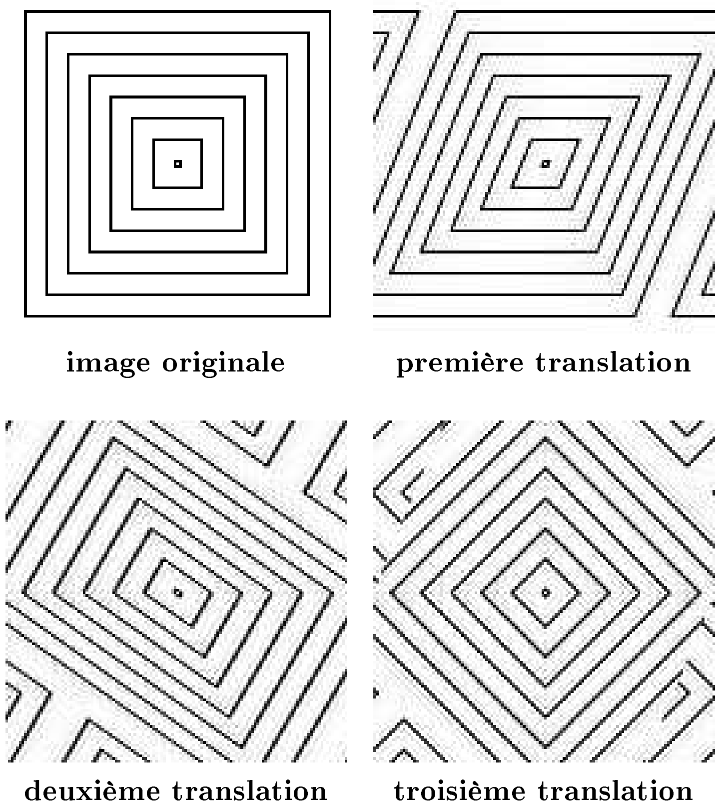


FIGURE 3.

insérant l'image dans un cadre deux fois plus grand...

Remarque 6.7. Un autre défaut, plus fondamental, de la méthode est qu'elle ne peut être parfaite. En effet, supposons que l'image vérifie l'hypothèse de Shannon et qu'elle est N-périodique, ce qui revient à dire qu'elle est de la forme (pour une image carrée)

$$u(x,y)=\sum_{i,j=0}^{N-1} c_{i,j}e^{2i\frac{\pi}{N}(ix+jy)}.$$

Alors, si on lui applique une « translation » suivant l'axe des x de valeur λy, la formule devient

$$u_1(x,y)=\sum_{i,j=0}^{N-1} c_{i,j}e^{2i\frac{\pi}{N}(ix+(j-\lambda i)y)}.$$

La fonction u_1 n'est pas (pour $\lambda\notin\mathbb{Z}$) N-périodique en y. Or, après la première translation on ne dispose plus que des échantillons du signal u_1 sur une grille carrée $N\times N$. D'après la théorie de Shannon un tel ensemble de données ne permet pas de capturer toute l'information sur u_1 (à la seconde étape on effectue des translations suivant y qui est justement l'axe qui pose problème). On rencontre encore ce problème à la troisième translation. Le seul moyen d'éviter cet inconvénient est d'évaluer u aux points de l'image de $[\![0,N-1]\!]\times[\![0,N-1]\!]$ par une rotation d'angle $-\theta$, mais cette méthode est en N^4 ce qui la rend inopérante...

6.4.4. *Restauration d'une image par manipulation du spectre.* L'image échantillonnée a toujours subi un certain *aliasing*. Son spectre est donc en partie replié (figures 4 et 5). En effet le fenêtrage implique que la transformée de Fourier de l'image avant échantillonnage n'est pas à support compact. On peut tenter de compenser l'effet de l'*aliasing* en atténuant le spectre aux bornes du domaine de $\widehat{f}$, en multipliant par exemple $\widehat{f}$ par une fonction continue à support dans la cellule réciproque.

7. Expérimentations

7.1. Exemples de Transformées de Fourier Discrètes. Sur les deux exemples qui suivent, on a calculé la TFR des deux images. La première image a bien un spectre qui décroit très vite à l'infini. Il s'agit là d'une image bien échantillonnée que l'on peut comparer à la seconde image qui a été obtenue en digitalisant une image imprimée. On remarque sur sa TF des taches disposées sur un réseau. Il s'agit du réseau réciproque de celui utilisé par l'imprimante. Cette périodicité du spectre « dénonce » l'*aliasing*.

