

Exemples de Groupes de Mumford-Tate

Dajano Tossici

Rencontre ANR, ARIVAF, 8-10 Novembre 2011, Paris, IHP

Le but de ces notes est de donner des exemples du groupes de Mumford-Tate, où on le peut calculer explicitement ou donner des informations plus précis. On commence en rappellent les définitions et des généralités sur les structures de Hodge et sur les groupes de Mumford-Tate. Après on donne des encadrements pour le groupe de Mumford-Tate dans le cas de structure de Hodge polarisable et on traite plus en détail, dans le paragraph §3, le cas des courbes elliptiques. Dans le dernière on annonce la conjecture de Hodge et on montre le lien entre cette conjecture et le groupe de Mumford-Tate. Et on montre la preuve de la conjecture pour multiples des courbes elliptiques. On suivent essentiellement les notes de Moonen [?] and [?].

1. STRUCTURES DE HODGE ET GROUPE DE MUMFORD-TATE

Définition 1.1. Une \mathbb{Q} -structure de Hodge de poids m est un \mathbb{Q} -espace vectoriel de dimension finie avec une décomposition

$$V_{\mathbb{C}} := V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=m} V_{\mathbb{C}}^{p,q}$$

tel que

$$\overline{V_{\mathbb{C}}^{p,q}} = V_{\mathbb{C}}^{p,q}.$$

Une \mathbb{Q} -structure de Hodge pure est une somme directe de structures de Hodge de poids m en faisant varier m .

Un morphisme entre deux structures de Hodge est un morphisme d'espaces vectoriels tel que sa \mathbb{C} -extension de scalaires envoie la composante (p, q) dans la composante (p, q) .

Soit \mathbb{S} la restriction de Weil $\text{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} \mathbb{G}_{m, \mathbb{C}}$. On remarque que $\mathbb{S} \simeq \text{Spec}(\mathbb{R}[S, T, 1/S^2 + T^2])$ comme schéma et la loi de groupe est donnée par

$$S \mapsto S \otimes S - T \otimes T \text{ et } T \mapsto S \otimes T + T \otimes S.$$

On observe que l'isomorphisme

$$\mathbb{S}_{\mathbb{C}} \longrightarrow (\mathbb{G}_{m, \mathbb{C}})^2$$

est donné par $S \mapsto S + iT$ and $T \mapsto S - iT$.

Enfin on peut observer que le groupe des caractères de $\mathbb{S}_{\mathbb{C}}$ est généré par $S + iT$ and $S - iT$. Et clairement la conjugation sur \mathbb{C} permute les deux caractères. Sur les \mathbb{R} -points de \mathbb{S} les deux caractères sont l'identité et la conjugation. Donc le groupe des caractères de \mathbb{S} (qui sont les caractères de $\mathbb{S}_{\mathbb{C}}$ invariants pour conjugation) est généré par $S^2 + T^2$, i.e. la multiplication des deux caractères. On appelle ce caractère Norme Nm . En fait la Norme sur les \mathbb{R} -points de \mathbb{S} est la norme usuelle sur \mathbb{C} . On définit $w : \mathbb{G}_{m, \mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{S}$ comme le morphisme donné par $S \longrightarrow S$ and $T \longrightarrow 0$.

En utilisant les classifications des représentations des groupes de type multiplicatif on peut montrer que donner une structure de Hodge de poids m est équivalent à donner un \mathbb{Q} -espace vectoriel avec un morphisme

$$h : \mathbb{S} \longrightarrow GL_{\mathbb{R}}(V_{\mathbb{R}})$$

tel que le morphisme $h \circ w : \mathbb{G}_{m, \mathbb{R}} \longrightarrow GL_{\mathbb{R}}(V_{\mathbb{R}})$ est donné, sur les points, par $z \mapsto z^{-n} Id$. Pour une structure de Hodge pure on demande que $h \circ w$ est défini sur \mathbb{Q} . On a que $\mathbb{S}_{\mathbb{C}} \simeq (\mathbb{G}_{m, \mathbb{C}})^2$ agit comme $z \mapsto z_1^{-p} z_2^{-q} z$ sur $V_{\mathbb{C}}^{p,q}$.

On appelle *classe de Hodge de type (p, p)* un élément de V qui est dans $V_{\mathbb{C}}^{p,p}$; si $p = 0$ on dit simplement *classe de Hodge*. C'est facile à prouver le suivant lemme.

Lemme 1.2. Soit V une \mathbb{Q} -structure de Hodge de poids m et soit $v \in V$. Alors

- v est une classe de Hodge si et seulement si est v est invariant par \mathbb{S} .

– v est une classe de Hodge de type (p, p) si et seulement si est $\mathbb{Q} \cdot v$ est stable par \mathbb{S} . Et le caractère induit est $(Nm)^{-p}$ et donc il ne dépend pas par v .

Finalement on définit $C := h(i) : V_{\mathbb{R}} \longrightarrow V_{\mathbb{R}}$. Sur $V_{\mathbb{C}}^{p, q}$ on a que C agit comme multiplication par i^{q-p} .

Remarque 1.3. La catégorie $\mathbb{Q}HS$ des structures de Hodge pures est une catégorie abélienne. C'est facile à voir que dans la catégorie $\mathbb{Q}HS$ on peut faire toutes les constructions que on fait en algèbre linéaire.

