THÉORIE DE L'ÉCHANTILLONNAGE ET SATELLITES D'OBSERVATION DE LA TERRE

par

Bernard Rougé

Introduction

La chaîne image de capteur optique embarqué sur satellite est constituée d'une suite de transformations de l'image. Certaines de ces transformations sous-échantillonnent ou rendent continu le signal 2D. La prise en compte de la théorie de l'échantillonnage dans la définition des caractéristiques de la chaîne constitue donc un passage obligatoire.

Or, nous avons vu dans la première partie (voir l'article de J.-M. Morel) que le principe d'échantillonnage de Shannon nécessite l'hypothèse de discrétisation de l'image sur un réseau Γ infini et sa compacité spectrale. Ces conditions ne peuvent bien évidemment être toutes réalisées. L'opération de fenêtrage qui limite le domaine d'étude est donc un passage obligé malheureusement toujours pénalisant.

L'objectif de cette partie est d'adapter l'échantillonnage au cas concret des images de satellite. Pour cela on cherchera à spécifier au mieux les diverses transformations constituant la chaîne image, afin de s'approcher au plus près, au sens d'une norme, d'une image discrète « idéale » que l'on définira. Ceci nous conduira à souligner l'importance décisive des traitements mathématiques dans la conception des nouveaux satellites d'observation.

1. Chaîne image et échantillonnage

1.1. Systèmes spatiaux d'observation. Une image optique est une suite de comptes numériques qui une fois étalonnés mesurent des luminances dans une bande spectrale (Watt/m^2/stéradian/μ^{-1}). Le but de la chaîne image est de restituer le plus fidèlement possible les luminances en entrée d'instrument.

La chaîne image (ici cas de la chaîne image très haute résolution) est séparée en deux grands systèmes reliés par les transmissions bord-sol : l'instrumentation et les moyens de calcul bord d'un côté et le segment sol de l'autre.

Bord. Le paysage constitue un signal 2D qui émet des photons. Il peut être considéré comme processus discret et irrégulièrement échantillonné dans la mesure où le nombre de photons collectés par le capteur est faible. Cependant, cette discrétisation reste très fine par rapport à la taille des pixels de l'image. L'image est ensuite focalisée sur le système détecteur à barrette photo-électronique installé dans le plan focal. L'image est de dimension finie. En effet, les segments images sont limités en largeur par le nombre de points de la barrette. Ces segments sont ensuite découpés en images carrées. De plus, le flux collecté par la pupille d'entrée pendant le temps d'intégration (ou temps de pose) du système optique est fini. Ce système photo-électronique procède à un échantillonnage régulier. En sortie de ce système est obtenue une image discrète mais à valeurs continues. Cette image est alors transformée par le Convertisseur Analogique Numérique (CAN) en niveau de gris codés sur 8 bits (en géneral). L'image est alors un tableau de nombres entiers compris entre 0 et 255. Les traitements de compression sont effectués en entiers pour des raisons de hardware (place mémoire, temps calcul).

Sol. La décompression mais surtout la restauration, qui sont des traitements lourds, sont effectués dans le segment sol. Les images intermédiaires sont toutes des images discrètes numériques. Enfin, la visualisation qui fait intervenir un écran puis l'œil procède à une transformation discret-continu.

Ainsi aux deux bouts de la chaîne paysage-œil, les signaux 2D sont finement discret ou continus. On pourra considérer la transmission bord-sol également comme discrète bien que ces signaux discrets soient transmis par une porteuse qui est un signal analogique.

Dans le cadre limité de cette partie nous n'étudierons pas la partie de la chaîne image relative au système de visualisation. Nous nous concentrerons sur l'étude succincte du système opto-électronique numérique.

1.2. Modélisation mathématique du système opto-électronique numérique

Au premier ordre nous considérerons le système opto-électronique numérique comme une suite d'opérations linéaires, continues et invariantes par translation. Il s'agit donc d'une suite de convolutions. Puis une discrétisation du résultat est effectuée par la barrette. Après avoir précisé le modèle mathématique en spatial et en spectral et les notations utilisées, nous détaillerons les caractéristiques du réseau, du système optique, du système photo-électronique ainsi que du bruit.

1.2.1. *Notations.* Nous reprendrons les notations de la partie précédente consacrée à la TF (transformée de Fourier) continue, à un changement de variable près dans le domaine spectral. Les mathématiciens utilisent la pulsation appelée ω ou k et les physiciens la fréquence f. Nous reprendrons ici la notation fréquentielle :

$$2\pi \cdot f = \omega = k, \quad f = (f_1, f_2), \quad f_1 \text{ et } f_2 \text{ s'exprime en } m^{-1}.$$

Notations relatives au réseau. Le réseau image 2D (direct) est appelé Γ et sa base (e_1, e_2).

Le réseau réciproque est appelé Γ^* et sa base (e_1^*, e_2^*). Elle est définie par

$$e_i^* e_j^* = \delta_{ij}.$$

Soit R une cellule réciproque et S la surface de la maille du réseau.

Soit la distribution Γ-périodique appelée *peigne de Dirac* Π_Γ.

