

---

# CONTRÔLE ET ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

*par*

Jean-Pierre Puel

---

## 1. Introduction

Pourquoi équations aux dérivées partielles et pourquoi contrôle ?

Les équations aux dérivées partielles, associées à certaines bonnes classes d'opérateurs, fournissent des modèles mathématiques de quantité de phénomènes :

- physiques : lois de conservation, thermodynamique, électrostatique, électromagnétisme, dynamique des gaz, plasmas, mécanique quantique...
- mécaniques : élasticité, plasticité, mécanique des fluides,...
- chimiques : réaction-diffusion, combustion,...
- économiques : modèles macroéconomiques, gestion de stocks,...
- domaines scientifiques pluridisciplinaires : météorologie, biomédecine, ingénierie avec mention particulière pour les industries spatiales et nucléaires.

Les principaux opérateurs aux dérivées partielles rencontrés sont :

$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$  : opérateur de Laplace pour les phénomènes de diffusion ou de potentiel électrostatique

$\frac{\partial}{\partial t} - \Delta$  : opérateur de la chaleur

$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$  : opérateur des ondes pour les phénomènes de propagation (ici à vitesse finie).

Autres opérateurs fondamentaux moins faciles à écrire simplement : opérateur de Stokes (mécanique des fluides), opérateur de l'élasticité, opérateur de Maxwell (électromagnétisme), opérateur de Schrödinger,...

Nous nous limiterons essentiellement ici, afin de réduire la technicité, à l'utilisation des trois premiers opérateurs (avec les conditions aux limites appropriées).

Quels peuvent être les intérêts de la modélisation d'un phénomène (que nous appellerons) « physique » à l'aide d'objets mathématiques ? Cela peut aider à la compréhension du phénomène et de l'influence des différents paramètres, aussi à la prévision grâce à la simulation. Souvent, on cherche à étudier la possibilité d'agir sur un système afin qu'il fonctionne dans un but désiré, ou « au mieux », « au moindre coût » etc. C'est l'objet de la théorie du contrôle, la variable d'action étant appelée le contrôle (souvent aussi la commande), l'objectif à atteindre étant parfois assez difficile à définir (par exemple comment exprimer précisément ce qu'on cherche à obtenir pour un écoulement autour d'une aile d'avion...).

Nous allons ici développer un peu la problématique, les idées, résultats et les difficultés de ce qui est appelé la « contrôlabilité ». Mais dans cette introduction je souhaite dire quelques mots d'autres domaines importants de la théorie du contrôle, en particulier du contrôle optimal.

Considérons un exemple simple.

**Exemple 1.1.** On considère l'équation de la chaleur posée dans un domaine ouvert borné  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$  (de frontière  $\Gamma$ ) et sur un intervalle de temps  $(0, T)$

$$(1.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y = f + Bv \text{ dans } \Omega \times (0, T) \\ y = 0 \text{ sur } \Gamma \times (0, T) \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Ici  $f$  est une donnée,  $v$  est le contrôle,  $B$  est un opérateur linéaire continu de l'espace des contrôles dans l'espace des données. Sous des

hypothèses raisonnables, en particulier sur les classes de fonctions considérées, on montre que pour tout contrôle  $v$ , il existe une solution unique  $y = y(v)$  de (1.1) qui sera appelée « état du système ».

On considère ensuite une « fonction coût », par exemple

$$(1.2) \quad J(v) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} |Cy(v) - z_d|^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |y(v)(T) - z_T|^2 dx + \frac{N}{2} \|v\|^2$$

où  $z_d, z_T$  sont donnés et l'opérateur  $C$  (opérateur d'observation) est donné linéaire continu et  $N > 0$ . Le problème (classique) de contrôle optimal est de trouver un contrôle  $u$  tel que

$$(1.3) \quad J(u) = \min_v J(v)$$

L'ensemble des contrôles « admissibles » peut être un espace ou un sous ensemble convexe fermé.

Les questions à étudier (et, dans cet exemple, bien résolues *cf.* [14]) sont : existence et unicité d'un contrôle optimal, caractérisation, calcul a priori du contrôle optimal (contrôle dit en boucle ouverte). On cherche également un contrôle en boucle fermée, c'est-à-dire un contrôle de la forme  $v(t) = P(t)y(t)$  où  $P$  est un opérateur dit « opérateur de feedback ». La question revient bien sûr alors à la détermination de  $P$  et à son « calcul » (*cf.* [14]).

Dans l'exemple précédent, le contrôle apparaît comme un « second membre » d'une équation. Il peut être aussi le domaine géométrique  $\Omega$  ce qui conduit à des problèmes d'optimisation de forme et des difficultés immédiates : comment la solution d'une équation aux dérivées partielles (même simple) dépend-elle du domaine géométrique, comment comparer des fonctions qui ne sont pas définies sur le même domaine etc. ? Le contrôle peut aussi apparaître dans les caractéristiques du matériau utilisé ou dans la disposition géométrique de deux matériaux de caractéristiques données (par exemple dans un problème de potentiel électrostatique ou d'élasticité...). Il apparaît alors dans les coefficients de la partie principale de l'opérateur.

Par exemple il faut remplacer  $-\Delta$  par  $-\operatorname{div}(A(x)\nabla \cdot)$  où  $A(x)$  est une matrice (définie positive) de coefficients. On arrive alors à des problèmes de contrôle sur les coefficients, d'homogénéisation etc. qui

présentent eux aussi des difficultés spécifiques et un très grand intérêt, tant mathématique que pour les applications.