Exemple 1.4. La structure de Tate $\mathbb{Q}(n)$ est définie comme l'espace vectoriel $(2\pi i)^n \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{C}$ avec structure de Hodge purement de type $(-n, -n)$. Dans ce cas on $GL_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}(n)) \simeq \mathbb{G}_{m, \mathbb{R}}$ et le morphisme h est $(Nm)^{2n}$. On remarque que, si $n \geq 0$, $\mathbb{Q}(n) = \mathbb{Q}(1)^{\otimes n}$ et $\mathbb{Q}(-n) = (\mathbb{Q}(1)^{\otimes n})^{\vee}$. Pour toute structure de Hodge V on définit $V(n)$, avec $n \in \mathbb{Z}$, comme $V \otimes \mathbb{Q}(n)$. Si V a poid m alors $V(r)$ a poid $m - 2n$. On a un isomorphisme d'espaces vectoriels

$$V(n)_{\mathbb{C}} \longrightarrow V_{\mathbb{C}}$$

donné par $v \otimes (2\pi i)^n \rightarrow (2\pi i)^n v$. Sous ce isomorphisme on identifie $V(n)_{\mathbb{C}}^{p, q}$ avec $V_{\mathbb{C}}^{p+n, q+n}$. Donc si v a degré (p, p) in V alors $(2\pi i)^p v$ a degré $(0, 0)$ in $V(p)$. En particulier si $f \in \text{Hom}(V, W)$ a degré (r, r) (on dit aussi de degré r), i.e. $f(V^{p, q}) \subseteq W^{p+r, q+r}$, alors $(2\pi i)^r f \in \text{Hom}(V, W(r)) \simeq \text{Hom}(V(-r), W)$ a degré $(0, 0)$, i.e. il est un morphisme de structures de Hodge.

Définition 1.5. Soit V une structure de Hodge défini par un morphisme $h : \mathbb{S} \longrightarrow GL_{\mathbb{R}} V$. On appelle

- *groupe de Mumford-Tate de V* le plus petit sous-groupe algébrique $MT(V)$, défini sur \mathbb{Q} , de $GL_{\mathbb{R}}(V)$ tel que h factorize par $MT(V)$;
- *groupe de Mumford-Tate special (ou groupe de Hodge) de V* le plus petit sous-groupe algébrique $Hg(V)$, défini sur \mathbb{Q} , de $GL_{\mathbb{R}}(V)$ tel que la restriction de h à $\mathbb{U} := \ker Nm$ factorize par $Hg(V)$.

Lemme 1.6. Soit V une structure de Hodge de poid m . On a que

- (i) $MT(V)$ est connexe;
- (ii) si $m \neq 0$ alors $MT(V)$ contiens $\mathbb{G}_{m, \mathbb{Q}}$;
- (iii) $Hg(V)$ est contenu dans $SL(V)$;
- (iv) si $m = 0$ alors $Hg(V) = MT(V)$, et si $m \neq 0$ alors $MT(V)$ est un presque product direct de $\mathbb{G}_{m, \mathbb{Q}}$ and $MT(V)$, i.e. il a une isogénie $\mathbb{G}_{m, \mathbb{Q}} \times Hg(V) \longrightarrow MT(V)$.

Démonstration. (i) est trivial parce que \mathbb{S} est connexe. (ii). Si $m \neq 0$, $h \circ w$ donne un'immersion de $\mathbb{G}_{m, \mathbb{R}}$ dans $MT(V)$. (iii). C'est facile à montrer que le déterminant $\mathbb{S} \rightarrow \mathbb{G}_{m, \mathbb{R}}$ de la représentation que définit V est donné par $(Nm)^{-\frac{m \dim(V)}{2}}$. Et Donc $Hg(V)$ est dans le noyau du dterminant. (iv). On a que \mathbb{S} est généré par \mathbb{U} et $\mathbb{G}_{m, \mathbb{R}}$ et si $m = 0$ on a que $h \circ w = 0$ et donc $MT(V) = Hg(V)$.

Si $m \neq 0$ alors on a, en utilisant (ii), un morphisme naturel

$$\mathbb{G}_{m, \mathbb{Q}} \times Hg(V) \longrightarrow MT(V).$$

Le morphisme est clairement surjectif avec le noyau fini, car le noyau est dans l'intersection de $Sl(V)$ avec le groupe de matrices scalaires. \square

Exemple 1.7. En appliquent le lemme on a

$$MT(\mathbb{Q}(0)) = Hg(\mathbb{Q}(0)) = 0$$

et

$$MT(\mathbb{Q}(n)) = \mathbb{G}_{m, \mathbb{Q}} \text{ et } Hg(\mathbb{Q}(n)) = 0$$

si $n \neq 0$.

Proposition 1.8. *Soit V une \mathbb{Q} -structure de Hodge. Pour une collection $\mu = \{(a_i, b_i)\}_{i=1, \dots, t}$ des couples des entiers positifs on considère la structure de Hodge*

$$T^\mu := \bigoplus_{i=1}^t V^{\otimes a_i} \otimes (V^\vee)^{b_i}.$$

Soit W un sous espace vectoriel de T^μ .

- (i) W est une sous structure de Hodge si et seulement si il est stable par l'action naturelle de $MT(V)$;
- (ii) le groupe $MT(T^\mu)$ est l'image de $MT(V)$ par le morphisme naturel $r : GL(V) \longrightarrow GL(T^\mu)$
- (iii) $v \in W$ est une classe de Hodge si et seulement si il est invariant par $MT(V)$;
- (iv) $v \in W$ est une classe de Hodge de type (p, p) si et seulement si $\mathbb{Q} \cdot v$ est stable par $MT(V)$.
Et le caractère induit ne dépend pas par v .

Démonstration. L'assertion (i) est claire par les définitions.

Pour (ii) on observe que la structure de Hodge T^μ est donnée par la représentation $r \circ h$.

Donc (iii) et (iv) suivent par (ii) et 1.8. \square

Exemple 1.9. Par la partie (ii) de la Proposition on a que $MT(V^\vee)$ est isomorphe à $MT(V)$ parce que r est le morphisme que à une matrice A associe la matrice $(A^t)^{-1}$. Egalement on a l'isomorphisme $M(T(V^n)) \simeq MT(V)$.