7.2. Compression de données. La TFR trouve beaucoup d'applications en compression de données. La plus connue d'entre elles étant la norme JPEG. Cette méthode de compression repose sur la remarque que les coefficients de Fourier d'une fonction régulière décroissent très vite en $+\infty$. Ceci étant, la méthode consiste à

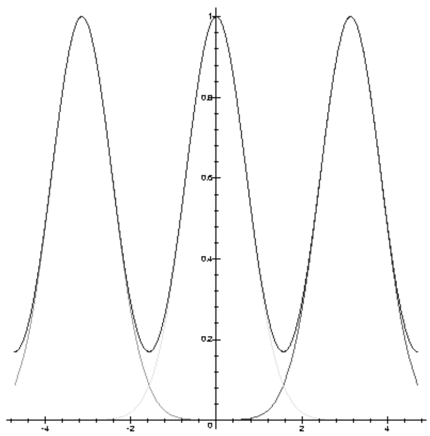


FIGURE 4. Spectre après échantillonnage

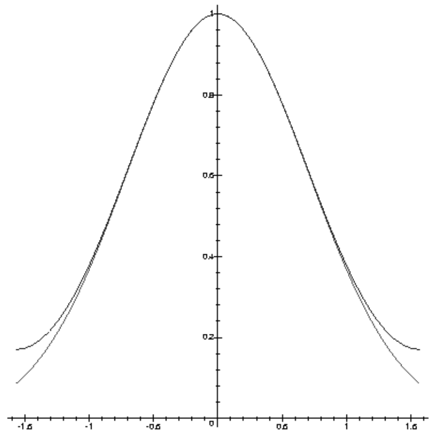


FIGURE 5. Spectre constaté par la TFD

découper l'images en blocs 8×8. Puis à calculer la TCD de chacun de ces blocs. On quantifie ensuite les valeurs obtenues en ne réservant que peu de bits aux coefficients de rang élevé (qui sont négligeables devant les autres). De cette manière, un grand nombre de petits coefficients sont annulés et n'occupent donc plus de place dans la version comprimée de l'image. Enfin une compression statistique (Huffman) est opérée sur le résultat de ce qui précède.

FIGURE 6. Une image normale

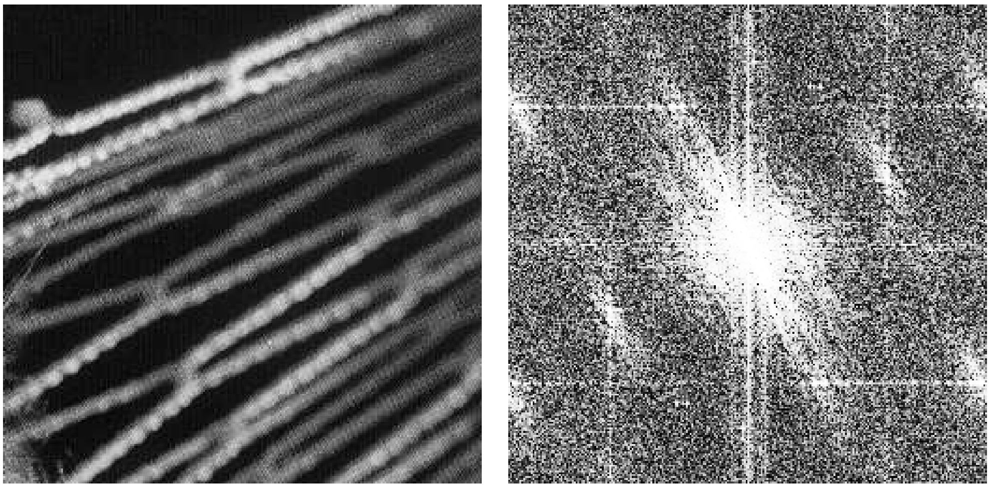


FIGURE 7. Une image mal digitalisée

Les images qui suivent montrent un fragment d'une image que l'on a comprimée dix fois, puis vingt fois. On notera la présence de discontinuités de l'image sur la grille 8×8 qui a été utilisée pour découper l'image. Ces discontinuités se comportent très mal vis-à-vis des algorithmes de détection de bords et les rendent inopérants. C'est pourquoi il faut éviter d'utiliser des images comprimées par JPEG en vue d'un traitement ultérieur de l'image. Cependant, pour la plupart des applications grand public (Internet…) la qualité de reproduction est satisfaisante.

