Rencontre ARIVAF 1

Exposé (9)

Sylvain Maugeais

Ces notes sont en grande partie inspirée de celles d'Anna (cf. [Cad]) auxquelles nous renvoyons pour plus de références.

1 Invariance du groupe fondamental

Le but est ici de montrer le résultat suivant.

Théorème 1.1 *Soit X un schéma connexe et régulier et $U \subset X$ un ouvert tel que $X \setminus U$ est de codimension ≥ 2. Alors*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_X & \to & \mathcal{C}_U \\ U & \mapsto & Y \times_X U \end{array}$$

induit une équivalence de catégorie, et donc un isomorphisme de groupes profinis $\pi_1(U) \to \pi_1(X)$.

Montrons tout d'abord que pour tous revêtements étales Y et Z de X, l'application de restriction à U

$$\mathrm{Hom}_X(Y, Z) \to \mathrm{Hom}_U(Y|_U, Z|_U)$$

est bijective.

Comme Z est séparé (car $Z \to X$ est un revêtement étale [1] que de X, donc fini et, par suite, affine) le lieu d'égalité de deux morphismes à valeurs dans Z est un fermé, et comme $Z|_U$ est dense dans Z (car U est dense dans X, ce dernier étant irréductible) on trouve que l'application ci-dessus est injective.

Pour la surjectivité, il s'agit de voir qu'un morphisme $Y|_U \to Z|_U \to Z$ peut s'étendre à Y, c'est-à-dire que l'image de $\mathcal{O}_Z \to \mathcal{O}_{Y|_U}$ est en fait dans $\mathcal{O}_Y$, mais cela provient de la normalité de Y et du fait que $U \setminus (U \times_X Y)$ est de codimension ≥ 2, qui implique que $\mathcal{O}_Y(Y) \to \mathcal{O}_Y(Y \times_X U)$ est un isomorphisme.

Il ne reste donc qu'à montrer l'essentielle surjectivité. Considérons pour cela un revêtement étale $V \to U$. On peut supposer que V est connexe, il est alors la clôture intégrale de U dans le corps des fractions $k(V)$ de V.

Notons Y la clôture intégrale de Y dans $k(V)$. Comme $k(V)/k(U)$ est finie séparable, le morphisme $Y \to X$ est fini. D'autre part, on a $Y \times_X U = V$.

On conclut alors sur le fait que $X \to Y$ est étale grâce au théorème de pureté suivant.

Théorème 1.2 (Théorème de pureté de Zariski-Nagata) *Soient X un schéma normal, Y un schéma régulier et $f \colon X \to Y$ un morphisme quasi-fini et dominant. Notons Z_f le lieu des points de X en lesquels f n'est pas étale. Si* $\mathrm{codim} Z_f > 1$ *alors $Z_f = \emptyset$.*

1. il ne suffit pas ici que $Z \to X$ soit étale !

Donnons nous maintenant une application birationnelle $f\colon W \to Y$ induisant un isomorphisme en tout point de codimension ≤ 1 et notons V_f l'ouvert maximal sur lequel f est définie. En particulier V_f est de codimension ≥ 2 dans W, et il en est de même de $f(V_f)$ dans Y. On a donc, d'après le théorème montré ci-dessus, des équivalences de catégories

$$\mathcal{C}_Y \leftrightarrow \mathcal{C}_{V_f} \leftrightarrow \mathcal{C}_W$$

et donc un isomorphisme

$$\pi_1(W) \xrightarrow{\sim} \pi_1(Y).$$

On remarque alors que, dès que $\dim X \geq 2$, $\pi_1(Y, y)$ ne peut capturer la classe d'isomorphie de Y !

2 Finitude du groupe fondamental d'un schéma propre sur un corps algébriquement clos

Théorème 2.1 *Soit k un corps algébriquement clos et X un k-schéma propre. Alors $\pi_1(X)$ est topologiquement de type fini.*

Première étape : on peut supposer que X est normal, projectif et connexe.

D'après le lemme de Chow, il existe un morphisme $X' \to X$ surjectif et birationnel tel que $X' \to \operatorname{Spec} k$ est projectif. Si $\pi_1(X')$ est topologiquement de type fini, on conclut sur la finitude de $\pi_1(X)$ grâce aux deux théorèmes suivants.

Théorème 2.2 *Les morphismes surjectifs propres sont de descentes effectives pour la catégorie des revêtements étales.*

Théorème 2.3 *Soit $S' \to S$ un morphisme de descente effective pour la catégorie des revêtements étales. Supposons que $\pi_0(S')$ et $\pi_0(S' \times_S S')$ sont finis, et que les groupes fondamentaux des composantes connexes de S' sont topologiquement de types finis. Alors c'est aussi le cas de $\pi_1(S)$.*

Ainsi, si $\pi_1(X')$ est topologiquement de type fini, il en est de même de $\pi_1(X)$ car tout les schémas considérés sont de type fini sur un corps, et donc ont un nombre fini de composantes irréductibles.