Corollaire 1.10. *Soit V une structure de Hodge donnée par une représentation $h : \mathbb{S} \longrightarrow GL_{\mathbb{R}}(V)$. Le foncteur naturel $Rep(MT(V)) \longrightarrow \mathbb{Q}HS$ qui associe une représentation $\rho : MT(V) \longrightarrow GL_{\mathbb{Q}}(W)$ la structure de Hodge associé $\rho_{\mathbb{R}} \circ h$ est pleinement fidèle. L'image est la sous catégorie plein $\langle V \rangle^{\otimes}$ qui a pour objets les structure de Hodge isomorphes à un sousquotient de quelques T^\vee au-dessus.*

Démonstration. Soient W_1 et W_2 deux représentation de $MT(V)$. On doit montrer que

$$\text{Hom}_{MT(V)\text{-rep}}(W_1, W_2) = \text{Hom}_{\mathbb{Q}HS}(W_1, W_2).$$

Maintenant on a que $MT(V)$ agit sur la structure de Hodge $\text{Hom}(W_1, W_2)$ comme $(g \cdot \varphi)x = g(\varphi(g^{-1}x))$. On remarque que $\text{Hom}_{\mathbb{Q}HS}(W_1, W_2)$ est le groupe des classes de Hodge. Et donc par la proposition il correspond aux éléments de $\text{Hom}(W_1, W_2)$ fixés par $MT(V)$. Ces éléments sont précisément les morphismes de représentations.

La deuxième assertion suivie parce que tout représentation de $MT(V)$ est isomorphe un sous quotient de T^μ pour quelque μ (Deligne 3.1). \square

On finit la section avec des bornes général du groupes de Mumford-Tate.

Lemme 1.11. *Soit $D := \text{End}_{\mathbb{Q}HS}(V)$. On a que*

$$MT(V) \subseteq GL_D(V).$$

De plus, soit F le centre de D alors, si Z_M est le centre connexe de $MT(V)$, on a que

$$Z_M \subseteq GL_F(F) = T_F := \text{Res}_{F/\mathbb{Q}} \mathbb{G}_{m, F}.$$

Démonstration. Pour la Proposition 1.8 on a que

$$(1) \quad D := \text{End}_{\mathbb{Q}HS}(V) = (\text{End}_{\mathbb{Q}}(V))^{MT(V)}.$$

En particulier on a que

$$MT(V) \subseteq GL_D(V).$$

De plus il suivie encore par (1) que pour tout \mathbb{Q} -algèbre R on a que

$$Z_M(R) \subseteq (F \otimes R)^*.$$

Donc

$$Z_M \subseteq T_F.$$

\square

Remarque 1.12. Si V est de poids pur on a aussi

$$D = (\text{End}_{\mathbb{Q}}(V))^{Hg(V)},$$

car le groupe multiplicatif $\mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}}$ dans $MT(V)$ agit comme la multiplication par un scalaire sur V et donc trivialement sur $\text{End}_{\mathbb{Q}}(V)$.

2. GROUPE DE MUMFORD-TATE DES STRUCTURES DE HODGE POLARIZABLES

Définition 2.1. Une \mathbb{Q} -structure de Hodge V de poids n est dite *polarisable* s'il existe un morphisme de structures de Hodge $\varphi : V \otimes V \rightarrow \mathbb{Q}(-n)$ tel que la forme bilinéaire $\varphi_C : V_{\mathbb{R}} \times V_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $(x, y) \mapsto (2\pi i)^n \varphi(x \otimes Cy)$ est symétrique et définie positive.

Lemme 2.2. *Si on est dans le cas de la définition alors φ est alternée si n est impair et symétrique si n est pair.*

Démonstration. Car φ est un morphisme de structures de Hodge et C agit trivialement sur $\mathbb{Q}(-n)$, on a que, pour tous $x, y \in V$, $\varphi(Cx \otimes Cy) = \varphi(x \otimes y)$. Donc, pour la symétrie de φ_C , on a $\varphi(x \otimes y) = \varphi(Cx \otimes Cy) = \varphi_C(Cx, y) = \varphi_C(y, Cx) = \varphi(y \otimes C^2x) = \varphi(y \otimes (-1)^n x) = (-1)^n \varphi(y \otimes x)$. \square

Soit $\psi : V \times V \rightarrow \mathbb{Q}$ une forme bilinéaire. On définit

$$GU(V, \psi) := \{g \in GL(V) \mid \psi(gx, gy) = \nu(g)\psi(x, y) \text{ avec } \nu \text{ un caractère}\}$$

Ce \mathbb{Q} -groupe algébrique est aussi appelé *groupe des similitude orthogonales* $GO(V, \psi)$ si φ est symétrique et *groupe des similitude symplectique* Gsp si ψ est alterné. On a la suite exacte

$$1 \rightarrow U(V, \psi) \rightarrow GU(V, \psi) \xrightarrow{\nu} \mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}} \rightarrow 1$$

où $U(V, \psi)$ est le groupe orthogonal, si φ est symétrique, et le groupe symplectique, si φ est alterné.

Lemme 2.3. *Soit V un espace de Hodge polarisable de poids n and soit φ une polarisation. Alors, si $\tilde{\varphi} = (2\pi i)^n \varphi$*

$$MT(V) \subseteq GU(V, \tilde{\varphi}).$$

De plus le caractère de $MT(V)$ induit par ν ne dépend pas de la polarisation.