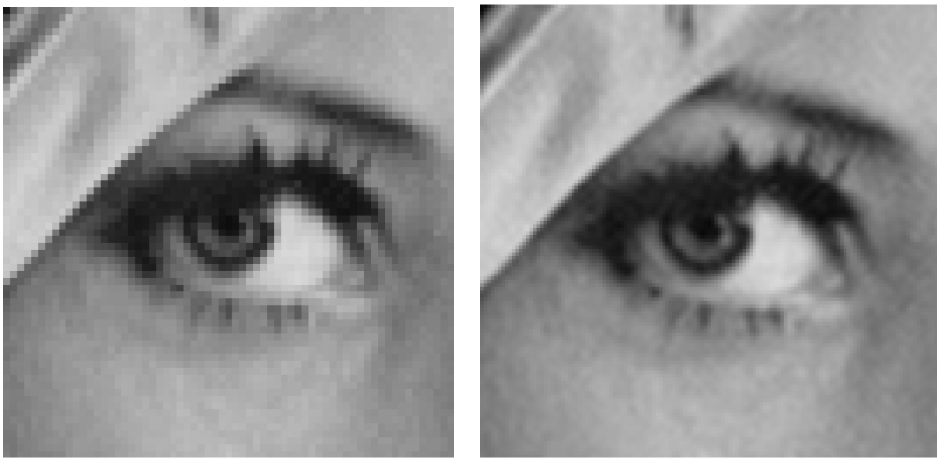
originale

JPEG (compression 10)

JPEG (compression 20)

FIGURE 8

7.3. Zooms. Il s'agit ici de réinterpoler une image donnée sur une grille de taille $N \times N$ aux points demi-entiers. Ainsi on obtient une image plus grande qui reste plus lisse qu'une image provenant d'un zoom par duplication des pixels. Les zooms sont un cas particulier de rééchantillonnage dont un autre exemple est la rotation (voir plus bas).



zoom direct **zoom par FFT**

FIGURE 9

7.4. Autres types de rééchantillonnages. Comme on l'a vu au § 5, la TFD offre un cadre agréable pour effectuer des translations d'une image, et comme on l'a vu une rotation peut être décomposée en trois transvections dont chacune se ramène à une translation sur un des deux axes. D'autres méthodes de rééchantillonnage

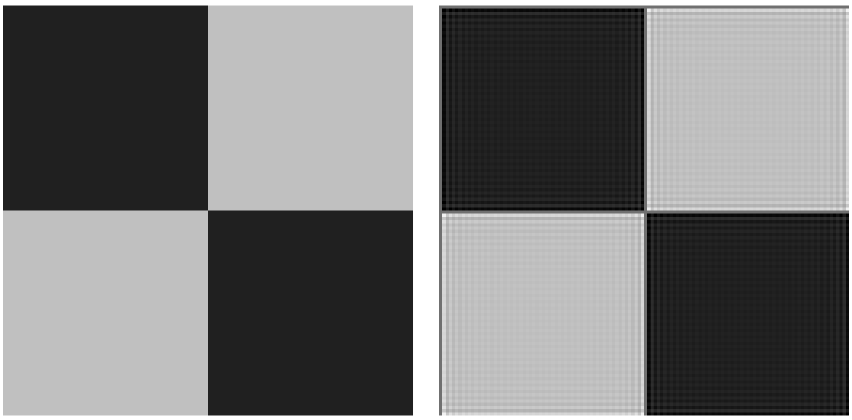


image originale **image translatée**

FIGURE 10.

sont possibles pour effectuer une rotation, en particulier une interpolation bilinéaire. Cependant, cette méthode conduit à une perte progressive des détails de l'image, ce que montre la dernière expérience (figure 10). On notera l'effet de Gibbs introduit par la translation de vecteur $(1/2, 1/2)$ qui revient à sous-échantillonner un zoom de l'image aux points impairs...