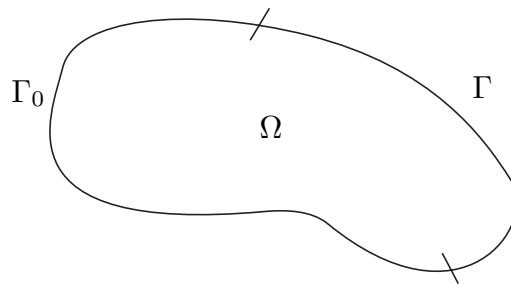
Des variantes de ces problèmes sont les problèmes d'identification et les problèmes inverses qui peuvent être vus comme des problèmes de contrôle (le principe étant d'appeler contrôle ce qu'on ne connaît pas et qu'on cherche à déterminer!).

Nous ne développerons pas ici ces questions pourtant fort intéressantes, et nous nous concentrerons sur les problèmes dits de contrôlabilité.

L'objectif de la contrôlabilité est d'atteindre sur un temps  $T$  donné une cible donnée (contrôlabilité exacte) ou de s'en approcher autant qu'on le désire (contrôlabilité approchée) en agissant à l'aide d'un contrôle. L'étude revient souvent à décrire, aussi précisément que possible, l'ensemble des états atteints à l'instant  $T$  lorsque le contrôle varie. Nous allons ici décrire les situations rencontrées sur quelques exemples simples et donner quelques méthodes et résultats obtenus. Nous expliciterons aussi quelques problèmes ouverts sur des équations plus compliquées mais plus réalistes.

## 2. Contrôlabilité exacte et équations de type ondes

Considérons un ouvert borné et régulier de  $\mathbb{R}^n$ , noté  $\Omega$  et sa frontière  $\Gamma$ . Nous considérons l'équation des ondes dans  $\Omega \times (0, T)$ , où  $T$



est un temps positif, avec un contrôle agissant sur une partie  $\Gamma_0$  de la

frontière de  $\Omega$ .

$$(2.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \Delta y = 0 \text{ dans } \Omega \times (0, T) \\ y = v \text{ sur } \Gamma_0 \times (0, T) \\ y = 0 \text{ sur } (\Gamma - \Gamma_0) \times (0, T) \\ y(0) = y_0 ; \frac{\partial y}{\partial t}(0) = y_1 \text{ dans } \Omega. \end{cases}$$

Ici  $y$  est l'état,  $v$  est le contrôle,  $y_0$  et  $y_1$  sont les données initiales.

Remarquons que même si  $v$  est elle-même une fonction « régulière », la fonction qui vaut  $v$  sur  $\Gamma_0 \times (0, T)$  et 0 sur  $(\Gamma - \Gamma_0) \times (0, T)$  peut ne pas être régulière (le cas  $\Gamma_0 \neq \Gamma$  est important pour permettre de ne pas agir sur toute la frontière). Il faut donc un cadre adapté pour assurer que (2.1) admet bien une solution pour  $v$ ,  $y_0$  et  $y_1$  données. Ce cadre est donné par des espaces de Sobolev dont nous donnons quelques brèves définitions (*cf.* par exemple [1], [17], [2]...)

Nous noterons  $\mathcal{D}(\Omega)$  l'espace des fonctions de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^n$  à support compact dont le support (compact donc fermé) est contenu dans (l'ouvert)  $\Omega$ . (Les fonctions de  $\mathcal{D}(\Omega)$  sont donc nulles dans un voisinage de la frontière  $\Gamma$  de  $\Omega$ ).

Espace  $H^1(\Omega)$

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega), \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, \dots, n \right\}$$

Ici les dérivées de  $v$  sont prises au sens des distributions.

Muni du produit scalaire (nous ne considérons que les fonctions à valeurs réelles)

$$((u, v)) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)dx$$

l'espace  $H^1(\Omega)$  est un espace de Hilbert.

Espace  $H_0^1(\Omega)$

$$H_0^1(\Omega) = \text{adhérence de } \mathcal{D}(\Omega) \text{ dans } H^1(\Omega).$$

et aussi, puisque  $\Omega$  est régulier

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega), v = 0 \text{ « sur » } \Gamma\}.$$

Comme  $H_0^1(\Omega)$  est un sous espace fermé de  $H^1(\Omega)$ , c'est un espace de Hilbert et on montre, puisque  $\Omega$  est borné, grâce à l'inégalité de

Poincaré, que sur  $H_0^1(\Omega)$  un produit scalaire équivalent est donné par

$$((u, v))_0 = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx$$

Espace  $H^{-1}(\Omega)$

$$H^{-1}(\Omega) = \text{dual topologique de } H_0^1(\Omega).$$

*Attention* : Il est important de *ne pas* utiliser ici le théorème de Riesz qui donne une représentation du dual lorsque la dualité est associée au produit scalaire, car cela fausserait le jeu.

En fait nous identifierons  $L^2(\Omega)$  à son dual (choix de la dualité associée au produit scalaire de  $L^2(\Omega)$ ) et on peut alors représenter  $H^{-1}(\Omega)$  comme des sommes de fonctions de  $L^2(\Omega)$  et de dérivées (au sens des distributions) de fonctions de  $L^2(\Omega)$ .