Démonstration. On remarque que $\tilde{\varphi}$ est une classe de Hodge de type $(-n, -n)$ dans $(V^{\vee})^{\otimes 2}$. Donc par la Proposition 1.8 on a que $\mathbb{Q} \cdot \tilde{\varphi}$ est stable par $MT(V)$, i.e. $MT(V) \subseteq GU(V, \tilde{\varphi})$, et le caractère μ ne dépend pas de la polarisation car $\mathbb{S} \rightarrow MT(V)_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\mu} \mathbb{G}_{m,\mathbb{R}}$ est Nm^{-n} . \square

Donc si V est polarisable de poids n , en utilisant Lemma 1.11 et Remarque 1.12, on a que

$$MT(V) \subseteq GU_D(V, \varphi) := GU(V, \varphi) \cap GL_D(V),$$

où $GL_D(V)$ est le groupe des automorphismes D -invariants. Et si V est de poids pur on a

$$Hg(V) \subseteq U_D(V, \varphi) := U(V, \varphi) \cap GL_D(V).$$

Théorème 2.4. *La catégorie $\mathbb{Q}\mathbf{HS}$ des \mathbb{Q} -structures de Hodge polarisables est une catégorie semi-simple. De plus si V est polarisable alors $Hg(V)$ et $MT(V)$ sont réductives.*

Démonstration. Pour la première assertion il suffit de prouver que tout \mathbb{Q} -structure de Hodge de poids n est somme directe des structures de Hodge simples. Soit $W \subseteq V$ un sous-espace vectoriel. On considère

$$W^{\perp} := \{x \in V \mid \varphi(x, w) = 0 \text{ pour tout } w \in W\}.$$

On a que W^{\perp} est une sous- \mathbb{Q} -structure de Hodge car il est le noyau du morphisme

$$V \rightarrow V^{\vee}(-n) \rightarrow (V^{\vee}/W^{\vee})(-n),$$

où le premier morphisme est donné par $v \mapsto \varphi(v, -)$. Maintenant on a que, car $W_{\mathbb{R}}$ est stable sous C ,

$$W^{\perp} \otimes \mathbb{R} = \{x \in V_{\mathbb{R}} \mid \varphi_C(x, w) = 0 \text{ pour tout } w \in W\}.$$

Donc on a $W \oplus W^{\perp} = V$. Si W et W^{\perp} sont simples on a fini, sinon on continue.

Car $Hg(V)$ est normal dans $MT(V)$, il suffit de prouver la deuxième assertion pour $MT(V)$. De plus, puisque on est en caractéristique 0, il suffit de prouver que $MT(V)$ a une représentation complètement réductible. Par le Corollaire 1.10 on a que $Rep(MT(V)) \simeq \langle V \rangle^{\otimes}$ et la dernière catégorie est semisimple, comme il suit facilement du fait que $\mathbb{Q}\mathbf{HS}^{pol}$ est semisimple. En particulier $Rep(MT(V))$ est semisimple. Et on a fini. \square

Soit V une \mathbb{Q} -structure de Hodge polarisable simple et de poids n . Donc $D = End_{\mathbb{Q}\mathbf{HS}}(V)$ est une algèbre de division sur \mathbb{Q} . Soit $\varphi : V \otimes V \rightarrow \mathbb{Q}(-n)$ une polarisation. Car φ est non dégénérée on peut définir une (anti)-involution

$$D \rightarrow D$$

donné par $d \mapsto d^{\dagger}$, où d^{\dagger} est tel que

$$\varphi(d(x) \otimes y) = \varphi(x \otimes d^{\dagger}(y)).$$

Car tout élément de D commute avec C on a aussi, sur \mathbb{R} ,

$$\varphi_C(d(x), y) = \varphi_C(x, d^{\dagger}(y)).$$

On a donc que ι est une involution positive dans le sens suivant, en utilisant le lemme qui suit la définition.

Définition 2.5. Soit D une algèbre de division sur \mathbb{Q} avec un (anti)involution $\iota : D \rightarrow D$. On dit que ι est *positive* si $Tr_{D/\mathbb{Q}}(x\iota(x)) > 0$ pour tout $x \in D$.

Lemme 2.6. Soit B une \mathbb{Q} -algèbre simple de dimension finie avec une (anti)-involution ι . Alors ι est positive si et seulement si existe un B -module V qui a une forme \mathbb{Q} -bilinéaire symétrique φ définie positive tel que

$$(2) \quad \varphi(bx, y) = \varphi(x, \iota(b)y)$$

pour tout $b \in B, x, y \in V$.

Démonstration. Pour la *seulement si* part on prends $\varphi : B \times B \rightarrow \mathbb{Q}$ donnée par $\varphi(x, y) = Tr_{B/\mathbb{Q}}(x\iota(y))$.

Maintenant on prouve la *si part*. Car tout B -module W est un summande directe d'un produit de copies de V alors on trouve aussi sur W une forme Q comme dessus. Maintenant, pris une extension de base, on peut supposer que le corps est réel. On considère sur B une forme bilinéaire Q qui satisfait (2). On prends une base orthonormale $\{e_i\}$. Alors

$$Tr_{B/\mathbb{R}}(b\iota(b)) = \sum_i \varphi(e_i, b\iota(b)e_i) = \sum_i \varphi(be_i, be_i) > 0.$$

\square

Remarque 2.7. Ce n'est pas nécessaire de supposer que B est simple.

2.1. Classification de Albert. On a vu que si V est une \mathbb{Q} -structure de Hodge simple et polarisable alors $End_{\mathbb{Q}\mathbf{HS}}V$ est une algèbre de division simple avec une involution positive. Ces algèbres ont été classifiées par Albert.

Théorème 2.8. Soit D une \mathbb{Q} -algèbre de division de rang fini sur \mathbb{Q} avec une (anti)involution positive $\iota : D \rightarrow D$. Soit F son centre, $F_0 = \{a \in F \mid \iota(a) = a\}$, $e_0 = [F_0 : \mathbb{Q}]$, $e = [F : \mathbb{Q}]$ et $d^2 = [D : F]$. Alors on a une des suivantes possibilités.

Type I (e_0) : $e = e_0, d = 1$; $D = F = F_0$ est un corps totalement réel et ι est l'identité.