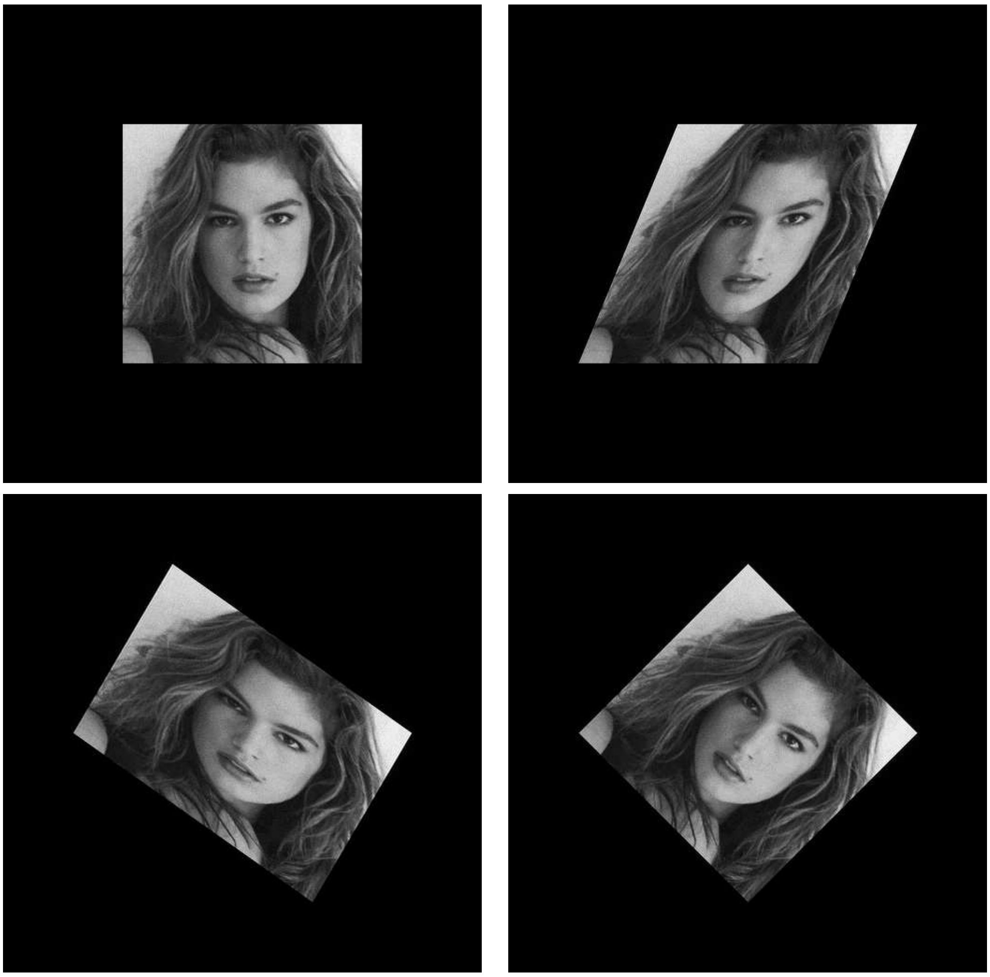


FIGURE 11. rotation décomposée en trois «translations»

7.5. Effet de Gibbs. Comme il a été remarqué plus haut, le zoom par TFR introduit un effet de Gibbs (en effet le *zero-padding* consiste exactement à mettre les hautes fréquences à zéro, ce qui est la cause de l'effet de Gibbs). Cet effet est surtout

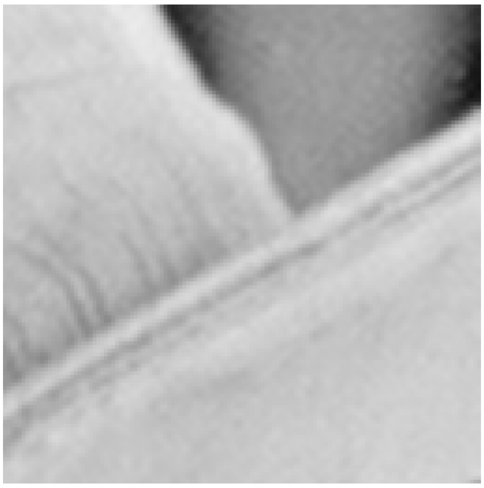
huit rotations par TFR

huit rotations par interpolation bilinéaire

FIGURE 12

visible aux bords de l'image, car la TFR considère, de manière irréaliste, que les bords opposés de l'image sont en fait voisins, ce qui produit dans la plupart des cas une discontinuité forte aux bords de l'image. La TCD, elle, suppose que l'image est symétrisée, puis périodisée. Dans ce cas, la supposition de voisinage entre deux bords opposés est tout à fait légitime. Les images qui suivent montrent bien la différence entre les deux procédés.

zoomée par FFT



zoomée par DCT

FIGURE 13

7.6. Échange de phases entre deux TF. Dans l'expérience qui suit, on a d'abord calculé les TF de deux images différentes puis on a échangé les phases des deux TF. Le résultat montre bien l'importance très grande de la phase pour une TF, et nous laisse présager que des modifications, potentiellement très grandes, opérées sur le module de la TF n'affectent pas beaucoup l'information contenue dans l'image, ou du moins la perception qu'on en a.

