POIDS ET SYSTÈMES DE RACINES - APPLICATION À LA DÉTERMINATION DU GROUPE DE MUMFORD-TATE DE CERTAINES VARIÉTÉS ABÉLIENNES (D'APRÈS Y. ZARHIN ET B. MOONEN)

ANNA CADORET

Contents

Dans cet exposé, k désignera toujours un corps de caractéristique 0.

1. Introduction

L'objectif de cet exposé est d'introduire la théorie des algèbres de Lie semisimples scindées, notamment d'expliquer comment associer à toute algèbre de Lie semisimple scindée un système de racines et décrire comment cette donnée permet de classifier les algèbres de Lie semisimples scindées et leurs représentations de dimension finie. On terminera l'exposé par une étude succinte des représentations minuscules d'une algèbre de Lie semisimple scindée que l'on appliquera pour montrer le théorème suivant (initialement présenté par Nicolas Ratazzi dans l'exposé 7)

Theorem 1.1. *Soit A une variété abélienne sur $\mathbb{C}$ de dimension impaire et d'anneau d'endomorphismes $\mathbb{Z}$. Alors*

$$MT(A) = \mathrm{GSp}(\mathrm{H}^1_B(A(\mathbb{C}), \mathbb{Q}), \varphi).$$

La plupart des preuves seront omises d'une part par paresse, d'autre part pour ne pas noyer l'exposé dans des détails techniques. Le matériel présenté ici est par ailleurs standard. Pour les algèbres de Lie semisimples scindées, on pourra se référer à [B90], [H72] ou [S66]. Pour la théorie des représentations minuscules appliquées aux groupes de Mumford-Tate, aux notes de B. Moonen [Mo99] et à l'article

Date: Rencontre ARIVAF 8 - 10 novembre 2011, Paris.

original de Y. Zarhin [Za85] dont elles s'inspirent.

Soit V un k-espace vectoriel de dimension finie. On appelle *reflexion de* V toute automorphisme k-linéaire $s : V\tilde{\to}V$ tel que $\ker(s - Id_V)$ (resp. $\ker(s + Id_V)$) est un hyperplan (resp. une droite) de V; on dit alors que les éléments non nuls de $\ker(s + Id_V)$ sont les vecteurs de $s : V\tilde{\to}V$. Si $s : V\tilde{\to}V$ est une reflexion de V, le choix d'un vecteur α détermine un unique $\alpha^* \in V^\vee$ tel que $(\alpha, \alpha^*) := \alpha^*(\alpha) = 2$ et $\ker(\alpha^*) = \ker(s - Id_V)$. On a alors $s(v) = v - (v, \alpha^*)\alpha$, $v \in V$.

On appelle *système de racines* sur k tout couple (V, R) où V est un k-espace vectoriel de dimension finie et $R \subset V$ un sous-ensemble vérifiant les trois axiomes suivants

(SR1) $0 \notin R$, $|R| < +\infty$, R engendre V comme k-espace vectoriel;
(SR2) pour tout $\alpha \in R$ il existe une (unique) reflexion $s_\alpha : V\tilde{\to}V$ de vecteur α telle que $s_\alpha(R) = R$;
(SR3) pour tout $\alpha, \beta \in R$ on a $s_\alpha(\beta) - \beta \in \mathbb{Z}\alpha$.

Remark 1.2.

(1) Sous (SR1) et la condition $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$, l'unicité de $s_\alpha : V\tilde{\to}V$ est automatique; c'est donc l'existence qui importe.
(2) (SRi), $i = 1, 2, 3$ équivalent à (SR1) et pour tout $\alpha \in R$ il existe un unique $\alpha^* \in V^\vee$ tel que $(\alpha, \alpha*) = 2$, $(R, \alpha^*) \subset \mathbb{Z}$ et $s_{\alpha,\alpha^*}(R) = R$.
(3) Pour tout $\alpha \in R$ on a toujours $k\alpha \cap R = \{\pm\alpha\}$ ou $k\alpha \cap R = \{\pm\alpha, \pm\frac{1}{2}\alpha\}$. Dans le premier cas, on dit que (V, R) est *réduit*.

2. Algèbres de Lie semisimples scindées (ALSSS)

2.1. **Algèbres de Lie semisimples ALSS.** Soit $\mathfrak{g}$ une k-algèbre de Lie de dimension finie. Pour tout $x \in \mathfrak{g}$, on note $ad_\mathfrak{g}(x) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ l'endomorphisme k-linéaire défini par $ad_\mathfrak{g}(x)(y) = [x, y]$, $y \in \mathfrak{g}$ et

$$\begin{array}{rccl} \kappa_\mathfrak{g} : & \mathfrak{g} \otimes_k \mathfrak{g} & \to & k \\ & x \otimes y & \to & Tr_\mathfrak{g}(ad_\mathfrak{g}(x) \circ ad_\mathfrak{g}(y)) \end{array}$$

la *forme de Killing de* $\mathfrak{g}$, qui est une forme k-bilinéaire symétrique associative *i.e.* $\kappa_\mathfrak{g}(x \otimes [y, z]) = \kappa_\mathfrak{g}([x, y] \otimes z)$ (identité de Jacobi).

Proposition 2.1. *Les conditions suivantes sont équivalentes*

(1) $\mathfrak{g}$ *ne contient pas d'idéal commutatif non trivial;*
(2) $Rad(\mathfrak{g}) = 0$, *où* $Rad(\mathfrak{g})$ *est le radical résoluble de* $\mathfrak{g}$*;*
(3) $\kappa_\mathfrak{g} : \mathfrak{g} \otimes_k \mathfrak{g} \to k$ *est non-dégénérée;*
(4) $\mathfrak{g}$ *n'a qu'un nombre fini d'idéaux simples* $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_r$ *et* $\mathfrak{g} = \oplus_{1\leq i\leq r}\mathfrak{g}_i$ *(comme k-espace vectoriels) ou, de façon équivalente,* $\mathfrak{g} = \prod_{1\leq i\leq r} \mathfrak{g}_i$ *(comme k-algèbres de Lie).*

On dit alors que $\mathfrak{g}$ est *semisimple.*

Dérivations et décomposition de Jordan abstraite:

Soit $\mathfrak{g}$ une k-algèbre de Lie de dimension finie. Notons

$$\mathrm{Der}_k(\mathfrak{g}) := \{d : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}\ k-\text{linéaire} \mid d([x, y]) = [dx, y] + [x, dy],\ x, y \in \mathfrak{g}\} \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$$

la sous-k-algèbre de Lie des dérivations de $\mathfrak{g}$. On a toujours une suite exacte de k-algèbres de Lie

$$0 \to Z(\mathfrak{g}) \to \mathfrak{g} \stackrel{ad_\mathfrak{g}}{\to} \mathrm{Der}_k(\mathfrak{g})$$

Lorsqu'on suppose de plus $\mathfrak{g}$ semisimple, on a mieux.

Lemma 2.2. *Si* $\mathfrak{g}$ *semisimple alors* $ad_\mathfrak{g} : \mathfrak{g}\tilde{\to}\mathrm{Der}_k(\mathfrak{g})$ *est un isomorphisme.*

Supposons maintenant $\mathfrak{g}$ semisimple. Pour tout $x \in \mathfrak{g}$ on dispose de la décomposition de Jordan usuelle

$$ad_\mathfrak{g}(x) = ad_\mathfrak{g}(x)_n + ad_\mathfrak{g}(x)_s$$

comme somme d'un endormorphisme nilpotent et d'un endomorphisme semisimple uniques et polynomiaux en $ad_{\mathfrak{g}}(x)$. On montre facilement que $ad_{\mathfrak{g}}(x)_n$ et $ad_{\mathfrak{g}}(x)_s$ sont encore des dérivations. Par le lemme 2.2, il existe donc un unique couple $x_n, x_s \in \mathfrak{g}$ tel que

$$ad_{\mathfrak{g}}(x_n) = ad_{\mathfrak{g}}(x)_n,\ ad_{\mathfrak{g}}(x_s) = ad_{\mathfrak{g}}(x)_s.$$

On dit alors que $x = x_n + x_s$ est la *décomposition de Jordan abstraite* de x dans $\mathfrak{g}$. Cette décomposition de Jordan abstraite s'incarne dans toutes les représentations de dimension finie de $\mathfrak{g}$ en la décomposition de Jordan usuelle.

Proposition 2.3. (Préservation de la décomposition de Jordan) *Pour toute représentation $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ de dimension finie,*

$$\rho(x_s) = \rho(x)_s,\ \rho(x_n) = \rho(x)_n,\ x \in \mathfrak{g}.$$

Représentations:

Notons $\mathrm{Rep}_k(\mathfrak{g})$ la catégorie des représentations de dimension finie de $\mathfrak{g}$ sur k *i.e.* des couples (V, ρ), où V est un k-espace vectoriel de dimension finie et $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ un morphisme de k-algèbres de Lie. On a alors l'énoncé suivant, justifiant la terminologie 'semisimple'.