Type II(e_0) : $e = e_0, d = 2$; D est l'algèbre des quaternions sur un corps totalement réel $F = F_0$; pour toute immersion $\sigma : K \rightarrow \mathbb{R}$ on a $D \otimes_K \mathbb{R}_\sigma \simeq M_2(\mathbb{R})$. Soit $d \rightarrow d^* := \frac{\text{tr}_{D/F}(d)}{2} - d$ l'involution canonique de D , alors il exist un élément $a \in D$ avec $a^* = -a$ tel que ι est la conjugation par a et il existe une isomorphisme

$$D \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \simeq M_2(\mathbb{R}) \times \cdots \times M_2(\mathbb{R})$$

tel que l'involution est donnée par $(X_1, \dots, X_s) \rightarrow (X_1^t, \dots, X_s^t)$.

Type III(e_0) : $e = e_0, d = 2$; D est une algèbre des quaternions sur un corps totalement réel $F = F_0$; l'involution de D est l'involution canonique et il existe une isomorphisme

$$D \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \simeq \mathbf{K} \times \cdots \times \mathbf{K}$$

tel que l'involution est donnée par le produit des involutions canoniques.

Type IV(e_0, d) : $e = 2e_0$; F est un corps de type CM et F_0 est totalement réel; D est une algèbre de division de rang d^2 sur F . L'involution ι est tel que, sous un certain isomorphisme

$$D \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \simeq M_d(\mathbb{C}) \times \cdots \times M_d(\mathbb{C})$$

il correspond à l'involution

$$(A_1, \dots, A_{e_0}) \mapsto ({}^t\overline{A_0}, \dots, {}^t\overline{A_{e_0}}).$$

En particulier ι est la conjugation complexe sur F .

Soit V une structure de Hodge polarisable simple. Soit φ une polarisation. Car V est simple alors l'involution de Rosati associée induces la conjugation complexe sur le centre F de D ou l'identité, si F est totalement réel. Soit Z_H le centre connexe de $Hg(V)$. Si le poids de V est zero alors $Z_H = Z_M$. Si le poids est différent de 0 alors Z_M est isogène à $\mathbb{G}_{m, \mathbb{Q}} \times Z_H$. On a aussi $Z_H \subseteq Z_M \subseteq U_F$.

De plus, car $Hg(V) \in U(V, \varphi)$, on a pour tout $h \in Z_H$ que

$$\varphi(v \otimes w) = \varphi(hv \otimes hw) = \varphi(v \otimes \bar{h}h).$$

Donc $\bar{h}h = 1$ et ça implique que Z_H est contenu dans la composante connexe U_F^0 du neutre de

$$U_F := \{x \in T_F \mid x\bar{x} = 1\}.$$

Si V n'est pas simple alors on peut écrire

$$V = V_1^{m_1} \oplus \cdots \oplus V_r^{m_r}$$

avec V_i, \dots, V_r sont simples et pas isomorphes entre eux. Si $D = \text{End}_{\mathbb{Q}\mathbf{HS}}(V)$ et $D_i = \text{End}_{\mathbb{Q}\mathbf{HS}}(V_i)$ on a

$$D = M_{m_1}(D_1) \times \cdots \times M_{m_r}(D_r).$$

Donc $F = F_1 \times \cdots \times F_r$ est le produit de corps totalement réels ou extensions quadratiques complexes et

$$U_F = U_{F_1} \times \cdots \times U_{F_r}.$$

On remarque que si F_i est totalement réel alors U_{F_i} est fini. Donc on a prouvé le resultat suivant.

Proposition 2.9. *Soit V une structure de Hodge polarisable et assume que V n'a pas de facteurs simples de type IV. Alors $Hg(V)$ est semisimple.*

De plus on observe que le groupe des caractères $X^*(T_F)$ de T_F est donné par le groupe abélien libre généré par l'ensemble Σ_F des immersions de F dans \mathbb{C} , avec l'action naturel de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Le groupe $X^*(T_F)$ est le quotient de $X^*(T_F)$ par le sous-module généré par les éléments $\sigma + \bar{\sigma}$ où $\bar{\sigma}$ indique la composition de σ avec la conjugation complexe de \mathbb{C} . Enfin, si GU_F est le sous-groupe de T_F généré par U_F et $\mathbb{G}_{m, \mathbb{Q}} \text{id}$ alors $X^*(GU_F)$ est le quotient de $X^*(T_F)$ par le sous-module généré par les éléments $\sigma + \bar{\sigma} - \tau - \bar{\tau}$ avec $\sigma, \tau \in \Sigma_F$.

Définition 2.10. Une \mathbb{Q} -structure de Hodge V est dit de *type CM* si V est polarizable et $MT(V)$ est un tore.

Lemme 2.11. *Soit V une structure de Hodge simple et polarisable. Alors V est de type CM si et seulement si on a une des situations suivantes.*

- Si le centre F de $End_{\mathbb{Q}HS}(V)$ est totalement réel alors $V \simeq \mathbb{Q}(n)$, pour quelque n . De plus $F = \mathbb{Q}$.
- Si le centre F de $End_{\mathbb{Q}HS}(V)$ est une extension quadratique complexe d'un corps totalement réel alors
 - (i) $V \simeq F$ comme F -espaces vectoriels;
 - (ii) il existe une fonction $\Phi : \Sigma_F \longrightarrow \mathbb{Z}^2$, $\sigma \mapsto (m_\sigma, n_\sigma)$ tel que $(m_{\bar{\sigma}}, n_{\bar{\sigma}}) = (n_\sigma, m_\sigma)$;
 - (iii) la fonction $\sigma \mapsto m_\sigma + n_\sigma$ est constante et est égale à l'opposé de le poids de V . Et on a

$$V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \simeq F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \simeq \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_F} \mathbb{C}_\sigma,$$

avec \mathbb{C}_σ de type $(-m_\sigma, -n_\sigma)$.