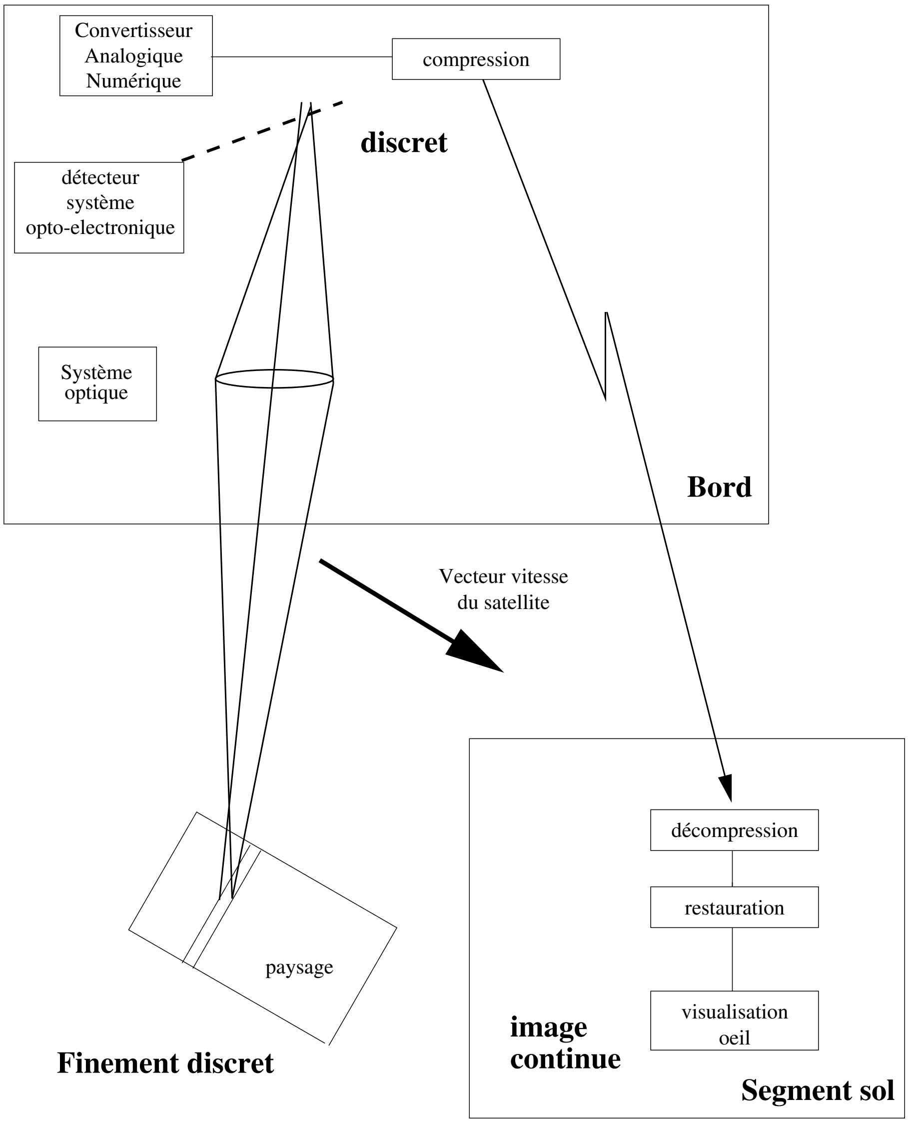

FIGURE 1

La TF continue d'une distribution u Γ-périodique est engendrée par les coefficients de Fourier (cf. partie précédente).

$$c_f(u) = \frac{1}{S}\langle u, \chi e^{-2i\pi f\cdot x}\rangle$$

où χ est une partition Γ-périodique de l'unité.

L'image est de dimension $N \times M$ et nous définirons le réseau $\Gamma_{N\times M}$-périodique de base (Ne_1, Me_2) qui Γ-périodise l'image.

Soit une fenêtre correspondant à la taille de l'image $F_{N\times M}$ et u l'image considérée comme une distribution.

Notation relative à l'instrument. L'instrument est caractérisé par la fonction (réponse impulsionnelle)

$$h(x); \quad x = (x_1, x_2) \in \mathcal{R}^2$$

dont la TF est

$$\widehat{h}(f) = FTM(f); \quad f = (f_1, f_2) \in \mathcal{R}^2.$$

Elle est appelée FTM (Fonction de Transfert de Modulation). C'est une fonction à support compact. Ainsi, h est très régulière (analytique).

L'objet observé ou paysage, appelé o, est une mesure de Radon à support compact puisqu'il s'agit d'un processus de génération de photons, par nature discret, dont la collecte est limitée par la pupille d'entrée du télescope. La TF continue de o est alors une fonction continue (analytique).

Nous appellerons b le bruit discret total du système.

1.2.2. *Modélisation mathématique.* Le système photo-électronique numérique est modelisé par la distribution

$$u = F_{N\times M}\Pi_\Gamma(h \star o) + b.$$

Considérons la $\Gamma_{N\times M}$-périodisée de la distribution u

$$\widetilde{u} = F_{\Gamma N\times M} \star ([F_{N\times M}\Pi_\Gamma(h \star o)] + b)$$

dont la TF continue est

$$\widehat{\widetilde{u}} = \widehat{\Pi}_{\Gamma N\times M}\left(\left[\widehat{F}_{N\times M} \star \Pi_\Gamma \star (FTM \cdot \widehat{o})\right] + \widehat{b}\right)$$

où les chapeaux indiquent qu'il s'agit des TF continues.

L'image est considérée comme de taille très importante donc $\widehat{F}_{N\times M}$ est proche de la distribution de Dirac et peut être négligée.

En définitive la formulation finale est la distribution $\Gamma_{N\times M}$-périodique (il s'agit donc d'une expression discrète)

$$\widehat{\widetilde{u}} = \widehat{\Pi}_{\Gamma N\times M}\left([\Pi_\Gamma \star (FTM \cdot \widehat{o})] + \widehat{b}\right).$$

Ainsi, grâce à la $\Gamma_{N\times M}$-périodisation de l'image, tous les raisonnements discrets en spatial comme en spectral sont permis et seule la TF continue est utilisée.

1.2.3. *Réseau image.* Nous allons à présent décrire le mode d'acquisition physique des images, commun aux satellites embarquant un capteur à matrice linéaire CCD (Charge Coupled Device).

Ce mode d'acquisition produit en général un réseau orthogonal carré (vitesse et barrette ont des directions orthogonales).

La barrette est constituée d'une suite de photoéléments adjacents dont la distance entre le centre de deux détecteurs élémentaires consécutifs projetés au sol est égale à p. Une ligne de points est acquise à chaque instant t_e (t_e est appelé le temps d'échantillonnage, il est égal, en général au temps de pose) et le pas entre deux acquisitions ligne est $\Delta\tau = v \cdot t_e$ (v est la vitesse du point sub-satellite). La barrette CCD placée au plan focal du système optique est vidée dans des registres. Ces registres sont alors lus. Le satellite s'est déplacé pendant l'intervalle de temps d'échantillonnage et la barrette est de nouveau en mesure d'acquérir une nouvelle ligne. Le temps d'échantillonnage t_e est réglé de telle sorte que p soit égal à $v \cdot t_e$. Dans cette configuration (cf. fig. suivante) la projection au sol des pixels constitue une partition du sol. Le sol est donc balayé une seule fois.

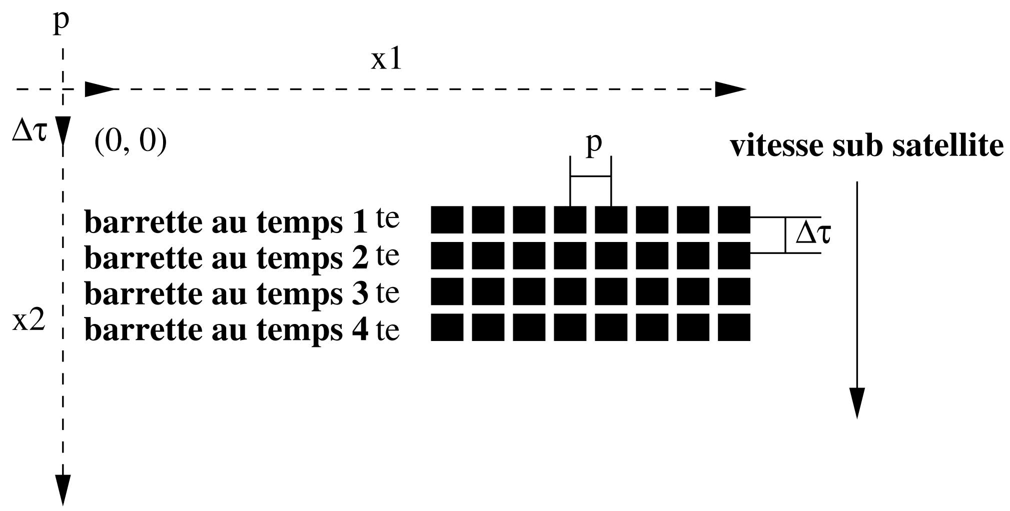

FIGURE 2

Le réseau Γ ainsi construit est à maille carrée et sa base est constituée des vecteurs

$$(p, 0), \quad (0, \Delta\tau).$$

Nous verrons (cf. § 3.2) que la souplesse du système satellite-barrette permet de générer une variété infinie de réseaux.