Theorem 2.4. (Weyl) $\mathfrak{g}$ *est semisimple si et seulement si* $\mathrm{Rep}_k(\mathfrak{g})$ *est semisimple.*

2.2. $\mathfrak{sl}_2(k)$**.** Les k-algèbres de Lie de dimension 1 et 2 sont abéliennes ou résolubles. C'est en dimension 3 qu'apparait la première k-ALSS, qui est $\mathfrak{sl}_2(k)$, le noyau de la trace sur $\mathfrak{gl}_2(k)$. On peut la décrire par générateurs et relations comme suit.

$$\begin{array}{l} \mathfrak{sl}_2(k) = kx \oplus ky \oplus kh \\ [h, x] = 2x,\ [h, y] = -2y,\ [x, y] = h. \end{array}$$

et, concrètement, on peut prendre

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Notons que $x = x_n$, $y = y_n$ et $h = h_s$.

On va voir que $\mathfrak{sl}_2(k)$ est la brique de base qui apparait dans le théorème de structure des k-ALSSS. Pour en comprendre la preuve, il est indispensable d'avoir bien compris les représentations simples de $\mathfrak{sl}_2(k)$ sur lesquelles h agit diagonalement (rappelons que par préservation de la décomposition de Jordan, h agit toujours de façon semisimple). On va donc décrire leur classification ci-dessous. Cela nous donnera également le 'baby-case' du théorème de classification des modules simples de dimension finie sous une k-ALSSS.

Soit donc V un $\mathfrak{sl}_2(k)$-module de dimension finie sur lequel h agit diagonalement. Ecrivons

$$V = V_0 \oplus \bigoplus_{\lambda \in P(V)} V_\lambda,$$

où $P(V)$ désigne l'ensemble des *poids de V i.e.* des valeurs propres non nulles de h agissant sur V et V_λ l'*espace de poids λ i.e.* $V_\lambda := \ker(h - \lambda Id_V)$.

On appelle *vecteur primitif de V de poids $\lambda \in P(V)$* tout $v \in V_\lambda$, $v \neq 0$ tel que $xv = 0$.

Etant donné un vecteur primitif v_0 de poids λ, posons

$$\begin{array}{l} v_{-1} = 0 \\ v_i = \frac{1}{i!} y^i v_0\ i \geq 0\ (= \frac{1}{i} v_{i-1},\ i \geq 1). \end{array}$$

On peut alors décrire explicitement (par récurrence, en utilisant Jacobi et les relations de $\mathfrak{sl}_2(k)$) les actions de x, y, h sur les v_i, $i \geq -1$.

Lemma 2.5. *Pour tout $i \geq 0$ on a*

(1) $hv_i = (\lambda - 2i)v_i$;
(2) $yv_i = (i+1)v_{i+1}$;
(3) $xv_i = (\lambda - i + 1)v_{i-1}$.

La relation (1) impose aux v_i non nuls d'être libres donc, V étant de dimension finie, cela permet de définir le plus petit entier m tel que $v_m \neq 0$ mais $v_{m+1} = 0$. Les relations (1), (2), (3) montrent alors que

$$W := \bigoplus_{0 \leq i \leq m} kv_i$$

est un $\mathfrak{sl}_2(k)$-sous-module. En outre, h agit encore diagonalement sur W avec

$$P(W) = \{\lambda - 2i \mid 0 \leq i \leq m\}$$

et $\dim_k(W_\lambda) = 1$, $\lambda \in P(W)$. Cela impose à W d'être un $\mathfrak{sl}_2(k)$-module simple. En effet, si $W' \subset W$ est un sous-$\mathfrak{sl}_2(k)$-module, h agit encore diagonalement sur W' (puisque le polynôme minimal de $h|_{W'}$ divise celui de $h|_W$ donc est scindé sur k) donc contient au moins l'un des v_i. Mais alors, par les relations (2) et (3), il les contient tous. Enfin, la relation (3) pour $i = m+1$ montre que

$$\lambda = m = \dim_k(W).$$

On peut résumer ces observations par

Lemma 2.6. (Classification des $\mathfrak{sl}_2(k)$-modules simples de dimension finie) *Notons* $\mathrm{Rep}^{irr}_{\mathfrak{sl}_2(k)}$ *la catégorie des $\mathfrak{sl}_2(k)$-modules simples de dimension finie. On a alors une correspondance bijective*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Rep}^{irr}_{\mathfrak{sl}_2(k)}/\simeq & \leftrightarrow & \mathbb{Z}_{\geq -1} \\ V & \rightarrow & \dim_k(V) - 1 \\ V(m) \text{ (défini par les relations (1), (2), (3))} & \leftarrow & m \end{array}$$

2.3. **Sous-algèbres de Cartan.** Soit $\mathfrak{g}$ une k-ALSS de dimension finie et $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ une sous-k-algèbre de Lie. On dit que $\mathfrak{h}$ est *torique* si $x = x_s$, $x \in \mathfrak{h}$ et que $\mathfrak{h}$ est *de Cartan* (*déployante*) si $\mathfrak{h}$ est torique maximale (et $\mathrm{spec}(\mathrm{ad}_\mathfrak{g}(x)) \subset k$, $x \in \mathfrak{h}$).

On a le résultat élémentaire - mais essentiel - suivant.

Lemma 2.7. *Toute sous-k-algèbre de Lie torique est abélienne.*

Notons $\mathcal{C}(\mathfrak{g})$ l'ensemble des sous-k-algèbres de Cartan déployantes. Alors,

Theorem 2.8. *Le groupe* $\mathrm{Aut}_{\mathrm{Lie}/k}(\mathfrak{g})$ *agit transitivement sur* $\mathcal{C}(\mathfrak{g})$.

On peut donc définir le *rang* d'une k-ALSS $\mathfrak{g}$ comme la k-dimension commune des éléments de $\mathcal{C}(\mathfrak{g})$.

Enfin, on appelle k-algèbre de Lie *semisimple scindée (ou déployée)* (ALSSS) tout couple $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, où $\mathfrak{g}$ est une k-ALSS de dimension finie et $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ une sous-k-algèbre de Cartan déployante.

Example 2.9. Dans $\mathfrak{sl}_n(k)$ les algèbres de Cartan sont toutes conjuguées à la sous-k-algèbre des matrices diagonales de trace nulle; le rang de $\mathfrak{sl}_n(k)$ est donc $n-1$.

2.4. **Système de racines associé à une k-ALSSS et structure.** Soit $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ une k-ALSSS. Par le lemme 2.7, $\mathfrak{h}$ agit diagonalement sur $\mathfrak{g}$ par adjonction. On peut donc décomposer

$$\mathfrak{g} = C_\mathfrak{g}(\mathfrak{h}) \oplus \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{h}^\vee \setminus \{0\}} \mathfrak{g}^\alpha,$$

où, pour tout $\alpha \in \mathfrak{h}^\vee$ on a posé

$$\mathfrak{g}^\alpha := \{x \in g \ l \ [h, x] = \alpha(h)x, \ h \in \mathfrak{h}\}.$$

Notons enfin

$$R := \{\alpha \in \mathfrak{h}^\vee \setminus \{0\} \mid \mathfrak{g}^\alpha \neq 0\}.$$

L'identité de Jacobi montre que pour tout $\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^\vee$ on a toujours $[\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^\beta] \subset \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}$. En particulier, si $\alpha + \beta \neq 0$, $\mathfrak{g}^\alpha$ et $\mathfrak{g}^\beta$ sont orthogonales pour la forme de Killing. On en déduit que la forme de Killing

reste non dégénérée sur les $\mathfrak{g}^\alpha + \mathfrak{g}^{-\alpha}$, $\alpha \in \mathfrak{h}^\vee$ (donc en particulier sur $\mathfrak{g}^0 = C_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})$).
On a le fait suivant, pas tout à fait immédiat

Lemma 2.10. $C_\mathfrak{g}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$.

La forme de Killing est donc non dégénérée sur $\mathfrak{h}$ aussi. Cela permet d'identifier

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{h} & \tilde{\to} & \mathfrak{h}^\vee \\ t & \to & \kappa_\mathfrak{g}(t,-) \\ t_\alpha & \leftarrow & \alpha \end{array}$$

et de munir $\mathfrak{h}^\vee$ d'une forme k-bilinéaire symétrique non-dégénérée $\langle -,- \rangle : \mathfrak{h}^\vee \otimes_k \mathfrak{h}^\vee \to k$ définie par

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \kappa_\mathfrak{g}(t_\alpha, t_\beta).$$

Commençons par le petit lemme suivant.