Nous avons alors pour l'équation (2.1) le résultat suivant qui peut être montré par la méthode dite « de transposition » (*cf.* [15])

**Proposition 2.1.** *Pour tout  $y_0 \in L^2(\Omega)$  et  $y_1 \in H^{-1}(\Omega)$  et pour tout  $v \in L^2(\Gamma_0 \times (0, T))$ , il existe une solution unique  $y$  du problème (2.1) avec*

$$y \in C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap C^1([0, T]; H^{-1}(\Omega)).$$

**Remarque.** La notion de « solution » est prise ici dans un sens très faible mais l'unicité est importante. En effet si par chance nous avons une solution régulière (ou forte) de (2.1) ce sera notre unique solution faible donnée par la proposition 2.1. Nous pourrions travailler, au moins formellement, avec ces solutions comme si les égalités et les dérivées étaient prises dans un sens habituel.

La proposition 2.1 nous dit que pour  $v$  fixé dans  $L^2(\Gamma_0 \times (0, T))$  et  $(y_0, y_1)$  donné dans  $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ ,  $y(T)$  a un sens dans  $L^2(\Omega)$  et  $\frac{\partial y}{\partial t}(T)$  a un sens dans  $H^{-1}(\Omega)$ .

Nous pouvons maintenant formuler le problème de contrôlabilité exacte (avec  $\Gamma_0$  et  $T$  fixés).

Étant donné  $(y_0, y_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$  (a priori quelconque), et étant donné  $(z_0, z_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$  (a priori quelconque) peut-on

trouver  $v \in L^2(\Gamma_0 \times (0, T))$  tel que la solution  $y$  de (2.1) vérifie

$$y(T) = z_0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial y}{\partial t}(T) = z_1.$$

Le problème (2.1) est linéaire et d'autre part il est clair qu'il est réversible en temps. Il est alors facile de remarquer que résoudre le problème de contrôlabilité exacte équivaut à résoudre le problème suivant.

Étant donné  $(y_0, y_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ , peut-on trouver  $v \in L^2(\Gamma_0 \times (0, T))$  tel que la solution  $y$  de (2.1) vérifie

$$y(T) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial y}{\partial t}(T) = 0.$$

C'est ce problème que nous allons développer mais il ne faut pas perdre de vue que dans un autre cadre (par exemple pour des problèmes non linéaires) il faudra revenir au premier énoncé.

**2.1. Le cas de la dimension 1.** Si  $n = 1$ ,  $\Omega = ]0, 1[$ ,  $\Gamma_0 = \{0\}$ , nous sommes ramenés à l'équation

$$(2.2) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \text{ dans } ]0, 1[ \times ]0, T) \\ y(0, t) = v(t) \\ y(1, t) = 0 \\ y(x, 0) = y_0(x) ; \quad \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = y_1(x) \end{cases}$$

Il est possible de résoudre cette équation explicitement. On pose

$$\bar{y}_0(x) = \begin{cases} y_0(x) & \text{si } x \in (0, 1) \\ -y_0(2 - x) & \text{si } x \in (1, 2) \end{cases}$$

$$\bar{y}_1(x) = \begin{cases} y_1(x) & \text{si } x \in (0, 1) \\ -y_1(2 - x) & \text{si } x \in (1, 2) \end{cases}$$

Alors on sait que

$$y(x, t) = f(x - t) + g(x + t)$$

et on peut résoudre l'équation pour  $t \in (0, 1)$  grâce aux nouvelles conditions initiales et à la condition aux limites en  $x = 0$ .

On obtient ainsi  $y(x, 1)$  et  $\frac{\partial y}{\partial t}(x, 1)$  et on peut recommencer pour  $t \in (1, 2)$  etc.

On voit que pour  $t \in (0, 1)$ , si  $x \geq t$ , la valeur de  $y(x, t)$  n'est pas influencée par  $v$ .

Si  $t \in (1, 2)$ , pour  $x \leq 2 - t$ , une partie de  $y(x, t)$  (l'onde se propageant vers la gauche) n'est pas influencée par  $v$ .

Il est ainsi clair que si l'on veut, à l'aide du contrôle  $v$ , forcer la solution à vérifier

$$y(x, T) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial y}{\partial t}(x, T) = 0,$$

il faudra que  $T$  soit suffisamment grand, ici  $T > 2$ . Ceci est dû à la propriété de propagation à vitesse finie de l'information dans l'équation des ondes.

Le résultat positif de contrôlabilité exacte sera donné dans le cas général en dimension  $n$ .

**2.2. Le cas général de la dimension  $n$ .** On reprend ici le problème (2.1) où  $\Omega$  est un ouvert régulier borné de  $\mathbb{R}^n$ .

J.L. Lions a donné une méthode systématique pour ramener l'étude de problèmes de contrôlabilité exacte à l'obtention d'inégalités, dites inégalités d'observabilité ou inégalités inverses sur le problème adjoint. Il a baptisé cette méthode : Hilbert Uniqueness Method (H.U.M.) ; on pourra en trouver un exposé dans [15] et nous la décrirons brièvement ci-dessous.

**Hilbert Uniqueness Method.** Soient  $\varphi_0$  et  $\varphi_1$  pris dans des espaces de fonctions très régulières, par exemple  $(\varphi_0, \varphi_1) \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ .

On résout le problème

$$(2.3) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \Delta \varphi = 0 \text{ dans } \Omega \times (0, T) \\ \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma \times (0, T) \\ \varphi(0) = \varphi_0 ; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0) = \varphi_1 \text{ dans } \Omega. \end{cases}$$

Le problème (2.3) admet une solution unique avec, par exemple,

$$\varphi \in C([0, T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega)).$$

(En fait ici  $\varphi$  est bien plus régulière). De plus nous avons le résultat de régularité (cf. [15] par exemple) :  $\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} \in L^2(0, T; L^2(\Gamma))$  et

$$(2.4) \quad \begin{aligned} &\exists C_0 > 0, \forall (\varphi_0, \varphi_1) \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega), \\ &\left| \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} \right|_{L^2(0, T; L^2(\Gamma))}^2 \leq C_0 [\|\varphi_0\|_0^2 + |\varphi_1|_{L^2(\Omega)}^2] \end{aligned}$$

Cette inégalité traduit le fait que l'application  $(\varphi_0, \varphi_1) \rightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}$  se prolonge en une application linéaire continue de  $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  dans  $L^2(0, T; L^2(\Gamma))$ .

Considérons maintenant le problème rétrograde suivant

$$(2.5) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \Delta\psi = 0 \text{ dans } \Omega \times (0, T) \\ \psi = -\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} \text{ sur } \Gamma_0 \times (0, T) \\ \psi = 0 \text{ sur } (\Gamma - \Gamma_0) \times (0, T) \\ \psi(T) = 0 ; \frac{\partial\psi}{\partial t}(T) = 0 \end{cases}$$

Le changement de  $t$  en  $(T - t)$  nous permet d'appliquer la proposition 2.1 qui nous dit que (2.5) admet une solution unique  $\psi \in C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap C^1([0, T]; H^{-1}(\Omega))$ . Donc  $\psi(0)$  est bien défini dans  $L^2(\Omega)$  et  $\frac{\partial\psi}{\partial t}(0)$  est bien défini dans  $H^{-1}(\Omega)$  (ceci pour chaque choix de  $(\varphi_0, \varphi_1)$ ).

En fait, la densité de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $H_0^1(\Omega)$  et dans  $L^2(\Omega)$  ainsi que (2.2) nous permettent de faire toutes les étapes précédentes pour  $(\varphi_0, \varphi_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ .

**Remarque.** Si nous pouvons trouver  $(\varphi_0, \varphi_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  tels que

$$\begin{cases} \psi(0) = y_0 \\ \frac{\partial\psi}{\partial t}(0) = y_1 \end{cases}$$

nous aurons résolu le problème de contrôlabilité exacte pour (2.1) avec  $v = -\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}$  et  $y = \psi$ . Notons que nous sommes en train de considérer

des contrôles  $v$  d'un type très particulier avec  $v = -\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}$  où  $\varphi$  est solution de (2.3).

Donc pour  $(\varphi_0, \varphi_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  nous pouvons définir

$$(2.6) \quad \Lambda(\varphi_0, \varphi_1) = \left( \frac{\partial \psi}{\partial t}(0), -\psi(0) \right) \in H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

(l'écriture de  $\Lambda$  est un peu étrange mais est faite pour arranger les choses).

Il est aisé de montrer que  $\Lambda$  est un opérateur linéaire continu de  $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  dans (son dual)  $H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$ . Considérons un autre couple  $(\tilde{\varphi}_0, \tilde{\varphi}_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ . En utilisant des notations évidentes, par multiplication de (2.5) pour  $\tilde{\varphi}$ , on obtient :

$$\langle \Lambda(\varphi_0, \varphi_1), (\tilde{\varphi}_0, \tilde{\varphi}_1) \rangle_{H^{-1} \times L^2, H_0^1 \times L^2} = \int_0^T \int_{\Gamma_0} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \nu} d\sigma dt.$$

et, en particulier :

$$(2.7) \quad \langle \Lambda(\varphi_0, \varphi_1), (\varphi_0, \varphi_1) \rangle_{H^{-1} \times L^2, H_0^1 \times L^2} = \int_0^T \int_{\Gamma_0} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right)^2 d\sigma dt.$$

Si nous savons montrer que la forme bilinéaire continue définie sur  $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  par

$$\begin{aligned} (\varphi_0, \varphi_1), (\tilde{\varphi}_0, \tilde{\varphi}_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \\ \longmapsto \langle \Lambda(\varphi_0, \varphi_1), (\tilde{\varphi}_0, \tilde{\varphi}_1) \rangle_{H^{-1} \times L^2, H_0^1 \times L^2} \end{aligned}$$

est coercive, d'après le lemme de Lax-Milgram, nous aurons :

$$\begin{aligned} \forall (y_0, y_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega), \exists (\varphi_0, \varphi_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \text{ t.q.} \\ \Lambda(\varphi_0, \varphi_1) = (y_1, -y_0) \end{aligned}$$

c'est-à-dire que nous aurons résolu le problème de contrôlabilité exacte pour (2.1).

La coercivité de la forme bilinéaire équivaut à

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \exists C_1 > 0, \forall (\varphi_0, \varphi_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega), \\ \int_0^T \int_{\Gamma_0} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right|^2 d\sigma dt \geq C_1 [\|\varphi_0\|_0^2 + |\varphi_1|_{L^2(\Omega)}^2] \end{aligned}$$

Donc l'obtention de (2.8) est une condition suffisante pour obtenir la contrôlabilité exacte. En fait il est possible de montrer le résultat suivant.