1.2.4. *Caractéristiques radiométriques du système opto-électronique*

La FTM du système global est la TF de la réponse impulsionnelle globale. Elle exprime le facteur d'atténuation des fréquences spatiales. Plus les fréquences sont élevées plus la FTM est faible. Le choix de la FTM est guidé par le fait que la FTM est à support compact.

1.2.4.1. *FTM*

1.2.4.1.1. *Système optique.* Le système optique considéré est un système à lumière incohérente. Dans le cas d'une pupille symétrique par rapport à l'axe de visée, la FTM est égale à la fonction d'autocorrélation de la fonction caractéristique de l'ouverture pupillaire de l'instrument (en première approximation du principe d'Huyghens et compte non tenu des aberrations optiques).

Nous nous placerons ici dans le cas le plus courant d'une pupille circulaire de diamètre D, pour une lumière monochromatique de longueur d'onde λ et le satellite étant à une altitude H.

La FTM associée a pour expression 1D (s'il n'y a pas d'occultation centrale) si l'on pose $z = |f|$

$$FTM_{op}(f) = FTM_{op}(z) = \frac{2}{\pi}\text{Arc}\cos\left(\frac{z}{z_c}\right) - \frac{z}{z_c}\sqrt{1-\left(\frac{z}{z_c}\right)^2},$$

$$z_c = \frac{D}{\lambda \cdot H};$$

z_c est la fréquence d'annulation de la FTM que l'on appelle fréquence de coupure optique.

Le graphe de la FTM optique est

1.2.4.1.2. *Système photo-électronique.* Chaque détecteur élémentaire est un intégrateur de flux correspondant à une réponse impultionnelle séparable égale à la fonction carrée 2D (fonction constante sur le carré unité $[-p/2, p/2] \times [-p/2, p/2]$) et nulle ailleurs ($p = \Delta\tau$). Alors $h_{\text{dét}}(x) = \Pi_p(x_1)\Pi_p(x_2)$ et la FTM correspondante est (cas $p = 1$)

$$FTM_{\text{dét}}(f) = \sin c(f_1) \sin c(f_2),$$
$$\sin c(r) = \frac{\sin(\pi r)}{\pi r},$$

chacune des composantes peut être représentée par la courbe

1.2.4.1.3. *Filé.* L'effet du filé est couplé avec l'intégration du détecteur. Pendant le temps d'échantillonnage le détecteur a bougé (effet de flou). Ceci se modélise par une réponse impulsionnelle égale à une fonction porte 1D dans le sens de la vitesse. Ce qui correspond à la direction colonne de l'image (variable x_2 en spatial et f_2 en spectral)

$$FTM_{fil}(f) = \sin c(f_2).$$

1.2.4.1.4. *FTM globale.* Le système opto-électronique est décrit par une suite d'opérations de convolution puisqu'il est linéaire, continu et invariant par translation. Ceci conduit à la représentation de la FTM globale par le produit de toutes les FTM intermédiaires

$$FTM(f) = FTM_{op}(f) FTM_{\text{dét}}(f) FTM_{fil}(f_2)$$

dont l'expression duale est la convolution des réponses impulsionnelles

$$h(x) = h_{op}(x) \star h_{\text{dét}}(x) \star h_{fil}(x_2)$$

1.2.4.2. *Bruit.* La lumière est constituée de quanta (photons) et ne peut être assimilée à un processus continu puisque les détecteurs ont une taille petite et sont transformés en compteur de photons. On considère que le nombre N d'événements du type « arrivée de photon » en un temps t_e suit une loi de Poisson. Cette loi a pour espérance mathématique le nombre moyen de photons incidents arrivant pendant le temps t_e, et pour variance la même valeur. Des bruits instrumentaux sont adjoints au bruit photonique. Ils sont indépendants. Le rapport signal à bruit moyen, dit SNR, est alors égal au quotient de la moyenne du signal par l'écart type du signal pour la luminance moyenne

$$SNR = \frac{\text{Moyenne}}{\text{écart type}}$$

Ce bruit est considéré en première approximation comme constant sur toute l'image. Il est donc stationnaire. De plus, il est blanc. Une formulation plus précise est présentée dans les références suivantes [LOM91], [LAP95], [LAT94].

1.3. Questions relatives à l'échantillonnage cas de SPOT. Le réseau d'échantillonnage est directement lié au mouvement du satellite et au détecteur. Dans le cas du réseau décrit ci-dessus qui est celui des SPOT actuels en mode nominal, nous allons interpréter le modèle mathématique. Pour cela nous donnerons auparavant les caractéristiques utiles de SPOT.

1.3.1. *Caractéristiques de SPOT.* La famille des satellites SPOT est constituée de satellites à défilement placés sur une orbite d'altitude moyenne 830km.

Le satellite SPOT embarque deux instruments visibles appelés HRV1 et HRV2 (HRV pour Haute Résolution Visible).

Le système optique de ces instruments est constitué d'un télescope de diamètre pupillaire 0.33m et de focale 1m.

Dans la bande panchromatique les détecteurs constituent une barrette linéaire équivalente de 6000 pixels carrés de zone photo sensible 13 μm (SPOT1, 2, 3, 4), (6.5 μm pour SPOT5) de côté. La projection au sol de tels pixels est de $10m \times 10m$. Les images finales sont de taille 6000×6000 points.

Il existe également pour SPOT1,2,3,4 trois canaux couleur dans le domaine visible et proche infrarouge. SPOT4 possède en plus un quatrième canal moyen infrarouge. La taille des images couleur est de 3000×3000 pixels. Ces pixels ont une trace au sol de $20m \times 20m$.

La barrette en nominal est perpendiculaire à la direction de la vitesse

1.3.2. *Repliement spectral.* Les instruments HRV sont des instruments à coupure fréquentielle provoquée par le détecteur. La fréquence de coupure optique de SPOT est très loin de celle du détecteur, sa valeur est

$$f_c = \frac{D}{\lambda H}$$

et sa période de coupure correspondante

$$P_c = \frac{\lambda H}{D}.$$

Pour le canal panchromatique de longueur d'onde $0.5\mu m$ nous trouvons $P_c = 1.4m$. alors que la taille du pixel au sol est de $10m$.

La modélisation mathématique discrète fait apparaître la convolution $\widehat{\Pi}_\Gamma \star (FTM \cdot \widehat{o})$ qui constitue une périodisation discrète de la fonction continue à support compact $FTM \cdot \widehat{o}$.

En adoptant comme unité dans l'espace direct et en spectrale son inverse la taille du détecteur au sol, nous obtenons

$$P_c = 0.14 \quad \text{et} \quad f_c = 7.$$

Le spectre du paysage $FTM \cdot \widehat{o}$ est *a priori* inconnu, aussi nous ne représenterons que la FTM.

La FTM suivant la colonne (variable f_2) est représentée par la fonction dont le graphe est le suivant.