De plus dans tous les deux cas on a que $End_{\mathbb{Q}HS}(V)$ est commutative, i.e. $End_{\mathbb{Q}HS}(V) = F$.

Démonstration. Si V est de type CM alors $MT(V)$ est un tore. En particulier il est égal à son centre connexe. Donc par le Lemma 1.11 on a que $MT(V)$ est contenu dans T_F . Alors, si $d = \dim_F V$, on a

$$D := (End_{\mathbb{Q}}(V))^{MT(V)} \supseteq (End_{\mathbb{Q}}(V))^{T_F} \supseteq M_d(F).$$

Mais, car D est un algbre de division, alors $d = 1$. Ça implique que

$$F \subseteq End_{\mathbb{Q}HS}(V) \subseteq End_F(V) = F,$$

donc $F = D$. Pour la classification de Albert on a que F est totalement réel ou un corps CM.

Si F est totalement réel alors pour la proposition précédente on a que $Hg(V)$ est semisimple. Mais, car $Hg(V)$ est un tore, alors $Hg(V) = 1$. Donc $F = End_{\mathbb{Q}}V$, qui implique que $V \simeq \mathbb{Q}$ et $F = \mathbb{Q}$. Donc V est nécessairement isomorphe $\mathbb{Q}(n)$ pour quelque n . Et au contraire tout $\mathbb{Q}(n)$ est de type CM.

Supposons maintenant que F est de type CM. Alors l'involution associé la polarisation fixée est la conjugation complexe sur F . Car $Hg(V) \subseteq U_F$ alors $MT(V)$ est contenu dans le tore GU_F . Le morphisme $\mathbb{S} \longrightarrow GU_F$ que donne la structure de Hodge est donné par un morphisme entre les respectifs groupes des caractères,, et ça est équivalent donner une fonction

$$\Sigma_F \longrightarrow \mathbb{Z}^2, \quad \sigma \mapsto (m_\sigma, n_\sigma)$$

tel que $(m_{\bar{\sigma}}, n_{\bar{\sigma}}) = (n_\sigma, m_\sigma)$ et $m_\sigma + n_\sigma$ n'est pas dépendent par σ . Car $V \simeq F$ comme F -espaces vectoriels on peut supposer $V = F$. Alors

$$V \otimes_{\mathbb{C}} F \simeq \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_F} \mathbb{C}_\sigma.$$

Alors le summand \mathbb{C}_σ est de type $(-m_\sigma, -n_\sigma)$ et les conditions su Φ ensure que V est une structure de Hodge. \square

3. LE GROUPE DE MUMFORD-TATE D'UNE VARIÉTÉ ABELIENNE.

Soit X une variété abélienne complexe. C'est classique que, pour tout n , on a

$$H^n(X, \mathbb{Q}) \simeq \wedge^n H^1(X, \mathbb{Q}),$$

comme structure de Hodge. la structure de Hodge sur $H^n(X, \mathbb{Q})$ est donnée par la Théorie de Hodge. On a le suivant resultat.

Théorème 3.1. *Le foncteur $X \mapsto H_1(X, \mathbb{Z})$ donne une équivalence de catégories*

$\{\text{variétés abéliennes complexes}\} \leftrightarrow \{\mathbb{Z}\text{HS polarizables et sans torsion de type } (-1, 0) + (0, -1)\}$.

De plus si on considère les variétés abéliennes à pres d'isogénies on doit remplacer $\mathbb{Z}\text{HS}$ avec $\mathbb{Q}\text{HS}$.

Démonstration. Le foncteur quasi-inverse est obtenu comme suivre. Soit W l'espace $X_{\mathbb{R}}$ vue comme \mathbb{C} espace vectoriel. La multiplication par i est donnée par l'opérateur de Weil C . Nous définissons $X := W/V_{\mathbb{Z}}$. On a que X est projective car $V_{\mathbb{Z}}$ est polarisable. La deuxième assertion est claire, car X_1 est isogène X_2 si et seulement si il y a un isomorphisme $H_1(X_1, \mathbb{Q}) \rightarrow H_1(X_2, \mathbb{Q})$. \square

Pour toute variété abélienne X soit $V_X := H^1(X, \mathbb{Q})$, qui est dual $H_1(X, \mathbb{Q})$. Par le théorème précédent il suit, en particulier que,

$$\text{End}^0(X, \mathbb{Q}) := \text{End}(X, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q} \simeq \text{End}_{\mathbb{Q}\text{HS}}(V_X).$$

Définition 3.2. Une variété abélienne de dimension g est de type CM si $\text{End}^0(X)$ contient une sous-algèbre semi-simple de rank $2g$ sur \mathbb{Q} .

Proposition 3.3. *Une variété abélienne X est de type CM si et seulement si V_X est une structure de Hodge de type CM , i.e. $MT(X) := MT(V_X)$ est un tore.*

Démonstration. On a que X est isogène un produit $Y_1^{m_1} \times \dots \times Y_r^{m_r}$, avec les Y_i simples et pas isomorphes entre eux. C'est clair que X est de type CM si et seulement si tous Y_i est de type CM . Donc on suppose que X est simple.

Suppose que X est CM et soit F le corps maximal, de dimension $2g$ sur \mathbb{Q} . Alors V est libre de rank 1 sur F . Donc $MT(X) \subseteq GL_D(V) \subseteq G_F(V) = T_F$ et donc $MT(X)$ est un tore.