Lemma 2.11. *Pour tout $\alpha \in \mathfrak{h}^\vee$, $x \in \mathfrak{g}^\alpha$, $y \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$ on a*

$$[x,y] = \kappa_\mathfrak{g}(x,y)t_\alpha.$$

Preuve. Comme $\kappa_\mathfrak{g}$ est non dégénérée sur $\mathfrak{h}$, il suffit de montrer que

$$\kappa_\mathfrak{g}([x,y] - \kappa_\mathfrak{g}(x,y)t_\alpha, h) = 0, \ h \in \mathfrak{h}.$$

Or $\kappa_\mathfrak{g}([x,y],h) = \kappa_\mathfrak{g}(x,[y,h]) = \alpha(h)\kappa_\mathfrak{g}(x,y)$ par associativité de $\kappa_\mathfrak{g}$ alors que $\kappa_\mathfrak{g}(\kappa_\mathfrak{g}(x,y)t_\alpha, h) = \alpha(h)\kappa_\mathfrak{g}(x,y)$ par définition de t_α. □

Notons $\mathfrak{h}_\alpha := [\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^{-\alpha}]$. Le lemme 2.11 nous dit déjà que $\mathfrak{h}_\alpha$ est de dimension au plus 1. En fait

Lemma 2.12. $\mathfrak{h}_\alpha$ *est de dimension* 1 *et il existe un unique* $h_\alpha \in \mathfrak{h}_\alpha$ *tel que* $(h_\alpha, \alpha) = 2$.

Preuve. Pour la première partie de l'assertion, il suffit d'observer que pour tout $x \in \mathfrak{g}^\alpha$, $x \neq 0$ il existe $y \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$, $\neq 0$ tel que $[x,y] = \kappa_\mathfrak{g}(x,y) \neq 0$. En effet, sinon, x serait orthogonal à $\mathfrak{g}^{-\alpha}$ pour la forme de Killing or on sait déjà que x est orthogonal à $\bigoplus_{\beta \neq -\alpha} \mathfrak{g}^\beta$. Donc comme $\kappa_\mathfrak{g}$ est non dégénérée, cela imposerait $x = 0$. L'unicité dans la seconde partie de l'assertion résulte du fait que $\mathfrak{h}_\alpha$ est de dimension 1. Pour l'existence, il suffit de montrer que $\langle \alpha, \alpha \rangle = \alpha(t_\alpha) \neq 0$ (puis poser $h_\alpha = 2t_\alpha / \langle \alpha, \alpha \rangle$). Si on avait $\alpha(t_\alpha) = 0$, en choisissant $x \in \mathfrak{g}^\alpha$, $y \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$ tels que $\kappa_\mathfrak{g}(x,y) = 1$ donc $[x,y] = t_\alpha$, on aurait $[t_\alpha, x] = [t_\alpha, y] = 0$. Donc

$$\mathfrak{r}_\alpha := kx \oplus ky \oplus kt_\alpha$$

serait une sous-k-algèbre de Lie résoluble et par théorème de Lie appliqué à $\mathfrak{r}_\alpha$ opérant par adjonction sur $\mathfrak{g}$, on aurait

$$ad_\mathfrak{g}(t_\alpha) = [ad_\mathfrak{g}(x), ad_\mathfrak{g}(y)]$$

nilpotent donc $t_\alpha = t_{\alpha,n}$. Mais par hyothèse, $t_\alpha = t_{\alpha,s}$ donc $t_\alpha = 0$: contrad. □

Pour tout $\alpha \in R$ et pour tout $x_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$, $x_\alpha \neq 0$ il existe donc $y_\alpha \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$ tels que $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$ et

$$\mathfrak{s}_\alpha = kx_\alpha \oplus ky_\alpha \oplus kh_\alpha$$

est isomorphe à $\mathfrak{sl}_2(k)$. En fait, le lemme suivant montre que $\mathfrak{g}^\alpha$ est de dimension 1 donc une fois que x_α est donné, y_α est également uniquement déterminé.

Lemma 2.13. $\mathfrak{g}^\alpha$ *est de dimension* 1.

Preuve. Supposons que $\mathfrak{g}^\alpha$ soit de dimension ≥ 2 alors on peut toujours trouver $y \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$ tel que $[x_\alpha, y] = 0$. Mais comme $[h_\alpha, y] = -2y$, y apparaît comme un vecteur primitif du $\mathfrak{s}_\alpha$-module $\mathfrak{g}$ de poids -2. C'est impossible puisque les vecteurs primitifs sont de poids positif. □

Proposition 2.14. $R \subset \mathfrak{h}^\vee$ *est un système de racines réduit.*

Preuve. Elle repose essentiellement sur les deux lemmes suivants.

Lemma 2.15. *Pour tout $\alpha, \beta \in R$ tels que $\alpha \neq \pm\beta$ notons*

$$p = \max\{n \in \mathbb{Z} \,|;\; \beta - n\alpha \in R\},\; q = \max\{n \in \mathbb{Z} \,|;\; \beta + n\alpha \in R\}$$

et introduisons

$$V := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}^{\beta+n\alpha}$$

(1) *V est un sous-$\mathfrak{s}_\alpha$-module simple de poids $p+q$ et pour tout $-p \leq n \leq q$, on a $\beta + n\alpha \in R$;*
(2) *$\beta(h_\alpha) = p - q \in \mathbb{Z}$;*
(3) *pour tout $-p \leq n \leq q-1$, $ad_g(x_\alpha)$ induit un isomorphisme $ad_g(x_\alpha) : \mathfrak{g}^{\alpha+n\beta} \tilde{\to} \mathfrak{g}^{\alpha+(n+1)\beta}$.*

Preuve. L'hypothèse $\alpha \neq \pm\beta$ assure que V est bien un sous-$\mathfrak{s}_\alpha$-module. Ses poids sont

$$P(V) := \{\beta(h_\alpha) + 2n \mid n \in \mathbb{Z},\; \beta + n\alpha \in R\}.$$

En particulier, 0 et 1 ne peuvent pas être simultanément des poids et comme pour tout $\lambda \in P(V)$, V_λ est de dimension 1 par le lemme 2.13, il résulte du lemme 2.6, que V est un $\mathfrak{s}_\alpha$-module simple. Les autres assertions découlent immédiatement de cette observation et de la structure des $\mathfrak{s}_\alpha$-modules simples. □

Lemma 2.16. *Pour tout $\alpha \in R$ on a $k\alpha \cap R = \{\pm\alpha\}$.*

Preuve. Là encore on introduit les sous-$\mathfrak{s}_\alpha$-modules

$$W := \bigoplus_{a\in k,\; a\neq 0,\pm 1} \mathfrak{g}^{a\alpha}.$$

On a

$$V := \bigoplus_{a\in k} \mathfrak{g}^{a\alpha} = \ker(\alpha) \oplus \mathfrak{s}_\alpha \oplus W$$

et

$$P(V) = \{2a \mid a \in k,\; a \neq 0,\; a\alpha \in R\}.$$

Comme les poids de W sont impairs (0 n'est pas poids), les seuls poids pairs de V sont 0 et ± 2; en particulier $2\alpha \notin R$. Si 1 était un poids de W, on aurait $\frac{1}{2}\alpha \in R$: contrad. Donc $W = 0$. □

Conclusion: Le lemme 2.16 dit précisément que R est réduit. (SR2) et (SR3) découlent du lemme 2.15 en posant $s_\alpha(\phi) = \phi - 2\frac{\langle\phi,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}\alpha$ et en observant qu'alors, pour tout $\beta \in R$ on a $s_\alpha(\beta) = \beta - \beta(h_\alpha)\alpha$. Enfin, pour (SR1), si $\mathfrak{h}^\vee$ n'était pas engendré par R il existerait $\phi \in \mathfrak{h}^\vee$, $\phi \neq 0$ tel que $\langle\alpha, \phi\rangle = 0$, $\alpha \in R$ donc $t_\phi \in \ker(ad_\mathfrak{g}) = Z(\mathfrak{g}) = 0$: contrad. □

Example 2.17. Si $E_{i,j}$, $1 \leq i,j \leq r$ désigne la base canonique de $\mathfrak{gl}_n(k)$ et si on pose $\epsilon_{i,j} = E^*_{i,j}$, $\delta_{i,j} = E^*_{i,i} - E^*_{j,j}$ alors le système de racines de $(\mathfrak{sl}_n(k), \mathfrak{sl}_n(k) \cap D_n(k))$ est

$$R = \{\delta_{i,j}\}_{1\leq i<j\leq n}$$

et on peut prendre $x_{\delta_{i,j}} = E_{i,j}$, $y_{\delta_{i,j}} = E_{j,i}$ et $h_{\delta_{i,j}} = E_{i,i} - E_{j,j}$.

3. Systèmes de racines

3.1. **Indépendence du corps de base et complète réductibilité.** Soit (V, R) un système de racines sur k et $V_0 \subset V$ le sous-$\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par R. Alors (V_0, R) est encore un système de racines sur $\mathbb{Q}$ et $V_0 \otimes_\mathbb{Q} k \tilde{\to} V$. Cela permettra dans la suite de se limiter au cas $k = \mathbb{R}$.