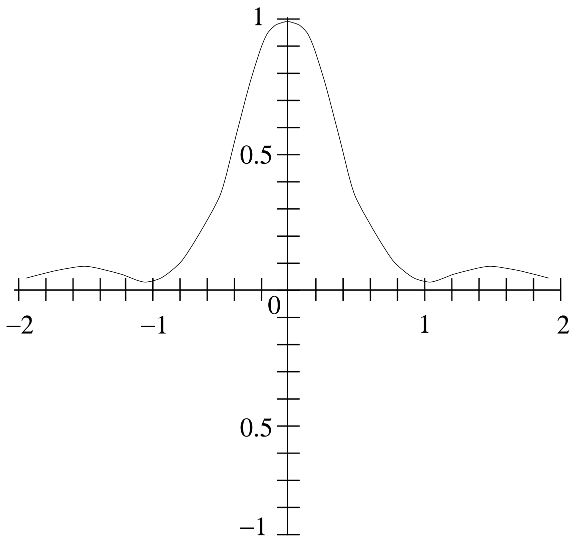

FIGURE 3

La représentation choisie ici ne s'étend pas jusqu'à la coupure optique qui est égale à $f_2 = 7$. En effet la FTM est déjà très faible au niveau du second lobe.

Nous allons maintenant représenter l'effet de la convolution spectrale liée à l'échantillonnage. La base du réseau Γ est composée des vecteurs orthogonaux

$$[(10m, 0), (0, 10m)].$$

Après la normalisation précédente ils deviennent unitaires. La base du réseau réciproque Γ^* est également $(1, 0), (0, 1)$.

En ne tenant compte que de la contribution de la réplique centrée sur $f_1 = 1$ (très largement la plus importante pour $0 < f_2$) la périodisation de la fonction précédente conduit au graphe ci-dessous.

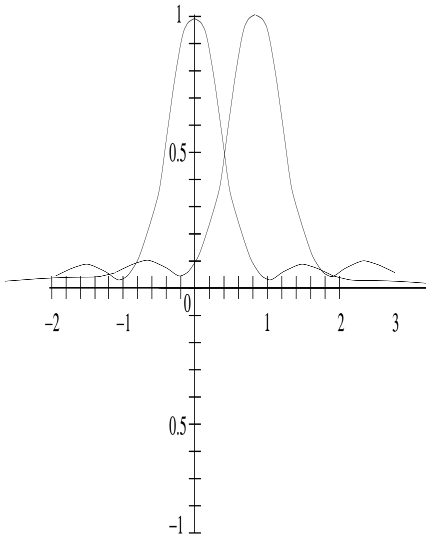

FIGURE 4

Le repliement spectral est ici très important puisqu'il est supérieur à 0.3. Il l'est encore plus dans la direction de la barrette puisque l'effet de filé produit par le déplacement du satellite est nul dans cette direction. SPOT comme tous les satellites d'observation de la terre est sous-échantillonné.

Est-ce dommageable à la qualité des images ?

Un échantillonnage critique serait évidemment préférable. Cependant le repliement représenté sur le graphe précédent serait significatif d'un paysage qui spectralement contient toutes les fréquences (le phénomène de repliement est relatif au produit $FTM \cdot \widehat{o}$ et non pas à la seule FTM). Une constatation empirique a conduit à vérifier que la plage de fréquences $[10m^{-1}, 5m^{-1}]$ était faiblement réprésentée dans le paysage. Cependant cette constatation n'est plus vraie aux fréquences plus importantes correspondant à la taille des détails des constructions urbaines.

Aussi, nous allons proposer des solutions permettant de remédier à ce sous-échantillonnage des SPOT actuels mais surtout des satellites futurs. Auparavant des notions utiles au réglage des paramètres spatiaux instrumentaux seront définies.

2. Évaluation et réglage du système opto-électronique numérique

2.1. Évaluation d'un système. Nous venons de voir qu'un système global peut être caractérisé par un triplet

$$(FTM, b, R).$$

Ce triplet est cependant difficilement maniable, nous le simplifierons donc.

2.1.1. *Support essentiel de la FTM.* La FTM que l'on vient de définir est à support compact et réelle. Ce support correspond au support de la FTM optique.

Cependant l'ensemble du support ne peut être utilisé car il est perturbé par un bruit blanc qui pour les hautes fréquences devient prépondérant.

Aussi nous définirons le support essentiel d'un instrument comme le sous-ensemble Se du support de la FTM égal à

$$Se = \{f \mid n/SNR < |FTM(f)|\}.$$

Le nombre n est empiriquement défini. Il dépend notamment du paysage et des performances de la restauration. Dans le cas de satellites du type SPOT ou plus bruités, n est proche de 5. Ci-dessous est représenté le cas de la FTM 1D de SPOT suivant la direction de la vitesse de déplacement (variable de fréquence f_2)

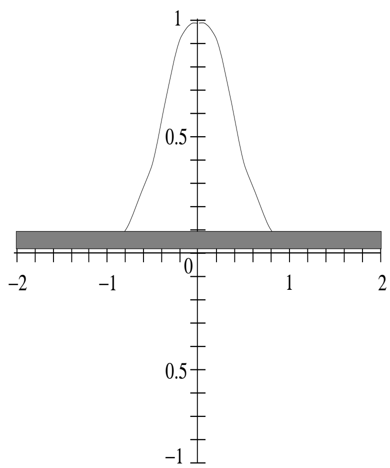

FIGURE 5. Support essentiel 1D suivant la variable f_2 dans une configuration de type SPOT

Nous appellerons So le support de l'optique, Sd celui du détecteur, Sf celui du filé et R la cellule réciproque relative au réseau d'échantillonnage Γ^*.

Le support essentiel de la FTM globale est appelé Se.

2.1.2. *Caractérisation par un doublet.* Alors, une caractérisation compacte d'un système opto-électronique numérique est le doublet

$$(Se, R).$$

Les caractéristiques radiométriques (bruit et FTM) sont synthétisées dans le doublet par Se.

Le doublet est constitué de deux domaines. Nous proposons de caractériser ce doublet par un seul nombre afin de procéder à des comparaisons de performances des systèmes entre eux.

2.1.3. *Définition de la résolution spectrale.* Nous appellerons résolution spectrale du doublet (Se, R)

$$Rs_{(Se,R)} = \mu(Se \cap R - C_s(Se \cap R)) = \mu(Se \cap R) - \mu(C_s(Se \cap R))$$

La résolution spectrale est constituée d'un terme principal moins un terme perturbateur qui représente le repliement spectral (aliasing).

Dès lors une forme faible (en général suffisante) du principe de Shannon qui s'exprime par un repliement spectral nul, se traduit par l'annulation du terme secondaire (où $C_s(Se \cap R)$ est le complémentaire de $Se \cap R$ dans Se)

$$\mu(C_s(Se \cap R)).$$

Ci-dessous est illustré le cas où le support essentiel de la FTM du système opto-électronique est un cercle circonscrit à la cellule réciproque R.