Images originales

Après échange des phases

FIGURE 14

7.7. Anti-aliasing. On désigne par le terme d'*aliasing* le repliement de spectre dû a l'échantillonnage. Si l'image a des fréquences au dessus d'un certain seuil (inversement proportionnel au pas d'échantillonnage) les bords du spectre deviennent inexacts. On constate alors un bruit de haute fréquence sur l'image dû au rehaussement des hautes fréquences. Un moyen de supprimer ce repliement est de multiplier la TF par une fonction qui s'annule au bord du spectre, comme dans l'exemple qui suit.

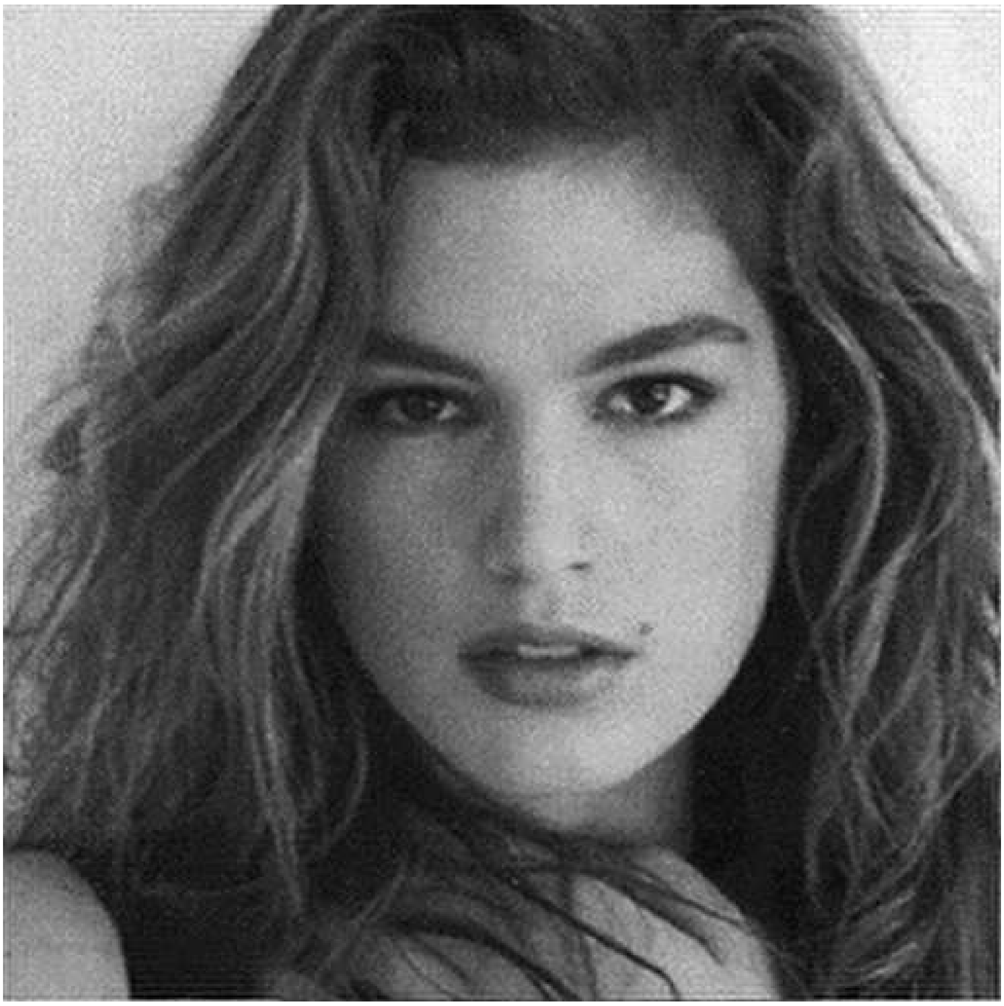
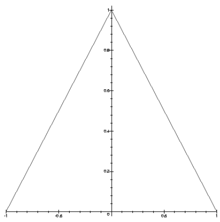


image originale

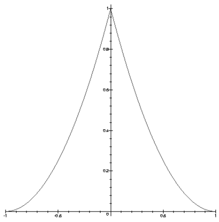
FIGURE 15

reconstitution Wiener(1)



reconstitution Wiener(1)

reconstitution Wiener(2)



reconstitution Wiener(2)