Lemma 3.1. (Complète réductibilité)

(1) *Soit (V_i, R_i), $i = 1, \ldots, r$ des systèmes de racines. Alors $(\oplus_{i=1}^r V_i, \sqcup_{i=1}^r R_i)$ est encore un système de racines.*

(2) *On dit qu'un système de racines (V, R) est indécomposable s'il ne peut s'écrire sous la forme*

$$(V, R) = (V_1 \oplus V_2, R_1 \sqcup R_2),$$

avec (V_i, R_i), $i = 1, 2$ des systèmes de racines non nuls. En général, il existe une unique partition $R = \sqcup_{i=1}^r)R_i$ telle que, si V_i désigne le sous-k-espace vectoriel engendré par R_i alors

$$(V, R) = (\oplus_{i=1}^r V_i, \sqcup_{i=1}^r R_i).$$

Example 3.2. Soit $(g, \mathfrak{h})$ une k-ALSSS alors $\mathfrak{g}$ est simple si et seulement si $(\mathfrak{h}^\vee, R)$ est indécomposable. En général, écrivons

$$\mathfrak{g} = \oplus_{i=1}^r \mathfrak{g}_i$$

comme somme directe de ses idéaux simples. Alors $\mathfrak{h}_i := \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_i$ est une sous-k-algèbre de Cartan déployante de $\mathfrak{g}_i$, $i = 1, \dots r$ et en notant $\tilde{}: \mathfrak{h}_i^\vee \hookrightarrow \mathfrak{h}^\vee$ l'injection canonique (qui envoie $\alpha_i \in \mathfrak{h}_i^\vee$ sur $\tilde{\alpha_i} \in \mathfrak{h}^\vee$ défini par $\tilde{\alpha_i}|_{\mathfrak{h}_i} = \alpha_i$, $\tilde{\alpha_i}|_{\mathfrak{h}_j} = 0$, $i \neq j$), on a

$$(\mathfrak{h}^\vee, R) = (\oplus_{i=1}^r \tilde{\mathfrak{h}_i}, \sqcup_{1 \leq i \leq r} R_i).$$

3.2. **Orientation: bases, chambres de Weyl et groupe de Weyl.** Soit (V, R) un système de racines sur $\mathbb{R}$. Le *groupe de Weyl* de (V, R) est le sous-groupe de $\mathrm{GL}(V)$ engendré par les s_α, $\alpha \in R$. Par (SR2) $W(R)$ agit sur R et par (SR1) cette action est fidèle donc $W(R)$ est fini d'ordre au plus $|R|!$. En particulier, on peut toujours munir V d'un produit scalaire $\langle -, - \rangle : V \otimes_\mathbb{R} V \to \mathbb{R}$ $W(R)$-invariant. Avec cette notation, $s_\alpha : V \tilde{\to} V$ est la reflexion orthogonale de vecteur α et $\alpha^* = 2\frac{\langle \alpha, - \rangle}{||\alpha||^2}$.

Les notions de base et de chambre de Weyl - qui sont équivalentes (Lemme 3.3) - permettent d'*orienter un système de racines.* Le choix d'une telle orientation jouera un rôle prépondérant dans la suite.

Notons

$$CW(R) := \pi_0(V \setminus \bigcup_{\alpha \in R} \ker(s_\alpha))$$

l'ensemble des *chambres de Weyl de* (V, R) et $\mathcal{B}(R)$ l'ensemble des *bases de* (V, R) *i.e.* des sous-ensembles $S \subset R$ qui sont des bases de V et tels que

$$R = R_S^+ \sqcup -R_S^+,$$

où $R_S^+ = R \cap \oplus_{\alpha \in S} \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha \subset R$ est l'ensemble des *racines positives de* (V, R) *par rapport à* S.

Soit $T \in CW(R)$ et $t \in T$, on peut définir

$$R_t^+ := \{\alpha \in R \mid \langle t, \alpha \rangle \geq 0\} \text{ (racines positives par rapport à } t)$$

et

$$S_t := \{\alpha \in R_t^+ \mid \alpha \neq \alpha' + \alpha'',\ \alpha',\ \alpha'' \in R_t^+\} \text{ (racines indécomposables par rapport à } t)$$

Alors

Lemma 3.3.

(1) *$S_T := S_t$ ne dépend que de T (pas de $t \in T$) et est une base de (V, R). En particulier, $\mathcal{B}(R) \neq \emptyset$.*

(2) *La correspondance $T \to S_T$ induit une bijection*

$$CW(R) \tilde{\to} \mathcal{B}(R).$$

(3) *$W(R)$ agit simplement transitivement sur $CW(R)$ i.e. tout $T \in CW(R)$ induit donc une bijection*

$$-(T) : W(R) \tilde{\to} CW(R).$$

Lemma 3.4. *Pour tout $S \in \mathcal{B}(R)$, il existe une unique racine $\alpha_S = \sum_{\alpha \in S} n_\alpha \alpha \in R$ telle que pour tout $\sum_{\alpha \in S} m_\alpha \alpha \in R$ on a $m_\alpha \leq n_\alpha$, $\alpha \in S$.*

On dit que la racine α_S est *la plus grande racine de R par rapport à S.*

Example 3.5. Dans le cas de $\mathfrak{sl}_n(k)$, le groupe de Weyl est $\mathcal{S}_{n+1}$ et la plus longue racine par rapport à la base $\delta_{i,i+1}$, $i = 1, \dots, n$ est $\sum_{i=1}^{n} \delta_{i,i+1}$. *Cf.* [H72, p. 66] pour la liste exhaustive des plus longues racines et groupes de Weyl des systèmes de racines indécomposables.

Le choix d'une base $S \in \mathcal{B}(R)$ permet également de définir un ordre partiel sur V en posant $v \leq_S v'$ si et seulement si

$$v' - v \in \bigoplus_{\alpha \in S} \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha.$$

3.3. **Quelques mots sur la classification.** Soit toujours (V, R) un système de racines muni d'un produit scalaire $W(R)$-invariant $\langle -, - \rangle : V \otimes_{\mathbb{R}} V \to \mathbb{R}$ et $S \in \mathcal{B}(R)$. Pour tout $\alpha, \beta \in S$ posons

$$n_{\alpha,\beta} := (\alpha, \beta^*) = \frac{2\langle \alpha, \beta \rangle}{||\beta||^2}.$$

En se plaçant dans le plan Π engendré par deux racines $\alpha \neq \beta \in S$ et en observant que $(\Pi, R \cap \Pi)$ est encore un système de racines, un calcul élémentaire montre que

Lemma 3.6. *Pour tout $\alpha \neq \beta \in S$, quitte à échanger α et β, les seules possibilités sont*

$n_{\alpha,\beta}$	$n_{\beta,\alpha}$	$n_{\alpha,\beta}n_{\beta,\alpha}$	$\lvert\lvert\beta\rvert\rvert^2/\lvert\lvert\alpha\rvert\rvert^2$	*angle* (α, β)
0	0	0	*?*	$\pi/2$
1	1	1	1	$\pi/3$
-1	-1	1	1	$2\pi/3$
1	2	2	2	$\pi/4$
-1	-2	2	2	$3\pi/4$
1	3	3	3	$\pi/6$
-1	-3	3	3	$5\pi/6$

Cf. [H72, Fig.1, p.44] pour une illustration.

On appelle *matrice de Cartan de* (V, R) *dans* S la matrice

$$C_S(V, R) := (n_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta \in S}.$$

et *diagramme de Dynkin de* (V, R) *dans* S le graphe orienté $D_S(V, R)$ dont les sommets sont les éléments de S et, pour tout $\alpha, \beta \in R$ on a

- si $|\alpha| = |\beta|$: $n_{\alpha,\beta}n_{\beta,\alpha}$ flèches non-orientées entre α et β;
- si $|\alpha| < |\beta|$: $n_{\alpha,\beta}n_{\beta,\alpha}$ flèches orientées de β vers α.

On a les lemmes suivant, préliminaires à la classification.

Lemma 3.7. *Supposons V de dimension n.*

(1) *Pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$, notons $P_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ la matrice de permutation associée. Cela définit une action*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{S}_n \times \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \\ (\sigma, M) & \to & P_\sigma M P_\sigma^{-1}. \end{array}$$

L'orbite de $C_S(V, R)$ sous cette action ne dépend que de R et pas de la base S; on la note donc juste $C(V, R)$. Et on a

$$C(V, R) = C(V', R') \Longleftrightarrow (V, R) \simeq (V', R').$$

(2) *De même, $D_S(V, R)$ ne dépend que de (V, R) et pas de la base S; on le note donc juste $D(V, R)$. Et on a*

$$D(V, R) = D(V', R') \Longleftrightarrow (V, R) \simeq (V', R').$$

Lemma 3.8. (V, R) *est irréductible si et seulement si* $D(V, R)$ *est connexe.*

Par ces lemmes, la classification des systèmes de racines indécomposable se ramène donc à la classification des diagramme de Dynkin connexe et à montrer que chaque diagramme de Dynkin connexe correspond bien à un système de racines.