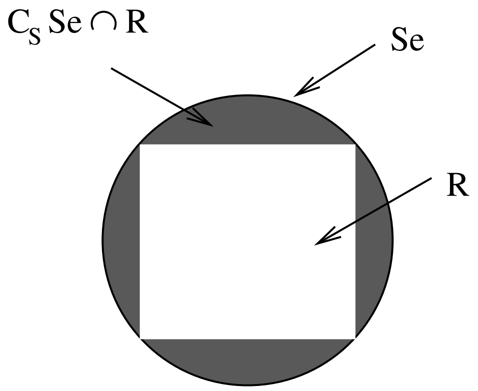

FIGURE 6

Les unités de Rs sont des fréquences au carré (m^{-2}). Dans ce cas, si le cercle est de rayon unité, nous avons

$$R_s = 2 - (\pi - 2) = 4 - \pi$$

2.1.4. *Définition de la résolution spatiale 1D.* L'usage est d'exprimer les résolutions en spatial et plus particulièrement en 1D. Aussi nous définirons au passage la résolution 1D en mètres

$$Re_{(Se,R)} = \frac{1}{\sqrt{Rs}}$$

Appliquer à SPOT une telle définition donnerait un nombre proche de 14m et non pas 10m comme cela est souvent annnoncé (10m représente le pas d'échantillonnage et non la résolution). Cependant, tous les satellites d'observation sont dans ce cas. En fait le facteur correctif à appliquer est en général proche de $\sqrt{2}$ avec tous ces types d'instruments sous-échantillonnés.

2.1.5. *Coefficient de performance*

2.1.5.1. *Système quelconque.* La résolution permet de comparer des doublets entre eux, nous proposons de donner également une évaluation intrinsèque des performances d'un système (Se, R) par le coefficient de performance où les Se_i sont les supports spectraux essentiels des sous systèmes.

$$P_{(Se,R)} = \frac{Re_{(Se,R)}}{\mu(Se_i \cup_i R)}$$

qui constitue le rapport entre la résolution effective du doublet et sa résolution potentielle. Il s'agit d'un coefficient appartenant à l'intervalle $[0, 1]$.

On peut également définir des coefficients de performance des sous-sytèmes : optique seul dans le cas où la fréquence de coupure est donnée par l'optique ou opto-électronique si c'est par le détecteur.

2.1.5.2. *Système à dominante photo-électronique (cas de SPOT).* Dans le cas de SPOT la fréquence de coupure de l'optique est très éloignée de celle du détecteur $Se_{dt} = Se$ et le coefficient de performance sera faible et peu significatif.

Aussi, nous utiliserons le coefficient de performance relatif au système photo-électronique du détecteur. Le coefficient de performance de SPOT est dans ce cas proche de $1/4$.

En effet le support essentiel de la FTM est proche du carré de 45° et de côté $\sqrt{2}$ fois plus important que R (cf. § 3.2).

2.1.5.3. *Système à dominante optique.* Si la coupure du système est effectuée par l'optique $Se_{op} = Se$. Dans la configuration ci-dessous $P(Se_{op}, R) = \pi/8$. La performance de tels systèmes est satisfaisante. Ils présentent cependant le désavantage de

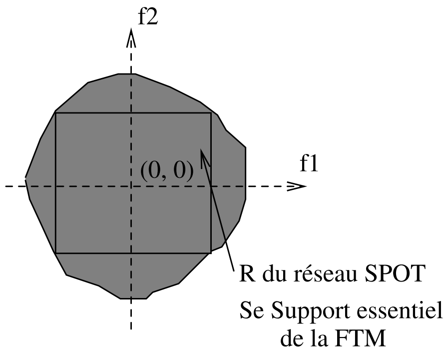

FIGURE 7

conduire à des instruments à très grande distance focale et faible flux, donc à SNR faible. Des systèmes à intégration de flux peuvent cependant y remédier.

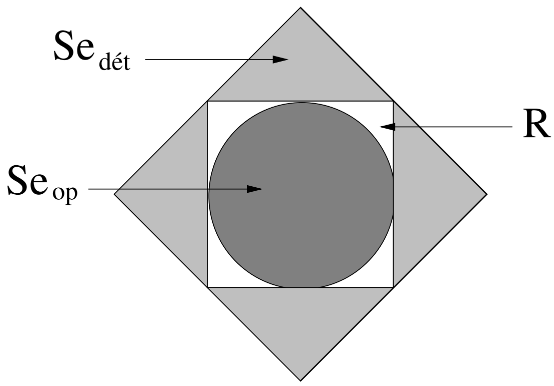

FIGURE 8

2.2. Exemples de réglage du système photo-électronique numérique : réseau à maille quinconce. Les notions précédentes vont être à présent utilisées pour effectuer des réglages instrumentaux. Cependant le résultat de l'optimalité du réseau quinconce pour des systèmes dominés par le détecteur sera préalablement établi.

2.2.1. *Optimalité du réseau quinconce.* Le réseau d'échantillonnage de SPOT est sous critique (insuffisamment dense pour satisfaire le principe de Shannon), aussi proposerons-nous deux autres types d'échantillonnage [MAR92], [ROU95-BREVET].

Nous avons déjà vu (cf. §2.3.2) que la base du réseau réciproque Γ^* de SPOT est caractérisée par les vecteurs $(1,0),(0,1)$.

La propriété d'annulation du sinus cardinal ($\sin c(x)$) et la séparabilité de la FTM (l'influence de la FTM optique est du second ordre) conduit au croquis ci-dessous. Il représente dans le domaine image (droite) et dans le domaine spectral (gauche) les réseaux d'échantillonnage de SPOT, quinconce et 4SPOT. Le support spectral essentiel Se de la FTM est représenté en grisé.

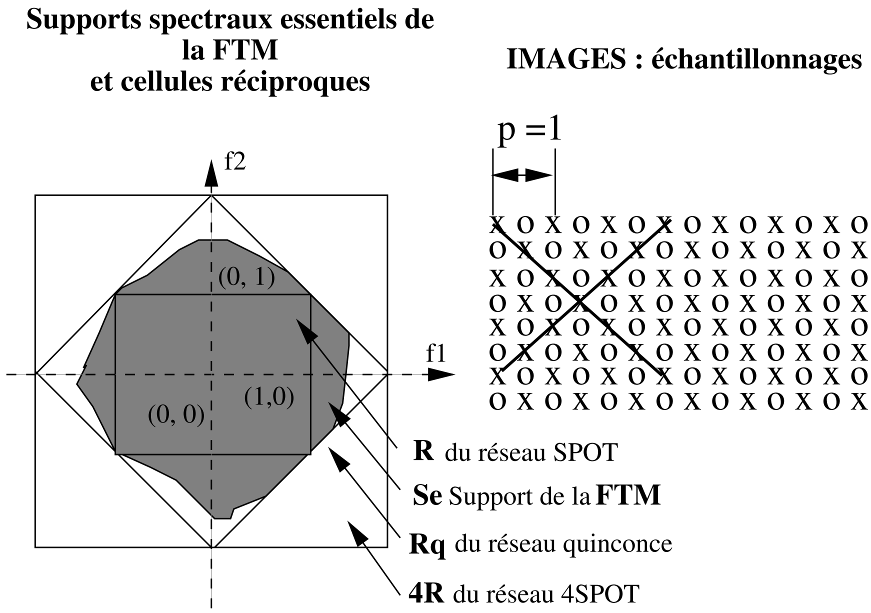

FIGURE 9. Types de réseaux d'échantillonnage : SPOT, quinconce, 4SPOT

Le réseau 4SPOT constitué d'un sur-échantillonnage ligne et colonne d'un facteur 2 est trop dense pour le support essentiel de la FTM. Il est sur-critique. Le réseau SPOT à l'inverse est trop lâche. Il est sous-critique. Quant au réseau quinconce, il est quasi critique. En effet, les phenomènes de recouvrement spectraux (aliasing) sont réduits.