**Proposition 2.2.** *Le problème de contrôlabilité exacte pour (2.1) admet une solution pour tout  $(y_0, y_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$  si et seulement si (2.8) est vérifiée.*

**Remarques.** L'inégalité (2.8) porte sur les solutions  $\varphi$  du problème (2.3) et elle ne semble a priori pas reliée à un problème de contrôle. La quantité

$$E_0 = \frac{1}{2} \left[ \|\varphi_0\|_0^2 + |\varphi_1|_{L^2(\Omega)}^2 \right]$$

représente l'énergie initiale du problème (2.3), qui est conservée au cours du temps car le problème est homogène. L'inégalité (2.8) signifie que « l'observation »  $\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}$  sur  $\Gamma_0 \times (0, T)$  « contrôle » l'énergie initiale. Une inégalité de type (2.8) est souvent appelée inégalité d'observabilité.

D'autre part il faut rapprocher (2.8) de (2.2) qui traduit une régularité, d'où également l'appellation d'inégalité inverse pour (2.8).

Ainsi, H.U.M. permet de ramener la résolution du problème de contrôlabilité exacte à l'obtention de l'inégalité d'observabilité (2.8) pour le problème (2.3). D'après le paragraphe 2.1, nous savons que nous ne pouvons pas espérer obtenir (2.8) sans condition. Plusieurs types de conditions ont été envisagées et dans [3], Bardos, Lebeau et Rauch ont donné une condition quasiment nécessaire et suffisante dans le cas d'un domaine géométrique  $\Omega$  très régulier.

$$(2.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout } x \in \Omega \text{ et pour tout rayon issu de } x \text{ en } t = 0 \\ \text{suivant les lois de l'optique géométrique et parcouru} \\ \text{à vitesse 1 (avec le choix fait ici de l'opérateur } -\Delta), \\ \text{ce rayon doit toucher } \Gamma_0 \text{ avant le temps } T \\ \text{en un point non diffractif.} \end{array} \right.$$

**Théorème 2.1 ([3]).** *Sous l'hypothèse (2.9), l'inégalité d'observabilité (2.8) est vérifiée et le problème de contrôlabilité exacte pour le problème (2.1) admet une solution.*

**Remarque.** La démonstration du théorème 2.3 utilise des techniques d'analyse microlocales. La condition (2.9) est quasiment nécessaire et suffisante, la quasi nécessité provenant d'un contre exemple dû à Ralston [21].

L'inégalité (2.8) est obtenue avec une constante  $C$  non constructive.

La condition (2.9) implique que  $\Gamma_0$  est « assez grand » et le temps  $T$  « assez long » (pour le cas du problème (2.2) cela donne  $T > 2$ ).

Une autre approche, plus constructive et plus simple, a été utilisée pour obtenir (2.8) sous des conditions plus fortes, à l'aide de la méthode des multiplicateurs ([11], [15]...). Elle a été récemment améliorée par Osses ([20]) qui a considéré les ensembles suivants.

Soit  $A$  une matrice  $(n, n)$  antisymétrique ( $A = -{}^tA$ ) et soit  $d > 0$ . Pour  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , on considère l'ensemble

$$\Gamma(x_0, d, A) = \{x \in \Gamma, (x - x_0) \cdot (dI + A) \cdot \nu > 0\}.$$

(où  $\nu$  est la normale extérieure au point  $x$ ), avec la condition de normalisation :

$$d^2 + \|A\|_2^2 = 1.$$

**Théorème 2.2 ([20]).** *Si il existe  $x_0 \in \mathbb{R}^n, d > 0$  et  $A$  antisymétrique (avec la condition de normalisation) tels que*

$$\Gamma_0 \supset \Gamma(x_0, d, A),$$

*alors si*

$$R(x_0) = \max\{(x - x_0), x \in \overline{\Omega}\} \text{ et}$$

$$r(x_0, d, A) = \max\{(x - x_0) \cdot (dI + A) \cdot \nu, x \in \Gamma(x_0, d, A)\}$$

*on a si  $T > 2d^{-1}R(x_0)$*

$$\forall (\varphi_0, \varphi_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega),$$

$$E_0 \leq \frac{r(x_0, d, A)}{2(dT - 2R(x_0))} \int_0^T \int_{\Gamma_0} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right|^2 d\sigma dt$$

*et le problème de contrôlabilité exacte pour (2.1) admet une solution.*

**Remarque.** L'inégalité obtenue au théorème 2.2 n'est autre que (2.8) avec une constante explicite. La condition imposée sur  $\Gamma_0$  et  $T$  est plus forte que (2.9)

La partie essentielle de la démonstration du théorème 2.2 s'obtient en multipliant (2.3) par  $q \cdot \nabla \varphi$  où  $q$  est le multiplicateur qui est pris ici comme

$$q(x) = (dI - A)(x - x_0).$$

Nous avons donné ici la méthode et quelques résultats pour le problème (2.1) mais bien d'autres problèmes linéaires peuvent être traités

par des méthodes analogues. On pourra consulter [15], [13] et la bibliographie de ces ouvrages pour obtenir une liste (non exhaustive) de problèmes traités.

**Remarque.** Nous avons ici considéré des problèmes *linéaires*. Les problèmes de contrôlabilité exacte pour des équations non linéaires sont presque tous complètement ouverts. Par exemple, si nous considérons le problème en dimension 1 d'espace (avec contrôle interne par exemple)

$$(2.10) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + y^3 = v \cdot \chi_{(a,b)} \text{ dans } (0, 1) \times (0, T) \\ y(0, t) = y(1, t) = 0, \quad t \in (0, T) \\ y(x, 0) = y_0(x), \quad \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = y_1(x), \quad x \in (0, 1) \end{cases}$$

où  $\chi_{(a,b)}$  est la fonction caractéristique de  $(a, b)$  avec  $0 < a < b < 1$ , la question de la contrôlabilité exacte pour (2.10) est totalement ouverte.