Theorem 3.9. *Il y a 4 famille de systèmes de racines 'classiques' A_n, $n \geq 1$, B_n, $n \geq 2$, C_n, $n \geq 3$, D_n, $n \geq 4$ et 5 systèmes de racines exceptionnels E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 (ici, l'indice désigne toujours la dimension de V).*

Cf. [H72, p.58, 59] pour la liste des diagrammes de Dynkin et des matrices de Cartan correspondants.

Application à la classification des ALSSS:

L'une des premières applications de la théorie des systèmes de racines est la classification des ALSSS. Plus précisément, on a

Theorem 3.10. (Unicité) *Soit $(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{h}_i)$ une k-ALSSS de système de racines $(\mathfrak{h}_i^\vee, R_i)$ et supposons fixée une base $S_i \in \mathcal{B}(R_i)$, $i = 1, 2$. Alors pour toute bijection $r : S_1 \tilde{\to} S_2$ et pour tout choix de $x_{\alpha_i} \in \mathfrak{g}_i^{\alpha_i}$, $x_{\alpha_i} \neq 0$, $\alpha_i \in S_i$, $i = 1, 2$, il existe un unique isomorphisme de k-AL $\phi_r : \mathfrak{g}_1 \tilde{\to} \mathfrak{g}_2$ tel que $\phi_r(x_{\alpha_1}) = x_{r(\alpha_1)}$ et $\phi_r(h_{\alpha_1}) = h_{r(\alpha_1)}$, $\alpha_1 \in S_1$.*

Theorem 3.11. (Existence) *Soit (V, R) un système de racines réduit et supposons k algébriquement clos. Alors il existe une k-ALSS de système de racines (isomorphe à) (V, R).*

Example 3.12. Les systèmes de racines classiques A_n, $n \geq 1$, B_n, $n \geq 2$, C_n, $n \geq 3$, D_n, $n \geq 4$ correspondent respectivement aux 4 familles suivantes de k-ALSS

- $\mathfrak{sl}_n(k) := \{M \in \mathfrak{gl}_n(k) \mid \mathrm{Tr}(M) = 0\}$;
- $\mathfrak{o}_{2n+1}(k) := \{M \in \mathfrak{gl}_{2n+1}(k) \mid {}^tMJ + JM = 0\}$ où
$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix};$$
- $\mathfrak{sp}_{2n}(k) := \{M \in \mathfrak{gl}_{2n}(k) \mid {}^tMJ + JM = 0\}$ où
$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix};$$
- $\mathfrak{o}_{2n}(k) := \{M \in \mathfrak{gl}_{2n}(k) \mid {}^tMJ + JM = 0\}$ où
$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

3.4. **Réseaux des poids et des racines.** Dans cette section, on introduit les notions de réseau des poids et monoide des poids dominants. Dans le cas d'une k-ALSSS $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, on verra que les éléments de du réseaux des poids apparaissent effectivement comme poids des représentations de dimension finie de $\mathfrak{g}$ et que les poids dominants classifient précisément les représentations simples de dimension finie de $\mathfrak{g}$.

Rappelons que pour tout système de racines (V, R) et $\alpha \in R$ il existe un unique $\alpha^* \in V^\vee$ tel que $(\alpha, \alpha^*) = 2$, $s_{\alpha,\alpha^*}(R) = R$ et $(R, \alpha^*) \subset \mathbb{Z}$. Notons
$$R^* := \{\alpha^* \mid \alpha \in R\}.$$

Lemma 3.13. $(V^\vee, R^*)$ *est un système de racines et on a une correspondance bijective*
$$\begin{array}{lcl} \mathcal{B}(R) & \tilde{\to} & \mathcal{B}(R^*) \\ S & \to & S^* := \{\alpha^* \mid \alpha \in S\}. \end{array}$$

Pour tout $X \subset V$ réseau, on note
$$X^\vee := \{\phi \in V^\vee \mid (R, \phi) \subset \mathbb{Z}\} \subset V^\vee.$$
Alors $X^\vee \subset V^\vee$ est un réseau et si $x_1, \ldots, x_n$ est une $\mathbb{Z}$-base de X, sa base duale $x_1^\vee, \ldots, x_n^\vee$ est une $\mathbb{Z}$-base de $X^\vee$.

Notons
$$Q(R) = \sum_{\alpha \in R} \mathbb{Z}\alpha \subset V$$

le *réseau des racines de* (V, R) et

$$P(R) = Q(R^*)^\vee = \{\omega \in V \mid (w, \alpha^*) \in \mathbb{Z},\ \alpha \in R\} \subset V$$

qui, d'après ce qui précède, est un réseau appelé *réseau des poids de* (V, R).

Fixons-nous en outre une base (*i.e.* une orientation) $S \in \mathcal{B}(R)$ et notons ω_α, $\alpha \in S$ la base duale de α^*, $\alpha \in S$ (donc $\alpha^*(\beta) = \delta_{\alpha,\beta}$), $\alpha, \beta \in R$). On a alors

$$P(R) = \bigoplus_{\alpha \in S} \mathbb{Z}\omega_\alpha.$$

Introduisons enfin le sous-monoide des poids dominants

$$P_S^{++}(R) := \bigoplus_{\alpha \in S} \mathbb{Z}_{\geq 0}\omega_\alpha = \{\omega \in P(R) \mid \langle \alpha, \omega \rangle \geq 0,\ \alpha \in S\}.$$

On dit que les ω_α, $\alpha \in S$ sont les *poids fondamentaux dominants (relativement à S). Cf.* [H72, Fig.1, p.69] pour l'expression des ω_α, $\alpha \in S$ dans la $\mathbb{Q}$-base S

Remark 3.14. Notons que par (SR3) on a toujours $Q(R) \subset P(R)$ et comme $Q(R), P(R)$ sont des réseaux de V, $P(R)/Q(R)$ est un groupe abélien fini appelé *groupe fondamental de* (V, R).

Proposition 3.15. *On a une action naturelle*

$$\begin{array}{ccc} W(R) \times P(R) & \to & P(R) \\ (s, \omega) & \to & s(\omega) \end{array}$$

telle que $P_S^{++}(R) \tilde{\to} P(R)/W(R)$.

3.5. **Poids minuscules.** Soit encore (V, R) un système de racines. On dit qu'un sous-ensemble $\Pi \subset P(R)$ est *R-saturé* si pour tout $\alpha \in R$ et $\lambda \in \Pi$ on a

$$\lambda - i\alpha \in \Pi,\ i = 0, \ldots, (\lambda, \alpha^*).$$

Puisque pour tout $\lambda \in P(R)$ on a $s_\alpha(\lambda) = \lambda - (\lambda, \alpha^*)\alpha$ et que $W(R)$ est engendré par les s_α, $\alpha \in R$, un ensemble saturé Π est $W(R)$-invariant .

Lemma 3.16. *Pour tout $\lambda \in P(R)$, notons $\Pi_\lambda \subset P(R)$ le plus petit sous-ensemble saturé contenant λ. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(1) $W(R)\lambda = \Pi_\lambda$;
(2) $(\lambda, \alpha^*) = 0, \pm 1$, $\alpha \in R$.

En outre, pour tout sous-ensemble $\Pi \subset P(R)$ R-saturé il existe $\lambda_\Pi \in P(R)$ tel que $\Pi = \Pi_{\lambda_\Pi}$.

Supposons maintenant que (V, R) est simple, fixons-nous une base $S \in \mathcal{B}(R)$. Soit ω_α, $\alpha \in S$ les poids dominants fondamentaux et $\alpha_{S^*} = \sum_{\alpha \in S} n_\alpha \alpha^* \in R^*$ la plus grande racine de $(V^\vee, R^*)$ correspondants. On pose

$$J := \{\alpha \in S \mid n_\alpha = 1\}.$$

Lemma 3.17. *Les conditions (1) et (2) du lemme 3.16 sont également équivalentes à*

(3) $(\lambda, \alpha_{S^*}) = 1$;
(4) *Il existe $\alpha \in J$ tel que $\omega_\alpha = \lambda$.*

En outre, les ω_α, $\alpha \in J$ forment un système de représentants de $P(R)/Q(R) \setminus \{0\}$.

Donc, en notant $PM_S(R)$ l'ensemble des *poids minuscules de* (V, R) *i.e.* des $\lambda \in P_S^{++}(R)$ vérifiant les conditions équivalentes des lemmes 3.16 et 3.17 on obtient que l'application naturelle

$$PM_S(R) \tilde{\to} P(R)/Q(R)$$

est bijective.