Les coefficients de performance (système photo-électronique seul) de ces divers type de réseaux sont : $P = 0.25$ pour SPOT, $P = 0.5$ pour 4SPOT et proche de 1 pour le réseau quinconce.

C'est ce mode qui a été choisi pour la Très Haute Résolution de SPOT5.

2.2.2. *Mise en œuvre instrumentale.* Nous allons présenter dans ce paragraphe trois solutions permettant de densifier le réseau afin de s'approcher ou de réaliser ce réseau quinconce.

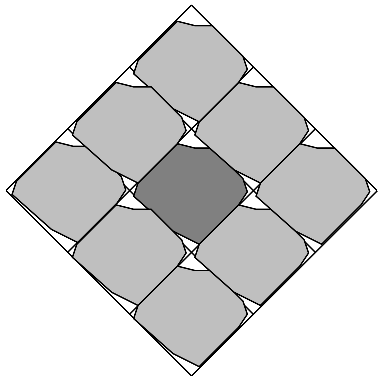

FIGURE 10. Échantillonnage supermode (alias spectraux)

2.2.2.1. *Utilisation de deux instruments (ex : les 2HRV) de SPOT1.* La première idée de densification du réseau est de se servir des deux instruments HRV embarqués sur SPOT. Ils sont alors configurés en visée simultanée sur la même zone au sol.

Cependant, le décalage entre les deux images doit être égal à un nombre demi-entier de pixels en ligne et en colonne. Un tel procédé n'est pas fonctionnellement possible et le décalage peut avoir une valeur quelconque. De plus, les deux HRV sont légèrement dissemblables, ce qui produit un différentiel entre la taille des pixels des deux HRV. Moyennant des traitements adaptés (filtres d'interpolations non stationnaires), il est cependant possible de traiter ce couple d'images et presque d'améliorer dans un rapport deux la résolution 1D d'une image SPOT.

2.2.2.2. *Double barrette.* Une solution plus performante consiste à implanter dans le plan focal *une double barrette* avec un décalage entre les deux barrettes étant d'un nombre demi-entiers de pixels. le temps d'échantillonnage restant celui de SPOT. Le flux est donc conservé dans cette solution.

C'est cette solution instrumentale qui a été retenue sur le futur satellite SPOT5.

2.2.2.3. *Configuration barrette-vitesse du satellite non orthogonale.* Tout réseau engendré à partir d'une barrette CCD impose l'un des vecteurs générateurs du réseau. Le module est fixe et égal à p. Cependant, d'autres degrés de liberté subsistent : l'angle entre la direction de la barrette CCD et le vecteur de vitesse du satellite et le pas dans la direction vitesse $\Delta\tau = v \cdot t_e$.

Il reste encore deux possibilités pour agir sur $\Lambda\tau$: agir sur v ou sur le temps d'échantillonnage t_e. Or, la modification de la vitesse du point sub-satellite par pilotage en attitude est possible avec des satellites manœuvrants.

Nous avons vu dans la précédente partie sur la TF qu'un même réseau peut être généré par plusieurs bases. Il s'agit de toutes les bases issues du changement de base

$$\widetilde{e}_1 = ae_1 + be_2, \quad \widetilde{e}_2 = ce_1 + de_2$$

où $|ad - bc| = 1$ et $a, b, c, d \in Z$.

Aussi, si la barrette fait un angle $\alpha = \mathrm{arctg}(1/n)$ entre la vitesse et la barrette et si $\Delta\tau = \dfrac{p}{\sqrt{1+n^2}}$, $n \in Z$, alors dans le repère vitesse-direction orthogonale, les vecteurs de base sont

$$e_1 = (p\sin(\alpha), p\cos(\alpha)), \quad e_2 = (0, \Delta\tau)$$

et par changement de base on a

$$\widetilde{e}_1 = e_1 - ne_2, \quad \widetilde{e}_2 = e_2.$$

Il est donc possible d'obtenir un réseau carré aussi fin que désiré.

Il existe une autre solution pour engendrer un réseau quinconce. Le cas quinconce est le cas particulier $n = 1$, α est égale à $45°$.

Remarque. Ici a été proposé un réseau carré car le traitement est plus simple, cependant des réseaux de type hexagonaux aussi denses que désiré peuvent être également engendrés.

3. Instrument à FTM idéale pour un réseau de maille fixée

Tout ce qui précède a été consacré à l'adaptation du réseau d'échantillonnage au support essentiel de la FTM. Une question majeure reste cependant en suspens qui intéresse les concepteurs d'instruments et les traiteurs d'images : quelle est la « meilleure » image possible pour un réseau R donné ?

Dès lors, nous nous intéressons à la forme de la FTM et plus seulement au seul voisinage de son support.

3.1. Formulation. Nous rattacherons cette question à la notion d'instrument à FTM « parfaite » pour un réseau R fixé.

La FTM d'un tel instrument doit satisfaire les caractéristiques suivantes :

- quasi-respect de la propriété de Shannon (l'image acquise par un tel instrument est alors interpolable et déconvoluable : $Se \subset R$),
- réponse impulsionnelle positive (l'image est une distribution de densité),
- concentration optimale de l'énergie en espace et en fréquence,
- conservation des valeurs moyennes ($FTM(0,0) = 1$).

Ces caractéristiques reviennent à construire une fonction optimale à support quasi contenu dans un domaine spectral limité donné R et à support compact en espace tout en se rapprochant au plus près de la distribution de Dirac.

La réponse précise à cette question a été fournie par D. Slepian, H.O. Pollak, H.J. Landau, [SLE64], [LAN96]. Le critère d'optimalité choisi est un critère énergétique. Ce choix n'a rien d'arbitraire car il est sous-jacent à toute mesure de paramètre physique, comme par exemple la mesure de FTM en laboratoire. Ces fonctions sont les fonctions sphéroïdales aplaties, (prolate spheroidal functions en anglais).

3.2. Dualité espace-fréquence (relation d'incertitude). L'inégalité d'Heisenberg-Gabor met l'accent sur l'impossibilité physique d'obtenir une image (ou signal) sur des supports spatiaux (temporels) effectifs arbitrairement petits.

La Gaussienne réalise la meilleure approximation en localisation spatio-temporelle pour le critère des variances centrées en espace et en fréquence.

Si l'intérêt se porte sur la contrainte énergétique associée à des supports fixés, l'optimalité conduit aux fonctions sphéroïdales aplaties. On les appellera par simplification prolate.

La formulation est alors la suivante.