7.8. Aspect non vibratoire d'une image. Quand on décompose une fonction en base de Fourier, chaque coefficient capture une partie du comportement global de la fonction. Or, dans une image, on voit des zones distinctes où la fonction qui la représente a des comportements indépendants. En ce sens, la transformée de Fourier parait artificielle. Ce qui serait plus approprié pour représenter une image serait une base de fonctions à supports disjoints qui peuvent caractériser de manière plus pertinente les comportements locaux de la fonction image ; d'où la théorie des ondelettes et ses applications en traitement d'image. Il n'en reste pas moins que la TFR reste une « astuce » algorithmique très puissante qui a permis de résoudre beaucoup de problèmes dans le domaine…

Les trois schémas qui suivent montrent bien cet aspect local des images, à mettre en contraste avec l'aspect vibratoire de la musique.

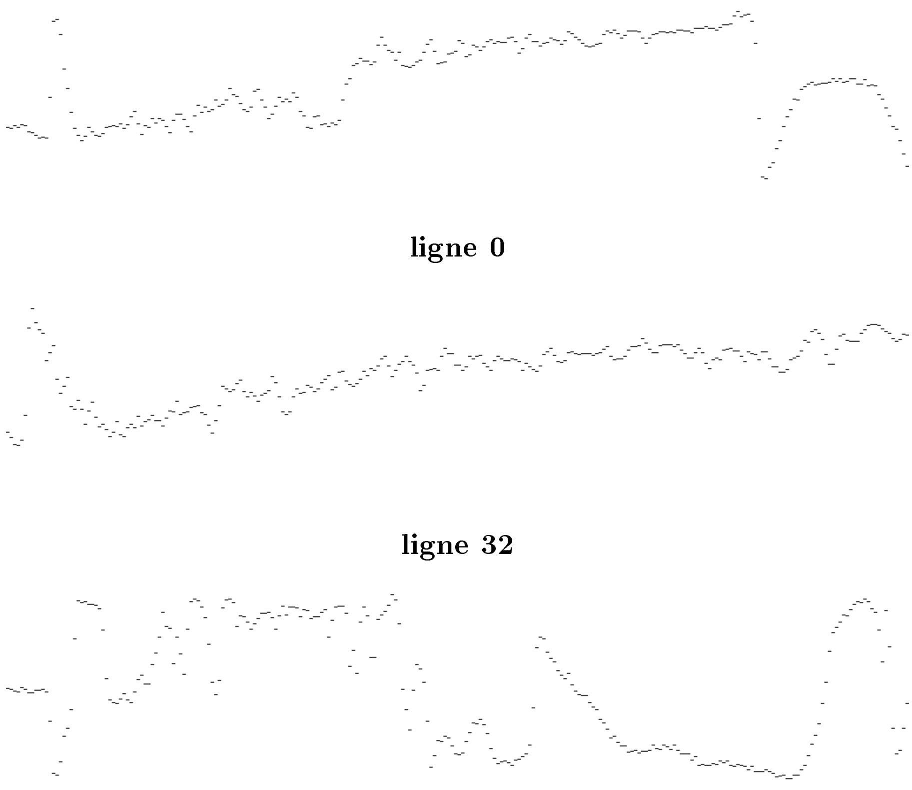


Figure 16. Quelques coupes dans une image

8. Formulaire (toutes les transformées de Fourier en une)

8.1. Transformée de Fourier discrète sur $\mathbb{R}$

f 2π-périodique, $f \in L^2([0,2\pi])$ $\left(\int_0^{2\pi} |f|^2 \text{ fini}\right)$

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f) e^{ikx}, \quad c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

8.2. Transformée de Fourier discrète sur $\mathbb{R}^2$

f $(2\pi, 2\pi)$-périodique, $f \in L^2\left([0,2\pi]^2\right)$ $\left(\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x,y)|^2 dxdy \text{ fini}\right)$

$$f(x,y) = \sum_{(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^2} c_{k_1,k_2}(f) e^{ik_1x+ik_2y}$$

$$c_{k_1,k_2}(f) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_o^{2\pi} f(x,y) e^{-ik_1x-ik_2y} dxdy$$