Example 3.18. Des calculs explicites utilisant la caractérisation (2) montre qu'une fois fixée une base S, les poids minuscules non nuls sont fondamentaux dominants et qu'il y en a exactement n pour A_n, $n \geq 1$, 3 pour D_n, $n \geq 4$, 2 pour E_6, 1 pour B_n, $n \geq 2$, C_n, $n \geq 3$ et E_7 et que E_8, F_4, G_2 n'ont pas de poids minuscules non nuls. *Cf.* [Mo99, Table 3, p.28].

4. Représentations simples des ALSSS

4.1. **Le théorème du plus haut poids.** Supposons k algébriquement clos. Soit $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ une k-ALSSS de système de racines $(\mathfrak{h}^\vee, R)$ et V un $\mathfrak{g}$-module. Pour tout $\lambda \in \mathfrak{h}^\vee$, notons

$$V_\lambda := \{v \in V \mid hv = \lambda(h)v,\ h \in \mathfrak{h}\} \subset V$$

le *sous-espace de poids* associé et introduisons

$$P(V) := \{\lambda \in \mathfrak{h}^\vee \setminus \{0\} \mid V_\lambda \neq 0\} \subset \mathfrak{h}^\vee \setminus \{0\}$$

l'*ensemble des poids de* V.

Notons que $P(V)$ est stable par $W(R)$.

On s'intéresse à la classification des $\mathfrak{g}$-modules de dimension finie. Par le théorème de Weyl, il suffit de se limiter aux $\mathfrak{g}$-modules simples.

Fixons-nous une base $S \in \mathcal{B}(R)$ et $\omega \in \mathfrak{h}^\vee$, $\omega \neq 0$. On dit que v est *primitif de poids* ω si $v \in V_\omega$, $v \neq 0$ et $\mathfrak{g}^\alpha v = 0$, $\alpha \in R_S^+$ (ce qui équivaut à $\mathfrak{g}^\alpha v = 0$, $\alpha \in S$).

Theorem 4.1. *Soit V un $\mathfrak{g}$-module simple possédant un vecteur primitif v de poids ω. Alors*

(1) *Les seuls vecteurs primitifs de V sont les multiples scalaires de v;*
(2) *$\omega - P(V) \subset \bigoplus_{\alpha\in S} \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha$ (autrement dit, pour tout $\lambda \in P(V)$ on a $\lambda \leq_S \omega$). En particulier $V_\omega = kv$ est de dimension 1;*
(3) *Pour tout $\lambda \in P(V)$, V_λ est de dimension finie;*

En particulier ω est unique; on le note ω_V et on dit que c'est *le plus haut poids de* V.

Theorem 4.2.

(1) *Soit V_i un $\mathfrak{g}$-module simple possédant un vecteur primitif de poids ω_i, $i = 1, 2$. Alors*
$$V_1 \simeq V_2 \Longleftrightarrow \omega_1 = \omega_2.$$
(2) *Pour tout $\omega \in \mathfrak{h}^\vee$, il existe un (nécessairement unique d'après (1)) $\mathfrak{g}$-module simple possédant un vecteur primitif de poids ω; on le note $V(\omega)$ et on dit que c'est le $\mathfrak{g}$-module simple de plus haut poids ω.*
(3) *En outre, pour tout $\omega \in \mathfrak{h}^\vee$,*
$$\dim_k(V(\omega)) < +\infty \Longleftrightarrow \omega \in P_S^{++}(R).$$

Comme un $\mathfrak{g}$-module simple de dimension finie possède toujours un vecteur primitif, on déduit en particulier du théorème 4.2 que la correspondance

$$\begin{array}{ccc} \{\mathfrak{g}-\text{modules simples de dim. finie}\}/\simeq & \tilde{\to} & P_S^{++}(R) \\ V & \to & \omega_V \\ V(\omega) & \leftarrow & \omega \end{array}$$

est bijective.

Notons enfin qu'on a l'analogue du lemme 2.15.

Lemma 4.3. *Pour tout V $\mathfrak{g}$-module de dimension finie et pour tout $\alpha \in R$, $\lambda \in P(V)$ notons*

$$p = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid;\ \lambda - n\alpha \in P(V)\},\ q = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid;\ \lambda + n\alpha \in P(V)\}.$$

(1) *Pour tout $-p \leq n \leq q$, on a $\lambda + n\alpha \in P(V)$;*
(2) *$\lambda(h_\alpha) = p - q \in \mathbb{Z}$;*
(3) *Pour tout $0 \leq n \leq P + q$ on a $s_\alpha(\lambda + (p-n)\alpha) = \lambda + (-q+n)\alpha$ donc, en particulier $\dim_k(V_{\lambda+(p-n)\alpha}) = \dim_k(V_{\lambda+(-p+n)\alpha})$.*

4.2. **Représentations minuscules.** Supposons toujours k algébriquement clos et soit $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ une k-ALSSS de système de racines $(\mathfrak{h}^\vee, R)$. Soit V un $\mathfrak{g}$-module simple de dimension finie et de plus haut poids ω. On dit que $V = V(\omega)$ est *minuscule* si $\omega \in P_S^{++}(R)$ est minuscule au sens du paragraphe 3.5.

Lemma 4.4. *$V(\omega)$ est minuscule si et seulement si pour tout $\alpha \in R$ et $x \in \mathfrak{g}^\alpha$, on a $x_V^2 = 0$. Dans ce cas, pour tout $\lambda \in P(V(\omega))$, l'espace de poids V_λ associé est de dimension 1.*

Pour résumer, on a des correspondances bijectives

$$\begin{array}{lcc} P(R)/Q(R)\setminus\{0\} & \tilde{\to} & PM_S(\mathfrak{h}^\vee, R) \\ & \tilde{\to} & \{V\ \mathfrak{g}\text{-module simple de dim. finie} \mid W(R)\omega_V = P(V)\}/\simeq \\ & \tilde{\to} & \{V\ \mathfrak{g}\text{-module simple de dim. finie} \mid x_V^2 = 0,\ x \in \mathfrak{g}^\alpha,\ \alpha \in R\}/\simeq. \end{array}$$

Fixons-nous à nouveau une base $s \in \mathcal{B}(R)$. On va introduire trois applications:

$$s, l, p : P_S^{++}(R) \to \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Pour les définir, on admettra qu'il existe une unique involution $w_S \in W(R)$ telle que $w_S(R_S^+) = R_S^-$ et, pour tout $\lambda \in P(R)$, on notera $\lambda' := -w_W(\lambda)$. Pour tout $\lambda \in P_S^{++}(R)$, écrivons

$$\lambda = \sum_{\alpha\in S} c_\alpha \alpha = \sum_{\alpha\in S} m_\alpha \omega_\alpha$$

avec $c_\alpha \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ et $m_\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. On pose

$$\begin{array}{ll} s(\lambda) & = \sum_{\alpha\in S}(\lambda,\alpha^*) = \sum_{\alpha\in S}\lambda(h_\alpha) = \sum_{\alpha\in S} m_\alpha; \\ p(\lambda) & = \max\{(\lambda,\alpha^*) \mid \alpha \in R\} = (\lambda, \alpha_{S^*}); \\ l(\lambda) & = \min\{c_\alpha + c_{\alpha'} \mid \alpha \in S\}. \end{array}$$

Par définition, on a $s(\lambda) \leq p(\lambda) \leq l(\lambda)$. Les $s(\lambda)$, $p(\lambda)$ et $l(\lambda)$ sont faciles à calculer en fonction des m_α, $\alpha \in S$ *cf.* [Mo99, Table 1, p.27]. On a en particulier

$$\begin{array}{lcl} s(\lambda) = 1 & \Leftrightarrow & \lambda \text{ est un poids fondamental dominant;} \\ p(\lambda) = 1 & \Leftrightarrow & \lambda \text{ est un poids minuscule;} \\ l(\lambda) = 1 & \Leftrightarrow & \lambda \text{ est un poids minuscule et } R \text{ est de type classique.} \end{array}$$

Terminons ce paragraphe avec un lemme technique caractérisant $l(\lambda)$.

Lemma 4.5. *Supposons $\mathfrak{g}$ simple. Soit $\lambda \in P_S^{++}(R)$ et $\Pi_\lambda(= P(V(\lambda))) \subset P(R)$ le plus petit sous-ensemble R-saturé contenant λ. Alors si $\phi : P(R) \to \mathbb{Q}$ est un morphisme de groupe non trivial, $\phi(\Pi_\lambda)$ contient une progression arithmétique à $p(\lambda)+1$ termes et on a*

$$\begin{array}{ll} l(\lambda) & = \min\{n \in \mathbb{Z} \mid \exists \phi : P(R) \to \mathbb{Q} \textit{ morphisme de groupes non nul tq } |\phi(\Pi_\lambda)| = n+1\} \\ & = \min\{n \in \mathbb{Z} \mid \exists \phi : P(R) \to \mathbb{Q} \textit{ morphisme de groupes non nul tq } \phi(\Pi_\lambda) \textit{ est contenu dans une} \\ & \qquad \textit{progression arithmétique à } n+1 \textit{ termes}\} \end{array}$$

5. Preuve du théorème 1.1

On supposera connu les résultats des exposés 5 et 6 décrivant la structure du groupe de Mumford-Tate.