Viceversa si V_X est de type CM alors on a que le centre F de $\text{End}^0(X) \simeq \text{End}_{\mathbb{Q}\text{HS}}(V_X)$ est isomorphe V comme espaces vectoriels sur F . On a déjà prouvé ça dans le Lemma 2.11 mais nous remettons la preuve (facile) ici pour rendre la preuve indépendante. En fait si $d = \dim_F V$, alors

$$D := (\text{End}_{\mathbb{Q}}(V))^{MT(V)} \supseteq (\text{End}_{\mathbb{Q}}(V))^{T_F} \supseteq M_d(F).$$

Mais, car D est un algèbre de division, alors $d = 1$.

Donc F est une extension de \mathbb{Q} de degré $2g$ et donc X est de type CM . \square

Remarque 3.4. Dans la preuve on n'a pas utilisé le fait, bien connu, que $\text{End}^0(E)$ est commutatif si E est de type CM . En fait on peut déduire ça par la proposition précédente et le Lemma 2.11.

3.1. Courbes elliptiques. Dans cette section on calcule le groupe de Mumford-Tate d'une courbe elliptique.

Proposition 3.5. *Soit E une courbe elliptique complexe.*

- (i) Si $\text{End}^0(E) = \mathbb{Q}$ alors $Hg(E) = Sl(V_E)$ et $MT(E) \simeq GL_2(V_E)$.
- (ii) Si $\text{End}^0(E)$ est un corps quadratique imaginaire F alors $Hg(E) \simeq U_F$ et $MT(E) \simeq T_F$.

Démonstration. Car V_E est polarisable alors $Hg(E)$ est réductives. De plus on a que $Hg(U) \subseteq Sl(V_E) \simeq Sl_{2, \mathbb{Q}}$.

Lemma 3.6. *Soit $\text{car}(k) = 0$. Les sous-groupes réductifs de $Sl_{2, k}$ sont le groupe triviale, les tores maximaux et $Sl_{2, k}$.*

Démonstration. On remarque d'abord que tout tore de $Sl_{2, k}$ a dimension 1. Soit maintenant G un sous-groupe réductif de $Sl_{2, k}$. S'il a dimension 1 alors $G_{\bar{k}}$ est \mathbb{G}_a ou \mathbb{G}_m . Car G est réductif il suit que G est un tore, donc un tore maximale. Si G a dimension 2 alors son radical $R(G)$ est un tore de dimension 0 ou 1. Donc $G/R(G)$ est un groupe semi-simple de dimension 1 ou 2. Aussi sa algèbre de Lie est semi-simple de dimension 1 ou 2. Mais tout algèbre de Lie de dimension ≤ 2 est résoluble et donc il n'existe pas un sous-groupe réductif de dimension 2. \square

Donc on a les suivantes possibilités

- $Hg(E) = 0$ ou
- $Hg(E) = \text{tore maximal dans } SL(V_E)$ ou
- $Hg(E) = SL(V_E)$.

Dans le premier cas

$$D = \text{End}(V_E)^{Hg(V_E)} = \text{End}(V_E),$$

qui n'est pas commutative. Donc ce cas est impossible.

On a aussi que D est \mathbb{Q} ou un corps quadratique imaginaire F . Les deux cas correspondent aux cas E pas de type CM ou E de type CM .

Donc, si $D = \mathbb{Q}$, $Hg(E)$ n'est pas un tore. Ainsi $Hg(E) = Sl(V_E)$ et $MT(E) \simeq GL_2(V_E)$.

Si $D = F$ alors $Hg(E)$ est un tore et donc $Hg(E)$ est un tore maximal de $Sl(V_E)$ et $MT(E)$ est un tore maximal de $GL(V_E)$. De plus on sait que $MT(E) \subseteq GL_D(V_E) \simeq T_F$. Donc $MT(E) \simeq T_F$ et $Hg(E) \simeq U_F$. \square

Remarque 3.7. Dans tous les deux cas on a

$$MT(E) = GSp_D(V_E, \varphi) := GSp(V_E, \varphi) \cap GL_D(V).$$

En fait on a que, car V_E a dimension deux, $GSp(V_E, \varphi) = GL(V_E)$. De plus $GL_D(V_E)$ est gal $GL(V_E)$ si $D = \mathbb{Q}$ et $GL_F(V_E) \simeq T_F$ si $D = F$.

4. LA CONJECTURE DE HODGE

Soit X une variété complexe propre de dimension n et soit $\mathcal{B}^p(X) \subseteq H^{2p}(X, \mathbb{Q})(p)$ le sousespace des classes de Hodge. On appelle *l'anneaux de Hodge* la \mathbb{Q} -algèbre commutative graduée $\mathcal{B}^\bullet := \bigoplus_p \mathcal{B}^p(X)$, où la multiplication est donnée par le produit wedge. Soit \mathcal{Z}_X^p le groupe abélien libre sur \mathbb{Q} généré par les sous schémas fermé et intègres de X de codimension p . On peut construire naturellement un morphisme

$$HC(X, p) : \mathcal{Z}_X^p \longrightarrow \mathcal{B}^p(X)$$

qui associe une cycle Z une classe de cohomologie $cl(Z)$, qui est le Dual de Poincaré de la classe fondamentale $[Z]$ de $H_{2n-2p}(X, \mathbb{Q})$.

Théorème 4.1. *L'accouplement*

$$\Omega^i(X) \times \Omega^{n-i}(X) \longrightarrow \mathbb{C}$$

donné par $(\omega, \eta) \mapsto \int \omega \wedge \eta$ induit un isomorphisme

$$H^i(X, \mathbb{C}) \longrightarrow H^{2n-i}(X, \mathbb{C})^\vee.$$

On a aussi un isomorphisme

$$H^{p,q}(X, \mathbb{C}) \longrightarrow H^{n-p, n-q}(X, \mathbb{C})^\vee.$$

Remarque 4.2. Par contre pour le Théorème de De rham on a aussi un isomorphisme de $H_{n-i}(X, \mathbb{C})$ avec $H^{n-i}(X, \mathbb{C})^\vee$ donnée par $[c] \mapsto (\omega \mapsto \int_c \omega)$.