Pour des termes non linéaires à croissance surlinéaire logarithmique il existe un résultat (positif) de Zuazua [22].

Par des méthodes totalement différentes et en s'inspirant de techniques héritées de l'étude des problèmes en dimension finie, J.-M. Coron ([4]) a montré la contrôlabilité exacte pour l'équation d'Euler (qui est totalement différente), en traitant d'abord le problème local au voisinage de zéro après linéarisation autour d'une trajectoire non nulle (correctement choisie!) allant de 0 à 0, puis en faisant un changement d'échelle pour obtenir la contrôlabilité globale.

Ce résultat (très difficile) et celui de Zuazua sont deux des très rares résultats de contrôlabilité exacte pour les problèmes non linéaires.

### 3. Contrôlabilité approchée et équations de type chaleur

Soit toujours  $\Omega$  un ouvert borné régulier de  $\mathbb{R}^n$  de frontière  $\Gamma$  et soit  $\omega$  un ouvert tel que  $\omega \subset \Omega$ .

Nous considérons l'équation de la chaleur dans  $\Omega \times (0, T)$  avec un contrôle agissant sur  $\omega \times (0, T)$

$$(3.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y = v \cdot 1_\omega \text{ dans } \Omega \times (0, T) \\ y = 0 \text{ sur } \Gamma \times (0, T) \\ y(0) = 0 \text{ dans } \Omega, \end{cases}$$

où  $1_\omega$  est la fonction caractéristique de  $\omega$ .

**Remarque.** Nous pourrions avoir un second membre  $f$  et une donnée initiale  $y_0$  mais moyennant une translation ce qui suit resterait inchangé. Le contrôle est pris ici « interne » afin de simplifier l'exposition, le cas du contrôle « frontière » posant certains problèmes techniques.

**Proposition 3.1.** *Pour tout  $v \in L^2(\omega \times (0, T))$  il existe une solution unique de (3.1) avec*

$$y \in C([0, T]; H_0^1(\Omega)), \quad \frac{\partial y}{\partial t} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$$

(et  $y \in L^2(0, T; H^2(\Omega))$ ).

Ce résultat est classique mais de plus, d'après les propriétés régularisantes de l'équation de la chaleur nous savons que si  $\theta \subset \Omega - \bar{\omega}$ , la solution  $y$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\theta \times ]0, T]$ . Il n'est pas possible de caractériser la classe de régularité de  $y(T)$  à l'aide d'espaces « classiques ».

Par conséquent la question de la contrôlabilité exacte pour (3.1) n'est pas bien posée.

Il est plus naturel de se demander si l'ensemble

$$R(T) = \{y(T), v \in L^2(\omega \times (0, T))\}.$$

des états atteignables à l'instant  $T$  est dense dans  $L^2(\Omega)$  par exemple. On donne à ce problème le nom de contrôlabilité approchée.

**Proposition 3.2.** *Pour le problème (3.1), pour tout  $T > 0$ , l'ensemble  $R(T)$  est dense dans  $L^2(\Omega)$ .*

*Démonstration.* Il est clair que  $R(T)$  est un sous-espace vectoriel de  $L^2(\Omega)$ . D'après le théorème de Hahn-Banach, il sera dense dans  $L^2(\Omega)$  si et seulement si son orthogonal dans  $L^2(\Omega)$  est réduit à  $\{0\}$ .

Soit  $\varphi_0 \in R(T)^\perp$ . Résolvons le problème (rétrograde)

$$(3.2) \quad \begin{cases} -\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Delta \varphi = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ \varphi = 0 & \text{sur } \Gamma \times (0, T) \\ \varphi(T) = \varphi_0 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

Le changement de  $t$  en  $(T - t)$  nous ramène à une équation de la chaleur classique et (3.2) possède une solution unique

$$\varphi \in C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)).$$

Multiplions (3.1) par  $\varphi$ . Après intégrations par parties il vient :

$$\int_{\Omega} y(T)\varphi(T)dx = \int_0^T \int_{\omega} v\varphi dxdt.$$

Comme  $\varphi(T) = \varphi_0 \in R(T)^\perp$  nous obtenons

$$\int_0^T \int_{\omega} v\varphi dxdt = 0 \quad \forall v \in L^2(\omega \times (0, T))$$

donc

$$(3.3) \quad \varphi = 0 \text{ dans } \omega \times (0, T).$$

Maintenant  $\varphi$  vérifie (3.2) et (3.3). D'après un résultat de continuation unique de Mizohata [19] il en résulte que

$$\varphi \equiv 0 \text{ sur } \Omega \times (0, T).$$

Par suite,  $\varphi_0 = 0$  et  $R(T)$  est dense dans  $L^2(\Omega)$ . □

Il est aisé de voir que la méthode utilisée ci-dessus a un caractère général et que, pour un problème *linéaire*, l'étude de la contrôlabilité approchée se ramène à l'étude d'une question de continuation unique pour le problème adjoint.

**Remarque.** Soit  $y_1 \in L^2(\Omega)$  et  $\alpha > 0$ . D'après le résultat précédent on sait qu'il existe  $v \in L^2(\omega \times (0, T))$  tel que la solution de (3.1) vérifie  $|y(T) - y_1|_{L^2(\Omega)} \leq \alpha$ .