8.3. Réseau de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, ...

- Réseau de $\mathbb{R}$: $\{kT\}_{k\in\mathbb{Z}}$.
- Réseau de $\mathbb{R}^2$: $\Gamma = \left\{x_1e_1 + x_2e_2,\ (x_1,x_2)\in\mathbb{Z}^2\right\}$.
- Réseau réciproque (ou dual) : $\Gamma^* = \left\{k_1e_1^* + k_2e_2^*,\ (k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^2\right\}$, et $e_i\cdot e_j = 2\pi\delta_{ij}$.
- Surface de la maille M : S

$$M = \left\{x_1e_1 + x_2e_2 \mid (x_1,x_2)\in[0,1]^2\right\}.$$

- Surface de la maille duale : S^*

$$SS^* = (2\pi)^2.$$

- *Cellule* du réseau Γ : tout ensemble D du plan tel que les $(D+\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ forment un pavage du plan.

8.4. Transformée de Fourier discrète sur un réseau Γ

Si f est Γ-périodique et de carré intégrable sur la maille,

$$f(x) = \sum_{k\in\Gamma^*} c_k(f) e^{ik\cdot x}, \quad c_k(f) = \frac{1}{S}\int_M e^{-ik\cdot x} f(x) dx$$

où l'on a noté

$$k = k_1e_1^* + k_2e_2^*, \quad x = x_1e_1 + x_2e_2, \quad k\cdot x = 2\pi\left(k_1x_1 + k_2x_2\right).$$

8.5. Convolution Γ-périodique

Si u et v sont Γ-périodiques, on pose

$$(u * v)(x) = \int_D u(x-y)v(y)dxdy$$

où D est une cellule quelconque. Alors

$$c_k(f*g) = Sc_k(f)c_k(g) \quad \forall\, k \in \Gamma^*$$

8.6. Peignes de Dirac

– Masse de Dirac en $a \in \mathbb{R}$: δ_a

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$$

– Peigne de Dirac sur un réseau Γ :

$$\Delta_\Gamma = \sum_{\gamma \in \Gamma} \delta_\gamma$$

$$\langle \Delta_\Gamma, \varphi \rangle = \sum_{\gamma \in \Gamma} \varphi(\gamma),\ \ \varphi \text{ continue à support compact}$$

8.7. Transformée de Fourier discrète des distributions Γ-périodiques

Si u est Γ-périodique,

$$u = \sum_{k \in \Gamma^*} c_k(u) e^{ik\cdot x} \text{ (« série de Fourier »)}$$

avec

$$c_k(u) = \frac{1}{S}\left\langle u, \chi(x)e^{-ik\cdot x}\right\rangle$$

où χ est une fonction C^∞, partition de l'unité :

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \chi(x+\gamma) = 1$$

($c_k(u)$ ne dépend pas de χ).

8.8. Série de Fourier d'un peigne de Dirac

$$\Gamma_\gamma = \sum_{\gamma \in \Gamma} \delta_\gamma$$

$$\Delta_\Gamma = \frac{1}{S}\sum_{k \in \Gamma^*} e^{ik\cdot x} \text{ (développement en série de Fourier de } \Delta_\Gamma)$$

8.9. Convolution

– dans $L^1(\mathbb{R}^N)$:

$$f * g(x) = \int f(x-y)g(y)dy$$

– u distribution à support compact, $\varphi \in \mathcal{S}$:

$$u * \varphi(x) = \langle u, \varphi(x,.)\rangle \in \mathcal{S}$$

– $u \in \mathcal{S}'$, $v \in \mathcal{S}'$ à support compact

$$\langle v * u, \varphi\rangle = \langle v, \check{u} * \varphi\rangle$$

$$\langle \check{u}, \varphi\rangle = \langle u, \check{\varphi}\rangle\,,$$

$$\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$$

8.10. Transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'$

– $f \in L^1$:

$$\widehat{f}(\xi) = \int f(x)e^{-ix\cdot\xi}dx$$

$$\overline{\mathcal{F}}(f)(\xi) = \int f(x)e^{ix\cdot\xi}dx$$

– $u \in \mathcal{S}'$:

$$\langle \widehat{u}, \varphi\rangle = \langle u, \widehat{\varphi}\rangle$$

– Dans tous les cas,

$$\overline{\mathcal{F}}\left(\mathcal{F}\left(f\right)\right)$$

– Transformée de Fourier d'un peigne de Dirac

$$\widehat{\Delta}_\Gamma = S^*\Delta_{\Gamma^*}$$

8.11. Convolution et Fourier

– u et v deux distributions tempérées, l'une à support borné,

$$\widehat{u * v} = \widehat{u}\cdot\widehat{v}$$

– v une distribution tempérée, φ une fonction telle que $\widehat{\varphi}$ soit une distribution à support borné. Alors

$$\widehat{\varphi\cdot u} = (2\pi)^{-N}\,\widehat{\varphi} * \widehat{u}$$

8.12. Unification du formalisme. Si u est une distribution Γ-périodique, alors

$$\widehat{u} = (2\pi)^2\sum_{k\in\Gamma^*} c_k(u)\delta_k$$

où les $c_k(u)$ sont les coefficients de Fourier de u.