Soit un support V dans l'espace image et un support W dans l'espace fréquentiel (fig. suit)

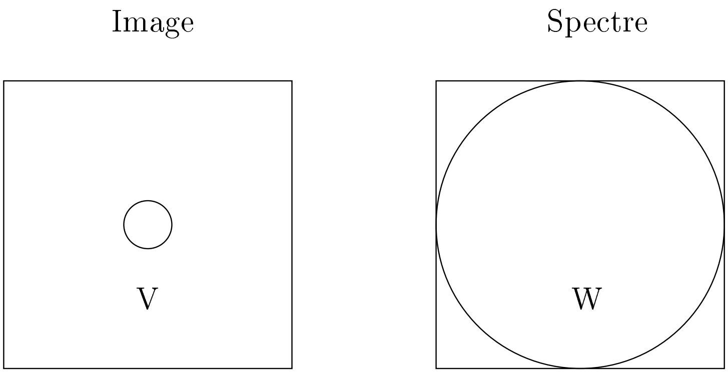

FIGURE 11

L'énergie de la fonction prolate notée Φ que l'on cherche à support dans V, doit être concentrée dans le domaine W de fonction caractéristique w. Ainsi, l'énergie doit être petite au sens des moindres carrés en dehors de W. On impose donc une condition de la forme

$$\frac{1}{\|\widehat{\phi}\|^2}\int_W |\widehat{\phi}|^2 d\mu = \chi^2$$

où χ est maximum (proche de 1 puisque représentant la fraction d'énergie de $\widehat{\phi}$ dans W).

Cette dernière équation s'écrit également

$$\chi^2 = \sup_{\substack{\|\phi\|=1 \\ \mathrm{Supp}(\phi)\subset V}} \|w\widehat{\phi}\|$$

pour V et W donnés.

Cette optimisation permet de concentrer l'énergie à la fois dans les supports V et W. En annexe est démontré que ceci est équivalent au calcul de la valeur propre maximale χ d'un opérateur. A cette valeur maximale est associée une fonction propre qui est précisément la fonction prolate. De plus, une procédure pratique de calcul de χ empruntée aux outils de l'analyse numérique en permet le calcul (cf. annexe).

Un instrument idéal pour un réseau réciproque Γ^* de cellule R donnée sera celui qui conservera un χ proche de 1 avec $W = R$. La FTM associée est la fonction prolate dite FTM idéale.

3.3. Remarques sur le phénomène de Gibbs et de repliement spectral

La fonction prolate est une fonction fenêtre particulière.

En effet, il existe des fonctions qui concentrent l'énergie spectrale d'une manière plus efficace que la prolate. Par exemple la fonction caractéristique de la cellule réciproque du réseau est celle qui a la concentration énergétique maximum en spectral. Elle n'est cependant pas optimale en spatial. De plus, elle produit des phénomènes d'oscillation visible sur l'image. En effet, la multiplication par la fonction caractéristique χ_R de R en spectral conduit à introduire une convolution en espace par la TF $\widehat{\chi}_R$ toujours oscillante (puisqu'elle passe par les points du réseau) et à support essentiel étendu.

A l'inverse la concentration excessive en espace conduit au débordement de la cellule réciproque en spectral induisant des phénomènes de repliements spectraux.

Aussi la fonction prolate constitue-t-elle un bon compromis permettant d'éviter ces deux types d'artefacts.

Dans les deux planches suivantes est illustré l'intérêt de cette fonction.

Une comparaison est effectuée entre trois images (voir les trois planches qui suivent) toutes échantillonnées avec le même réseau (carré 2.5m de côté).

La pemière image est simulée avec une FTM tel que $Se \supset R$. Elle est donc sous-critique et donc repliée spectralement (aliasing). Cet artefact est visible sur la première et la seconde planche.

La seconde image est telle que FTM=Prolate. Il n'y a pas d'artefact.

La dernière image est telle que FTM= χ_R, (fonction caractéristique de R). Des phénomènes de Gibbs sont visibles sur la seconde et la dernière planche.

4. Déconvolution-débruitage en réseau critique

Nous venons de définir un instrument à FTM idéale. Un tel instrument n'est évidemment pas réalisable. La question qui est alors posée est celle de s'en approcher par le traitement de restauration. Nous n'aborderons pas ici un traitement exhaustif de la restauration qui est un sujet très vaste. L'objet est d'indiquer sa portée sur le dimensionnement des instruments.

Les approches modernes en restauration consistent à modéliser les images comme des zones lisses séparées par des bords nets. Ainsi on prend en compte les singularités du paysage. Ces restaurations préservent les contours.

Soit $\widehat{P}$ la prolate unique attachée à R. Alors, nous nous placerons dans le cas où l'image vérifie le principe (faible) de Shannon $Se \subset R$.

Le spectre de référence est alors $\widehat{\widehat{u}}_{ref} = \Pi_{\Gamma N\times M}\widehat{\Pi}_\Gamma \otimes (\widehat{P}\cdot\widehat{o})$ et l'erreur quadratique après déconvolution par $\frac{\widehat{P}}{FTM}$ du spectre de l'image brute est

$$\left\|\widehat{\widehat{u}}_{ref} - \widehat{\widehat{u}}\right\| = \left\|\Pi_{\Gamma NxM}\widehat{\Pi}_\Gamma \otimes (\frac{\widehat{P}}{FTM}\cdot\widehat{b})\right\|$$

que l'on minimise sur les zones « homogènes ».

Les méthodes de débruitage non linéaires par seuillage sur les coefficients de la décomposition en paquets d'ondelettes [KAL96], [MAL97], [MEY92], [ROU95] préservent les singularités de l'image.

De plus, des méthodes d'optimisation faisant intervenir la variation totale de l'image avec un terme de régularisation ou l'approche statistique de la théorie des champs Markoviens (ces deux formalismes sont proches en discret) présentent également de bon résultats [MOR94], [RUD92], [CHA94], [DEM89].

Ces méthodes de restauration permettent d'accepter des SNR bien inférieurs à ceux exigés sur des satellites actuellement opérationnels et produisant des images non déconvoluables. Ainsi est envisagé à présent de restaurer des images dont le SNR est de 70 à la luminance moyenne. On est loin des SNR supérieurs à 250 sur les SPOT actuellement en fonctionnement. La conception des instruments s'en trouve changée, car il s'agit d'un des éléments clef (diminution du diamètre pupillaire) qui ouvre la voie à la conception de petits instruments très haute résolution.

Conclusion

Le segment sol de traitement des images SPOT4 effectue quelques dizaines d'opérations par point. Aujourd'hui le dimensionnement du futur satellite SPOT5 est réalisé sur une base de plusieurs milliers d'opérations.

L'adaptation des réseaux d'échantillonnage des images de satellite au principe de Shannon, alliée à la chute vertigineuse des coûts de calcul, ouvre la voie à l'introduction massive des mathématiques dans les segments sol image futurs.

Annexe : fonctions sphéroïdales aplaties

Calcul de la valeur propre maximale. Précisons le calcul de χ

Si $\phi \in L^2(V)$ et $w\widehat{\phi} \in L^2(W)$, alors :

$$\|w\widehat{\phi}\|^2 = \langle w\widehat{\phi}|w\widehat{\phi}\rangle$$

si v et w sont les opérateurs associés aux fonctions caractéristiques des ensembles V et W. On a $v\phi = \phi$, pour tout $\phi \in L^2(V)$.