Mais il va bien sûr exister beaucoup de contrôles  $v$  ayant la même propriété. On peut chercher à « caractériser » un contrôle particulier, le « meilleur » au sens d'un certain critère, par exemple :

$$(3.4) \quad \min \left\{ \frac{1}{2} |v|_{L^2(\omega \times (0, T))}^2, |y(T) - y_1|_{L^2(\Omega)} \leq \alpha \right\}.$$

On peut alors montrer (*cf.* [16]) en utilisant un résultat de dualité de Fenchel-Rockafellar le résultat suivant :

Soit  $\varphi_0 \in L^2(\Omega)$  et  $\varphi$  solution de (3.2) associée. Soit

$$(3.5) \quad J(\varphi_0) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\omega} |\varphi|^2 dxdt + \alpha |\varphi_0|_{L^2(\Omega)} - \int_{\Omega} y_1 \varphi_0 dx$$

Alors il existe  $\hat{\varphi}_0 \in L^2(\Omega)$  tel que

$$J(\hat{\varphi}_0) = \min_{\varphi_0 \in L^2(\Omega)} J(\varphi_0)$$

et si  $\widehat{\varphi}$  est solution de (3.2) associé à  $\widehat{\varphi}_0$ ,  $\widehat{v} = \widehat{\varphi} \cdot 1_\omega$  est solution de (3.4).

Soit maintenant  $f$  une fonction continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . On considère le problème semilinéaire suivant.

$$(3.6) \quad \begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + f(y) = g + v \cdot 1_\omega & \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ y = 0 & \text{sur } \Gamma \times (0, T) \\ y(0) = y_0 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

Si  $f$  est localement lipschitzienne on montre que pour tout  $v$  le problème (3.6) admet une solution unique et on peut se poser la question de la contrôlabilité approchée pour le problème non linéaire (3.6).

En utilisant l'argument de dualité précédant pour un problème linéaire associé et une méthode de point fixe on montre (*cf.* [8]) que lorsque  $f$  est globalement lipschitzienne il y a contrôlabilité approchée pour (3.6). En revanche un contre exemple dû à A. Bamberger (*cf.* [10]) montre que si  $f(s) = |s|^{p-1}s$ ,  $p > 1$ , la propriété de contrôlabilité approchée n'est pas vérifiée.

**Équations liées à la mécanique des fluides.** Le mouvement d'un fluide visqueux incompressible est régi par les équations de Navier-Stokes, qui s'écrivent (en supposant qu'on puisse agir sur l'écoulement par un contrôle « interne »)

$$(3.7) \quad \begin{cases} \frac{\partial y_i}{\partial t} - \nu \Delta y_i + \sum_{j=1}^n y_j \frac{\partial y_i}{\partial x_j} = \frac{\partial p}{\partial x_i} + v_i 1_\omega & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ \operatorname{div} y = 0 & \\ y = 0 & \text{sur } \Gamma \times (0, T) \\ y(0) = y_0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad i = 1, \dots, n$$

où  $y = (y_1, \dots, y_n)$  est la vitesse du fluide,  $p$  est la pression et  $\nu > 0$  est la viscosité.

La question (importante) de savoir s'il y a (ou non) contrôlabilité approchée pour (3.7) est actuellement ouverte.

Si on modifie les conditions au bord et que l'on considère des conditions au bord de type Navier (qui font intervenir le rotationnel de  $y$ ), alors J.-M. Coron ([5]) a montré la contrôlabilité approchée pour le problème correspondant dans le cas  $n = 2$ .

Si on considère un problème de Navier-Stokes linéarisé

$$(3.8) \quad \begin{cases} \frac{\partial y_i}{\partial t} - \nu \Delta y_i + \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (a_j y_i) = \frac{\partial p}{\partial x_i} + v_i 1_\omega & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ \operatorname{div} y = 0 & \\ y = 0 & \text{sur } \Gamma \times (0, T) \\ y(0) = y_0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad i = 1, \dots, n$$

où  $a = (a_1, \dots, a_n)$  est donnée dans  $L^\infty(\Omega \times (0, T))^n$  alors on montre (cf. [7], [6]) que la contrôlabilité approchée est vérifiée.

On voit donc ici encore que l'étude des problèmes non linéaires (qui sont les plus importants car plus proches des modèles réels) présente vite des difficultés très importantes qui constituent autant de sujets de travail pour les chercheurs.

Il faut aussi mentionner les systèmes couplés : ondes-chaleur, élasticité-Navier-Stokes etc. qui constituent des questions très importantes pour les applications.

#### 4. Contrôlabilité à zéro pour des équations de type chaleur

La question que l'on se pose ici est la suivante, exprimée sur le modèle le plus simple. On considère l'équation de la chaleur

$$(4.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y = v \cdot 1_\omega & \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ y = 0 & \text{sur } \Gamma \times (0, T) \\ y(0) = y_0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

On cherche à déterminer un contrôle  $v$  tel que

$$y(T) = 0$$

Deux approches différentes ont été utilisées pour résoudre ce problème par Lebeau-Robbiano [18] et Fursikov-Imanuvilov [9], toutes deux utilisant de manière fondamentale (mais différemment) des inégalités de Carleman globales.

**Théorème 4.1.** *Quel que soit  $T > 0$  et quel que soit l'ouvert  $\omega \subset \Omega$ , il existe  $v$  tel que la solution de (4.1) vérifie  $y(T) = 0$ .*

La démonstration de ce théorème nécessite de longs développements techniques.