5.1. **Un résultat général.** Soit k un corps de caractéristique 0, K un corps algébriquement clos contenant k, G un groupe réductif sur k et $\rho : G \hookrightarrow \mathrm{GL}_V$ une représentation fidèle de dimension finie de G sur k. Ecrivons

$$G_K = G_0 G_1 \cdots G_r$$

comme produit presque direct de son centre $G_0 := Z(G)_K$ et de ses facteurs simples. Notons $Q_i := \prod_{0\leq j\neq i\leq r} G_j$ et

$$p_i : G_K \to G_K/Q_i := G_i'$$

la projection canonique, $i = 0, \ldots, r$.

Notons également $\mathfrak{g}_i :=$Lie(G_i), $i = 0, \dots, r$ et Lie$(G_K) = \mathfrak{g}(= \mathfrak{g}_0 \times \cdots \times \mathfrak{g}_r)$. Enfin, pour $i = 1, \dots, r$, fixons une sous-algèbre de Cartan (automatiquement déployante) $\mathfrak{h}_i$ de $\mathfrak{g}_i$, notons $(\mathfrak{h}_i^\vee, R_i)$ le système de racines associé et choisissons une base S_i de $(\mathfrak{h}_i^\vee, R_i)$. Alors $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \times \cdots \times \mathfrak{h}_r$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ de système de racines $(\mathfrak{h}^\vee, R := \sqcup_{i=1}^r R_i)$ et $S := \sqcup_{i=1}^r$ est encore une base de $(\mathfrak{h}^\vee, R)$.

Supposons en outre donné un cocaractère $\gamma : \mathbb{G}_{mK} \to G_K$. En appliquant le foncteur Lie, on obtient un morphisme de K-algèbres de Lie

$$\mathfrak{l}_\gamma := \mathrm{Lie}(\gamma) : \begin{array}{ccc} K & \to & \mathfrak{g}_0 \times \cdots \times \mathfrak{g}_r \\ x & \to & (\mathfrak{l}_{\gamma,0}(v), \cdots, \mathfrak{l}_{\gamma,r}(v)) \end{array},$$

Notons que $\mathfrak{l}_{\gamma,i}$ s'identifie à Lie$(p_i \circ \gamma)$, $i = 1, \dots, r$ et qu'on peut toujours supposer que l'image de $\mathfrak{l}_\gamma$ est contenu dans $\mathfrak{z} \times \mathfrak{h}_1 \times \cdots \times \mathfrak{h}_r$. En dualisant, on obtient donc un morphisme

$$\varphi_\gamma = - \circ \mathrm{Lie}(\gamma) : \begin{array}{ccc} \mathfrak{g}_0^\vee \times \mathfrak{h}_1^\vee \times \cdots \times \mathfrak{h}_r^\vee & \to & K \\ \lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_r) & \to & \lambda_0 \circ \mathfrak{l}_{\gamma,0}(1) + \lambda_1 \circ \mathfrak{l}_{\gamma,1}(1) + \cdots + \lambda_r \circ \mathfrak{l}_{\gamma,r}(1). \end{array}$$

Rappelons que le foncteur Lie induit un monomorphisme

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z} \simeq \mathrm{Hom}_K(\mathbb{G}_{mK}, \mathbb{G}_{mK}) & \hookrightarrow & \mathrm{Hom}_K(\mathrm{Lie}(\mathbb{G}_{mK}), \mathrm{Lie}(\mathbb{G}_{mK}) & \tilde{\to} & K \\ & & f & \to & f(1). \end{array}$$

On identifiera $\mathbb{Z}$ à $\mathrm{Hom}_K(\mathbb{G}_{mK}, \mathbb{G}_{mK})$ dans ce qui suit. Etant donné un groupe algébrique Γ sur K, on note $X^*(\Gamma)$ le groupe de ses caractères *i.e.* des morphismes de K-groupes algébriques $\Gamma \to \mathbb{G}_{mK}$. Enfin, notons H_i le sous-tore maximal de G'_i tel que Lie$(H_i) = \mathfrak{h}_i$.

Lemma 5.1. *On a* $\phi_\gamma(X^*(Z(G)_K) \times P(R)) \subset \mathbb{Q}$

Preuve. Déjà, pour tout $\chi \in X^*(Z(G)_K)$, $\phi_\gamma(\chi) = \mathrm{Lie}(\chi \circ p_0 \circ \gamma)(1) \in \mathbb{Z}$ par définition. Alors que pour $i = 1, \dots, r$, on a toujours

$$Q(R_i) \subset X^*(H_i) \subset P(R_i)$$

avec $P(R_i)/Q(R_i)$ fini. En particulier, pour tout $\omega_i \in P(R_i)$, il existe $n_i \in \mathbb{Z}$, $i \neq 0$ tel que $\omega_i = n_i \mathrm{Lie}(\chi_i)$ pour un certain caractère $\chi_i : H_i \to \mathbb{G}_m$ donc $\phi_\gamma(\chi_i) = n_i \mathrm{Lie}(\chi_i \circ p_i \circ \gamma)(1) \in \mathbb{Z}$. □

Soit maintenant $W \subset V$ un sous-$\mathfrak{g}$-module irréductible. On peut décomposer $\rho(-)|_W$ comme produit tensoriel

$$(W, \rho(-)|_W) = (W_0, \chi) \otimes (W_1, \rho_1) \otimes \cdots \otimes (W_r, \rho_r)$$

de représentations irréductibles de $\mathfrak{g}_i$, $i = 0, \dots, r$[1]. Pour $i = 1, \dots, r$, notons $\omega_i \in P_{S_i}^{++}(r_i)$ le plus haut poids de W_i et soit $\mathcal{X}_i := P(W_i) \subset P(R_i) \setminus \{0\}$ l'ensemble des poids de W_i.

Proposition 5.2. *Considérons la représentation $\rho \circ \gamma : \mathbb{G}_{mK} \to \mathrm{GL}_{W,K}$ et notons $N+1$ le nombre de poids distincts de cette représentation. Soit $I \subset \{1, \dots, r\}$ le sous-ensemble des $i = 1, \dots, r$ tels que $p_i \circ \gamma$ n'est pas triviale. Alors*

$$\sum_{i \in I} l(\omega_i) \leq N.$$

Preuve. On a

$$P(W) = \{\chi\} \times \mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_r \subset \mathfrak{g}_0^\vee \times \mathfrak{h}_1^\vee \times \cdot \times \mathfrak{h}_r^\vee$$

donc

$$N + 1 = |\phi_\gamma(P(W))| = |\phi_\gamma(\mathcal{X}_1) + \cdots + \phi_\gamma(\mathcal{X}_r)| = |\sum_{i \in I} \phi_\gamma(\mathcal{X}_i)|$$

[1]Bizarement, je n'ai pas trouvé de référence pour ce résultat forcément standard... On peut le voir comme une conséquence de [FH91, Prop. 9.7] allié au fait que toute représentation complexe simple d'un produit de groupes compacts $K_1 \times \cdots \times K_r$ est un produit tensoriel de représentations simples de K_i, $i = 1, \dots, r$ et, qu'enfin, toute algèbre de Lie semisimple complexe de dimension finie est la complexifiée de algèbre de Lie d'un groupe de Lie compact. Mais il y a sûrement plus simple.

Or, on montre facilement par récurrence sur $|I|$ que si $X_i \subset \mathbb{Q}$, $i \in I$ sont des ensembles finis, on a toujours

$$\sum_{i\in I} X_i| \geq (\sum_{i\in I} |X_i|) - (r-1).$$

Par conséquent, on a

$$N = |\sum_{i\in I} \phi_\gamma(\mathcal{X}_i)| \geq \sum_{i\in I}(|\mathcal{X}_i| - 1) \geq \sum_{i\in I} l(\omega_i),$$

où la dernière inégalité résulte du lemme 4.5 et du fait que, par hypothèse, les morphismes $\phi_\gamma|_{P(R_i)} : P(R_i) \to \mathbb{Q}$ sont non-nuls pour $i \in I$. □

5.2. **Structures de Hodges pures.**
On se place maintenant dans le cas particulier où $k = \mathbb{Q}$, $K = \mathbb{C}$, V est une $\mathbb{Q}$-structure de Hodge polarisable pure de poids n, $h : \mathbb{S} \to \mathrm{GL}_{V,\mathbb{R}}$ est le morphisme correspondant du tore de Deligne $\mathbb{S}$ et $G = MT(V)$ est son groupe de Mumford-Tate (agissant sur V par sa représentation tautologique). Soit $\varphi : V \otimes_\mathbb{Q} V \to \mathbb{Q}(-n)$ une polarisation sur V.