8.13. Commodités du formalisme

– u Γ-périodique veut dire :

$$u = \Delta_\Gamma * (\chi u) \text{ où } \chi \text{ est une partition de l'unité.}$$

– Γ-périodisée d'une fonction ou d'une distribution u :

$$\widetilde{u} = \Delta_\Gamma * u$$

– En Fourier, cela donne :

$$\widehat{\widetilde{u}} = \widehat{\Delta_\Gamma * u} = S^* \Delta_\Gamma \cdot \widehat{u}$$

– Échantillonnage sur Γ d'une fonction φ continue :

$$\widehat{\varphi \cdot \Delta_\Gamma} = (2\pi)^{-2} S^* \widehat{\varphi} * \Delta_\Gamma = \frac{1}{S} \widehat{\varphi} * \Delta_{\Gamma^*}$$

« Échantillonner sur Γ revient a Γ^*-périodiser le spectre ».

8.14. Reconstruction de Shannon. Si $\widehat{\varphi} \subset D$, cellule de Γ^*, alors

$$\varphi(x) = \frac{1}{S^*} \sum_{\gamma \in \Gamma} \varphi(\gamma) \left(\overline{\mathcal{F}} (1_D) \right) (x - \gamma)$$

où : $1_D = 1$ sur D, 0 ailleurs.

– en 1-D : $\Gamma = T\mathbb{Z}$, $e_1 = T$, $e_1^* = 2\pi/T$, $D = [-\pi/T, \pi/T]$, cellule du réseau dual. Alors si $\mathrm{Supp}(\varphi) \subset [-\pi/T, \pi/T]$,

$$\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(kT) \frac{\sin\left(\frac{\pi}{T}(x - kT)\right)}{\frac{\pi}{T}(x - kT)}$$

car

$$\overline{\mathcal{F}} (1_D) (x) = 2 \frac{\sin(\frac{\pi}{T} x)}{x} \text{ et } S^* = \frac{2\pi}{T}$$

8.15. La transformée de Fourier discrète

– Si u est un peigne supporté par Γ,

$$u = \sum_{\gamma \in \Gamma} u(\gamma) \delta_\gamma,$$

alors $\widehat{u}$ est Γ^*-périodique.

– si u est Γ-périodique, $\widehat{u}$ est supportée par Γ.

– Si u est supportée par Γ,

$$u = \sum_{\gamma \in \Gamma} u(\gamma) \delta_\gamma,$$

et si u est $\Gamma_{n,m}$-périodique, où $\Gamma_{n,m}$ est engendré par (ne_1, me_2) avec (e_1, e_2) base de Γ, alors $\widehat{u}$ est supportée par $\Gamma_{1/n,1/m}$ et elle est Γ^*-périodique.

Donc u est décrite par les valeurs en matrice (n, m),

$$u_\gamma = u_{k,l} \quad \gamma \in \{ke_1 + le_2,\ 0 \leqslant k \leqslant n-1,\ 0 \leqslant l \leqslant m-1\}$$

et $\widehat{u}$ par les valeurs en matrice (n, m),

$$\widehat{u}_{\gamma^*} = \widehat{u}_{k,l} \quad \gamma \in \left\{k\frac{e_1^*}{n} + l\frac{e_2^*}{m},\ 0 \leqslant k \leqslant n-1,\ 0 \leqslant l \leqslant m-1\right\}.$$

L'application qui aux $u_{k,l}$ associe les $\widehat{u}_{k,l}$ s'appelle la transformée de Fourier discrète et elle ne dépend que de n et m (et pas de Γ).

Jean-Michel Morel, École Normale Supérieure de Cachan, 61 avenue du Président Wilson, 94 Cachan cedex

Saïd Ladjal, École Normale Supérieure de Cachan, 61 avenue du Président Wilson, 94 Cachan cedex