D'autre part, on a $\pi_1(X'_{red}) = \pi_1(X')$.

Finalement, la normalisation $\widetilde{X}'_{red} \to X'_{red}$ est finie, donc projective, il en est donc de même de $\widetilde{X}'_{red} \to \operatorname{Spec} k$. On montre ainsi que si $\pi_1(\widetilde{X}'_{red})$ est topologiquement de type fini, alors $\pi_1(X)$ aussi.

Deuxième étape : on peut supposer que X est une courbe

Soit X un schéma projectif sur un corps algébriquement clos k qui est de plus normal, connexe et de dimension $d \geq 2$. Alors il existe un fermé connexe $Y \subset X$ tel que $\dim Y < \dim X$ et le morphisme $\pi_1(Y) \to \pi_1(X)$ est un épimorphisme de groupes profinis.

Preuve : Considérons une immersion fermée $i\colon X \to \mathbb{P}^n_k$ et $H \subset \mathbb{P}^n_k$ une section hyperplane telle que $X \not\subset H$.

Comme X est intègre, $Y = X \cap H$ est localement définit dans X par un élément régulier, donc $\operatorname{codim}_X X \cap H = 1$, c'est-à-dire que $\dim X \cap H = d - 1$.

Proposition 2.4 *Soit Z un schéma normal, connexe, de dimension ≥ 2, $f\colon Z \to X$ un morphisme fini, $X \to \mathbb{P}^n$ une immersion fermée et H un hyperplan de $\mathbb{P}^n$ ne contenant pas X. Alors $(X \cap H) \times_X Z$ est connexe.*

Preuve : cf. Hartshorne [Har77] Corollary III.7.9, qui le démontre pour $Z = X$. L'énoncé ci-dessus se démontre de manière semblable en utilisant de plus que f est fini, et donc que f_* est exact. $\square$

À l'aide de ce théorème, on voit que Y est connexe. Nous allons montrer que $\pi_1(Y) \to \pi_1(X)$ est un épimorphisme. Pour cela, il suffit de voir que le foncteur

$$(Z \to X) \mapsto (Z \times_X Y \to Y),$$

définit sur la catégorie des revêtements étales de X, envoie un objet connexe sur un objet connexe. Mais ce dernier fait est assuré par la proposition ci-dessus.

Utilisant la première étape et une récurrence sur d, on se ramène alors à montrer le théorème pour une courbe propre et lisse sur un corps algébriquement clos.

Troisième étape : démonstration pour les courbes en caractéristique 0

Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique 0 et X/k une courbe propre et lisse. Comme X/k est de présentation fini, elle provient par changement de base d'une courbe X' définie sur un corps k' qui est une extension algébrique de $\mathbb{Q}$. En particulier, on peut supposer que $k' \subset \mathbb{C}$ puis que $\bar{k}' \subset \mathbb{C}$.

Par invariance du π_1 par changement d'un corps algébriquement clos à un autre, on a

$$\pi_1(X) = \pi_1(X' \otimes_{k'} k) = \pi_1(X' \otimes_{k'} \bar{k}') = \pi_1(X' \otimes_{k'} \mathbb{C}).$$

En particulier, on peut supposer que $k = \mathbb{C}$. Le résultat provient de GAGA et de la description explicite du groupe fondamental topologique des courbes :

$$\pi_1(X_{\mathbb{C}}) = \widehat{\pi_1^{top}(X^{an})}.$$

Quatrième étape : démonstration pour les courbes en caractéristique p

Nous allons nous ramener au cas des courbes en caractéristique 0 par déformation.

Théorème 2.5 *Soit A un anneau local complet noethérien de corps résiduel k et X/k un schéma lisse.*

i) Si $\mathrm{H}^2(X, \Omega^{\vee}_{X/k}) = 0$, alors il existe un schéma formel $\mathcal{X}/\mathrm{Spf}(A)$ lisse dont la fibre spéciale est X.

ii) Si, de plus, X est projectif et $\mathrm{H}^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$*, alors* $\mathcal{X}$ *est le complété formel d'un schéma lisse sur* $\operatorname{Spec} A$*.*

Utilisant ce théorème pour un corps algébriquement clos k et pour $A = W(k)$ son anneau de vecteurs de Witt, on montre que toute courbe propre et lisse sur k provient d'une courbe sur A. Le théorème de spécialisation du groupe fondamental permet alors de conclure.

Références

[Cad] A. Cadoret, *Galois categories*, Proceedings of the Summer School "Arithmetic and Geometry around Galois Theory - Istanbul 2009", Progress in Math.

[Har77] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Springer-Verlag, New York, 1977, Graduate Texts in Mathematics, No. 52.