Soit U, l'opérateur qui définit la Transformée de Fourier et U' sont inverse alors

$$\begin{aligned}\langle w\widehat{\phi}|w\widehat{\phi}\rangle &= \langle wU\phi|wU\phi\rangle \\ &= \langle wUv\phi|wUv\phi\rangle \\ &= \langle \phi|vU'wUv\phi\rangle \\ &= \langle \phi|B\phi\rangle\end{aligned}$$

en posant $B = vU'wUv$, $\phi \in L^2(V)$, χ^2 est la valeur propre maximale de l'opérateur B tel que

$$\chi^2 = \frac{\sup\limits_{\|\phi\|=1} \langle \phi|B\phi\rangle}{\|\widehat{\phi}\|^2}$$

L'opérateur B opère des troncatures de support alternées avec la transformée de Fourier. Il concentre $\widehat{\phi}$ dans W tout en gardant ϕ dans V.

La construction de la fonction prolate pour V et W donnés se déduit alors de la méthode de la puissance.

Méthode numérique de la puissance. La méthode de la puissance [GOU84] est une méthode itérative simple qui permet de calculer les valeurs propres et les vecteurs propres d'un opérateur.

L'opérateur B est de dimension finie. Il possède un nombre finie de valeurs propres. Ordonnons ces valeurs propres $|v_1| \geq |v_2| \geq |v_3| \cdots \geq |v_{\mathbb{N}}|$, alors l'opérateur se décompose en

$$B = \sum_{N \geq k \geq 1} v_k P_k,$$

pour toute fonction ϕ,

$$B\phi = \sum_{N \geq k \geq 1} v_k P_k \phi_k$$

et pour tout entier n positif

$$B^n \phi = \sum_{N \geq k \geq 1} v^n k P_k \phi_k$$

avec $\phi_k = P_k \phi$.

Les ϕ_k sont les vecteurs propres associés aux valeurs propres v_k. Ils vérifient $B\phi_k = v_k \phi_k$ pour tout $k \geq 1$. Pour tout $k \geq 2$ en supposant $\phi_k \neq 0$ et $|v_1| \neq |v_2|$, nous avons $|v_1|^n \gg |v_2|^n$ si n est suffisamment grand. On voit ainsi que le terme prépondérant de $B^n \phi$ est $v_1^n \phi_1$ et

$$\frac{B^n \phi}{v_1^n} = \phi^1 + \sum_{k \geq 2} (\frac{v_k}{v_1})^n \phi^k,$$

donc $\dfrac{B^n \phi}{v_1^n}$ est une bonne approximation du vecteur propre associé à ϕ_1. La valeur propre associée v_1 (c'est-à-dire une approximation de χ^2) est alors fournie par la relation

$$v_1 = \frac{\|B^n \phi\|}{\|B^{n-1} \phi\|}.$$

La vitesse de convergence est liée à la façon dont $|\frac{v_2}{v_1}|^n$ tend vers 0 quand n est grand et la méthode ne pourrait pas s'appliquer à des opérateurs dont les valeurs propres sont proches en module.

Procédure pratique. La procédure pratique sera la suivante, soit ϕ_O la fonction caractéristique d'ensemble de V. Alors la fonction ϕ_1 est déterminée par $\phi_1 = \frac{B\phi_0}{v_0}$ avec $v_0 = \|B\phi_0\|$.

On itère ensuite l'opération sur ϕ_1. On a $\phi_2 = \dfrac{B\phi_1}{v_1}$ avec $v_1 = \|B\phi_1\|$ ainsi

$$v_n \longrightarrow \chi^2.$$

La fonction ϕ_n correspondante est alors la fonction prolate approchée unique à supports V et W donnés.

Références

[CHA94] P. Charbonnier, L. Blanc-Féraud, G. Aubert et M. Barlaud, *Two deterministic half-quadratic regularization algorithms for computed imaging*, in Proceedings of IEEE ICIP, 1994, vol. 2, pp. 168-172.

[DEM89] G. Demoment, *Image reconstruction and restoration : overview of common estimation structure and problems*, IEEE Transaction on Acoustics Speech and Signal Processing, vo. ASSP-37, n° 12, pp. 2024-2036, décembre 1989.

[GOU84] R.J. Goult, R.F. Hoskins, J.A. Milner, M.J. Pratt, 1884, Computational Methods in Linear Algebra, Stanley Thornes (Publishers) Ltd.

[KAL96] J. Kalifa, S. Mallat, B. Rougé, *Restauration d'images par paquets d'ondelettes*, 16ème colloque GRETSI 15-19 septembre 1996.

[LAN96] A. Lannes, É. Antérieux and K. Bouyoucef LAT/CERFACS/GdR TdSI-Observatoire Midi-Pyrénées 14, avenue Edouar Belin F-31400 Toulouse (France). Journal of Modern Optics January 1996. Fourier interpolation and reconstruction via Shannon-type techniques Part II Technical development and applications.

[LAP95] Rapport technique CNES, *Développement exploratoire instrument optique haute résolution*, M. Laporte, 16/11/95 Réf : 95NT049/CT/AE/INS/OE-Z.

[LAT94] Rapport technique CNES, S5-0-418-CN, *Étude de plusieurs concepts hypermode*, CT/IA/QTIS/PO n°94/820, C. Latry.

[LOM91] T.S. Lomheim, *Modulation Transfer Function (MTF) of CCD imagers : Utility, Models and mesurement Methods*, invited talk, presented at the IEEE Charge-Couple Devices Workshop (1991), University of Waterloo, Waterloo, Ontario, Canada, 9 june 1991.

[MAL97] S. Mallat, *A wavelet tour in signal processing*, Academic Press 1997. Chapter X, p. 425.

[MEY92] Y. Meyer, livre, *les ondelettes, algorithmes et applications*, 1992, Armand Colin, p. 123.

[MOR94] J.M. Morel, S. Solimini, *Variational methods in image segmentation*, Birkhäuser, 1994.

[ROU95-BREVET] Brevets nationaux :

- 1) *Procédé d'acquisition d'une image par balayage pousse-balai* (inventeur : B. Rougé, C. Latry) 28 Juillet 1995 -[95 09242] 51 H 04 N 3/15, G 06 T 5/00, G 06 K 9/20.
- 2) *Procédé et dispositif pour l'acquisition d'une image par échantillonage par une barrette ou matrice de détecteur optique élémentaire à transfert de charge* (inventeur : B. Rougé, J.C. Favard, G. Pauc) 28 Juillet 1995 [95 09263]-51 H 04 N 3/15, G 06 T 5/00, G 06 K 9/20.
- 3) *Procédé pour le traitement ou l'acquisition ou la transmission d'une image acquise sous la forme d'une matrice de pixels*, inventeur : B. Rougé, 28 Juillet 1995 [95 09241]-51 H 04 N 3/15, G 06 T 5/00, G 06 K 9/20.

Brevet international :

Procédé d'acquisition d'une image par balayage pousse-balai, référence internationale : PCT/FR96/01188.

[ROU95] B. Rougé (1995), Fixed Chosen Noise Restauration (FCNR), IEEE 95 Philadelphia (USA).

[RUD92] L. Rudin, S. Osher et C. Fatemi, *Nonlinear total variation based noise removal algorithm*, Physica. vol. 60D, pp. 259-268, 1992.

[SLE64] D. Slepian Prolate Spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty IV. Extensions to many dimensions ; generalized prolate spheroidal functions Bell. Syst. Journal, 43, (1964), 3009-3057.

Bernard Rougé, Centre National d'Études Spatiales, 31 Toulouse