Rappelons qu'en notant $\mu : \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \to \mathbb{S}_\mathbb{C}$ le cocaractère défini par $\mu(z) = (z, 1)$, $\gamma := h_\mathbb{C} \circ \mu : \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \to \mathrm{GL}_{V,\mathbb{C}}$ est le cocaractère défini par $\gamma(z)(v) = z^{-p}v$, $v \in (V_\mathbb{C})^{p,n-p}$. On peut alors définir $MT(V)$ comme le plus petit sous-groupe algébrique $G \subset \mathrm{GL}_V$ sur $\mathbb{Q}$ tel que $\gamma : \mathbb{G}_{m\mathbb{C}} \to \mathrm{GL}_{V,\mathbb{C}}$ se factorise par $G_\mathbb{C}$.

Proposition 5.3. *Soit $N + 1$ le nombre d'entiers $p \in \mathbb{Z}$ tels que $(V_\mathbb{C})^{p,n-p} \neq 0$. Alors, avec les notations du paragraphe 5.1 on a*

$$l(\omega_i) \leq N,\ i = 1, \dots, r.$$

Preuve. Le fait que $l(\omega_i) \leq N$ pour $i \in I$ résulte immédiatement de la proposition 5.2. On peut toujours se ramener à cette situation par le lemme suivant.

Lemma 5.4. *Il existe un $G(\mathbb{C})$-conjugué de $\gamma : \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \to \mathrm{GL}_{V,\mathbb{C}}$ défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$; notons-le $\delta : \mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{Q}}} \to \mathrm{GL}_{V,\overline{\mathbb{Q}}}$.*

Pour chaque $\sigma \in \Gamma_\mathbb{Q} := \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q})$, notons $I_\sigma \subset \{1, \dots, r\}$ l'ensemble des $i = 1, \dots, r$ tels que $p_i \circ^\sigma \delta$ n'est pas trivial et soit $I := \cup_{\sigma\in\Gamma_\mathbb{Q}} I_\sigma$. Alors

$$G_I := Z(G)_{\overline{\mathbb{Q}}} \times \prod_{i\in I} G_i \subset G_{\overline{\mathbb{Q}}}$$

est un sous-groupe algébrique défini sur $\mathbb{Q}$ tel que $\gamma : \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \to \mathrm{GL}_{V,\mathbb{C}}$ se factorise par $G_{I,\mathbb{C}}$. Donc $G_I = G$ et $I = \{1, \dots, r\}$. La conclusion résulte alors à nouveau de la proposition 5.2 en remplaçant $\gamma : \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \to \mathrm{GL}_{V,\mathbb{C}}$ par un caractère ${}^\sigma\delta_\mathbb{C} : \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \to \mathrm{GL}_{V,\mathbb{C}}$ approprié. □

Remark 5.5. En particulier, si $V_\mathbb{C} = (V_\mathbb{C})^{1,0} \oplus (V_\mathbb{C})^{0,1}$, on a $l(\omega_i) = 1$ donc W_i est minuscule et $\mathfrak{g}_i$ est de type classique, $i = 1, \dots, r$.

5.3. **Variétés abéliennes.**

On suppose maintenant que V est la structure de Hodge associée à une variété abélienne A de dimension g sur $\mathbb{C}$ *i.e.* $V = \mathrm{H}^1(A, \mathbb{Q})$ (on est donc dans la situation de la remarque 5.5). On suppose en outre

(i) $2 \nmid g$;
(ii) $\mathrm{End}(A) = \mathbb{Z}$.

La condition (ii) assure que V est un G-module simple (sinon, on aurait, $\mathrm{End}(A) \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q} = \mathrm{End}_\mathbb{Q}(V)^G \supset \mathbb{Q}^2$: contrad.).

La condition sur la parité de la dimension est plus subtile et vient de la table suivante, où sont classifiées les representations minuscules des systèmes de racines simples.

Root system	miniscule weight	representation	dim	autoduality
A_ℓ ($\ell \geq 1$)	ϖ_j ($1 \leq j \leq \ell$)	$\wedge^j$(Standard)	$\binom{\ell+1}{j}$	$(-1)^s$ if $\ell = 2s-1$ 0 if ℓ is even
B_ℓ ($\ell \geq 2$)	ϖ_ℓ	Spin	2^ℓ	+ if $\ell \equiv 0, 3 \bmod 4$ − if $\ell \equiv 1, 2 \bmod 4$
C_ℓ ($\ell \geq 2$)	ϖ_1	Standard	2ℓ	−
D_ℓ ($\ell \geq 3$)	ϖ_1 $\varpi_{\ell-1}$, ϖ_ℓ	Standard Spin$^-$, resp. Spin$^+$	2ℓ $2^{\ell-1}$	+ + if $\ell \equiv 0 \bmod 4$ − if $\ell \equiv 2 \bmod 4$ 0 if $\ell \equiv 1 \bmod 2$
E_6	ϖ_1 ϖ_6		27 27	0 0
E_7	ϖ_7		56	−1

Table 3. Miniscule weights in irreducible root systems.

Dans cette table −, + et 0 signifient que les représentations correspondantes sont respectivement symplectique, orthogonale et non autoduale. Rappelons qu'une représentation simple de dimension finie $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ est dite *symplectique* (resp.*orthogonale*) s'il existe une forme k-bilinéaire alternée (resp. symétrique)

$$B : V \otimes_k V \to k$$

$\mathfrak{g}$-invariante (*i.e.* telle que $B(g \cdot v, v') + B(v, g \cdot v') = 0$, $g \in \mathfrak{g}$, $v, v' \in V$). Par définition, une représentation symplectique ou orthogonale est automatiquement autoduale. La table nous dit en particulier qu'une représentation minuscule autoduale est automatiquement orthogonale ou symplectique et toujours de dimension paire.

Mettons tout cela ensemble pour montrer le théorème 1.1.

Tout d'abord, le fait que V soit pure de poids 1 (impair) nous dit que $\varphi : V \otimes_{\mathbb{Q}} V \to \mathbb{Q}$ est symplectique. En particulier, la représentation associée $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ est symplectique. Rappelons aussi qu'on a toujours $G \subset \mathrm{GSp}(V, \varphi)$ et $\mathbb{G}_m \subset G$ (homothéties). Il suffit donc de montrer que $\mathfrak{g}_1 \times \cdots \times \mathfrak{g}_r = \mathrm{Lie}(G_1 \cdots G_r) = \mathrm{Lie}(\mathrm{Sp}(V, \varphi)_{\mathbb{C}})$.

Notons $\mathfrak{g}^0 := \mathfrak{g}_1 \times \cdots \times \mathfrak{g}_r$. On sait déjà que V est une représentation simple, fidèle et symplectique donc en particulier autoduale de $\mathfrak{g}^0$. Comme V est autoduale, par unicité de la décomposition

$$(V, \rho) = (V_1, \rho_1) \otimes \cdots \otimes (V_r, \rho_r)$$

on déduit que chacune des représentations (V_i, ρ_i) est autoduale, $i = 1, \ldots, r$. Comme V est simple et fidèle, on déduit de la proposition 5.3 que chacune des représentations (V_i, ρ_i) est minuscule et que $\mathfrak{g}_i$ est de type classique, $i = 1, \ldots, r$. Mais si V_i est minuscule et autoduale, elle est symplectique ou orthogonale et de dimension paire, $i = 1, \ldots, r$. En outre, comme V est symplectique, le nombre de représentations symplectiques parmi les V_i, $i = 1, \ldots, r$ est forcément impair. Enfin, le fait que

$$\frac{\dim(V)}{2} = \frac{\dim(V_1) \cdots \dim(V_r)}{2}$$

est impaire alors que les V_i sont de dimension paire impose $r = 1$. Donc V est une représentation simple, minuscule, symplectique tel que $\frac{\dim(V)}{2}$ est impair: la seule possibilité est $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2g}$.

References

[B90] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie, Chap 1-9*, Masson, Paris, 1990.

[FH91] W. Fulton et J. Harris, *Representation theory - a first course (Chap IV §1 App. D)*, G.T.M. **129**, Springer-Verlag, 1991.

[H72] J. E. Humpreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory*, Springer-Verlag, 1972.

[Mo99] B. Moonen, *Notes on Mumford-Tate groups*, unpublished lecture notes - March 1999, disponibles sur http://staff.science.uva.nl/˜bmoonen/index.html#NotesMT

[S66] J.-P. Serre, *Algèbres de lie semisimples complexes*, W.A. Benjamin 1966.

[Za85] Y. G. Zarhin *Weights of simple Lie algebras in the cohomology of algebraic varieties*, Math. USSR-Izv. **24**, 1985, pp. 245–281.