La méthode développée par Fursikov et Imanuvilov a un caractère plus général et s'applique à des situations variées (au prix d'une technique lourde). Par exemple, ils ont montré le résultat suivant :

Soit  $f$  une fonction lipschitzienne et considérons une solution du problème (sans contrôle)

$$(4.2) \quad \begin{cases} \frac{\partial \bar{y}}{\partial t} - \Delta \bar{y} + f(\bar{y}) = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ \bar{y} = 0 & \text{sur } \Gamma \times (0, T) \\ \bar{y}(0) = \bar{y}_0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

(Par exemple  $\bar{y}$  peut être une solution stationnaire de ce problème, i.e.  $\frac{\partial \bar{y}}{\partial t} = 0$ , qui peut éventuellement être instable).

Considérons maintenant l'équation (avec contrôle)

$$(4.3) \quad \begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + f(y) = v \cdot 1_\omega & \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ y = 0 & \text{sur } \Gamma \times (0, T) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Le résultat dit alors que si  $(y_0 - \bar{y}_0)$  est assez petit, il existe  $v$  tel que  $y(T) = \bar{y}(T)$ .

L'action du contrôle permet donc de « changer de trajectoire » pour le problème d'évolution ou d'atteindre exactement une solution stationnaire, même si elle est « naturellement » instable.

Le résultat a été étendu aux équations de Navier-Stokes sur des variétés sans bord ou lorsque la condition au bord est

$$\operatorname{rot} y = 0$$

par Fursikov-Imanuvilov [9] puis récemment au cas des équations de Navier-Stokes avec la condition au bord

$$y = 0$$

par Imanuvilov [12].

## Références

- [1] R.A. Adams : Sobolev spaces ; Academic Press, New-York, 1975.
- [2] H. Brezis : Analyse fonctionnelle, Théorie et Applications ; Éditions Masson, Paris 1983.

- [3] C. Bardos, G. Lebeau, J. Rauch : Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves from the boundary. *SIAM J. control Opt.*, 30 (1992), pp.1024-1065.
- [4] J.-M. Coron : On controllability of 2-D incompressible perfect fluids. *J. Math Pures et Appl.* 75 (1996) n°2, pp.155-188.
- [5] J.-M. Coron : On the controllability of the 2-D incompressible Navier-Stokes equations with the Navier slip boundary conditions. *ESAIM : COCV*, vol.1, 1996, pp.35-75.
- [6] C. Fabre : Uniqueness results for Stokes equations and their consequences in linear and nonlinear control problems. *ESAIM : COCV*, vol.1, 1996, pp : 267-302.
- [7] C. Fabre, G. Lebeau : Prolongement unique des solutions de l'équation de Stokes. *Communications in P.D.E.* Vol. 21, 1996, pp.573-596.
- [8] C. Fabre, J.-P. Puel, E. Zuazua : Approximate controllability of the semilinear heat equation. *Proceedings of the Royal Society of Edimburgh*, Vol. 125 A, 1995, pp.31-61.
- [9] A. Fursikov, O. Imanuvilov : Controllability of Evolution Equations, Lecture Notes series n°34, Research Institute of Math., Global Anal. Research Center, Seoul National University, 1996.
- [10] J. Henry : Étude de la contrôlabilité de certaines équations paraboliques. Thèse d'État, Université Paris VI, 1978.
- [11] L.F. Ho : Observabilité frontière de l'équation des ondes. *C.R. Acad. Sci. Paris, Série I*, 302 (1986) pp.443-446.
- [12] O. Imanuvilov : On exact controllability for Navier Stokes equations. *ESAIM COCV*, vol.3, 1998, pp.97-131.
- [13] V. Komornik : Exact controllability and stabilization. The multiplier method. Collection R.M.A. Éditions Masson et J. Wiley, 1994.
- [14] J.L. Lions : Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles. Dunod, Paris, 1968.
- [15] J.L. Lions : Contrôlabilité exacte. I. Collection R.M.A., vol.8. Éditions Masson, Paris, 1988.
- [16] J.L. Lions : Remarques sur la contrôlabilité approchée. *Proceedings of Jornadas Hispano-Francesa sobre control de sistemas distribuidos*, University of Malaga, Spain, 1990.
- [17] J.L. Lions - E. Magenes : Problèmes aux limites non homogènes et Applications, Vol. 1. Dunod, Paris 1968.
- [18] G. Lebeau - L. Robbiano : Contrôle exact de l'équation de la chaleur. *Communications in P.D.E.*, 20, (1995) n°1-2, pp.336-356.
- [19] S. Mizohata : Unicité du prolongement des solutions pour quelques opérateurs différentiels paraboliques. *Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto*, Ser.A31, 1958, pp.219-239.
- [20] A. Osses : A rotated direction multiplier technique and some applications. Soumis à *SIAM J. on Control and Optimization et Rapport interne CMAP École Polytechnique N°397*, 1998.

- [21] J. Ralston : Gaussian beams and the propagation of singularities. Studies in Partial Differential Equations, MAA Stud. Math. 23, 1982 pp.246-248.
- [22] E. Zuazua : Exact controllability for the semilinear wave equation in one space dimension. Annales de l'I.H.P. Analyse non linéaire, 10, (1993), pp.109-129.

---

J.-P. PUEL, Laboratoire de Mathématiques de Versailles, Université de Versailles  
St Quentin • *E-mail* : Jean-Pierre.Puel@math.uvsq.fr