On a que fait $cl(Z)$ est dans $H^{p,p}(X, \mathbb{C})$ et donc dans $\mathcal{B}^p(X)$. En fait si on prend $\alpha \in H^{n-a, n-b}(X, \mathbb{C})$ avec $a + b = 2p$ et $a \neq b$ alors on a que $n - a > n - p$ ou $n - b > n - p$. Donc α est zeros sur la desingularisation \tilde{Z} de Z . Donc

$$\int_{\tilde{Z}} \alpha = \int_X cl(Z) \wedge \alpha = 0.$$

Ça implique que, pour le Théorème de Poincaré, que $cl(Z) \in H^{p,p}(X)$.

Conjecture. *Pour tout variété complexe lisse propre X et pour tout p on a que $HC(X, p)$ est surjective.*

La conjecture est vrai si $n = 1$ (Théorème de Lefschetz). En fait la suite exponential

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X^* \longrightarrow 0$$

donne une suite exacte longue

$$\dots \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \text{Pic}(X) \xrightarrow{\delta} H^2(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\alpha} H^2(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \dots$$

On a que α est la composition de l'inclusion $H^2(X, \mathbb{Z}) \hookrightarrow H^2(X, \mathbb{C})$ avec la projection $H^2(X, \mathbb{C}) \longrightarrow H^2(X, \mathcal{O}_X)$ dans la composante $(0, 2)$ de la decomposition de Hodge. Car

$$H^2(X, \mathbb{C}) \simeq H^1(X, \Omega_X^1) \oplus H^2(X, \mathcal{O}_X) \oplus H^0(X, \Omega_X^2)$$

et

$$\overline{H^2(X, \mathcal{O}_X)} = H^0(X, \Omega_X^2)$$

alors $\ker(\alpha) = H^1(X, \Omega_X^1) \cap H^2(X, \mathbb{Z})$, i.e. $\ker(\alpha)$ est fait par les classes de Hodge. Mais il est aussi égale l'image de δ , qui est precisement fait par les cycles algébriques.

Donc $\mathcal{B}^1(X) \subseteq H^2(X, \mathbb{Q})$ est généré par les classes de diviseurs. Soit $\mathcal{D}^\bullet \subseteq \mathcal{B}^\bullet$ la \mathbb{Q} -sousalgre généré par $\mathcal{B}^1(X)$. car $cl(Z_1) \cup cl(Z_2) = cl(Z_1 \cap Z_2)$ on a que \mathcal{D}^\bullet est fait par cycles algébriques.

Donc, une strategie possible pour prouver la Conjecture de Hodge dans certains cas (car en général est faux) est de prouver que

$$\mathcal{D}^\bullet = \mathcal{B}^\bullet.$$

Théorème 4.3. *Soit A une variété abélienne isogène un produit de courbes elliptiques*

$$E_1^{m_1} \times \dots \times E_r^{m_r}$$

avec les E_i pas isomorphes entre eux. Alors

$$Hg(A) \simeq Hg(E_1) \times \dots \times Hg(E_n)$$

et la conjecture de Hodge est vrai pour A .

Démonstration. On donne la prouve seulement dans le case que $r = 1$ et m_1 quelconque.

Soit E une courbe elliptique. On suppose d'abord que $\text{End}^0(E) = \mathbb{Q}$. On sait que $Hg(E^m) = Hg(E) = \text{Sl}(V_E) = \text{Sp}(V_E, \varphi)$. Donc

$$\mathcal{B}(E^m) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = [\wedge^\bullet(V_{X, \mathbb{C}}^{\oplus m})]^{Sp(V_E, \varphi) \otimes \mathbb{C}}$$

Alors on applique la suivant proposition de la théorie des invariants.

Soit maintenant $F = \text{End}^0(E)$ un corps quadratique imaginaire. On sait que $Hg(V_E) = U_F$. Soit $\Sigma_F = \{\sigma, \tau\}$ et $H = V_E^\vee$. Alors on a, par 2.11, que $H_{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{C}_\sigma \oplus \mathbb{C}_\tau$ avec \mathbb{C}_σ de type $(1, 0)$ et \mathbb{C}_τ de type $(0, 1)$. Si on considère $W := H^{2m}(E^n, \mathbb{Q}) = \wedge^{2m} H$ alors

$$W_{\mathbb{C}} \simeq \oplus_{\varrho} W_{\mathbb{C}}^{\varrho}$$

avec ϱ qui varie dans le groupe des caractères de $T_{F, \mathbb{C}}$, qui est généré par σ et τ . Les éléments de Hodge de type (p, p) sont les éléments de $W_{\mathbb{C}}^{p\sigma+p\tau}$. Mais par contre on a

$$\mathcal{B}(E^m) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = \wedge^\bullet(H_{\mathbb{C}}^{\oplus m})^{U_F \otimes \mathbb{C}} = \oplus (H_{\mathbb{C}} \otimes \dots \otimes H_{\mathbb{C}})^{Hg(E) \otimes \mathbb{C}}.$$

et l'action de $U_F \otimes \mathbb{C} \simeq \mathbb{G}_{m, \mathbb{C}}$ sur $H_{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ est donnée par $\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha^{-1} y)$. Donc tout élément de $W_{\mathbb{C}}^{p\sigma+p\tau}$ est combinaison lineaire des éléments de la forme

$$x_1 \wedge y_1 \wedge \dots \wedge x_n \wedge y_n$$

avec x_i dans $H_{\mathbb{C}}(\sigma)$ et y_i dans $H_{\mathbb{C}}(\tau)$. Mais on a que $\alpha(x_i \wedge y_i) = (\alpha x_i \wedge \alpha^{-1} y_i) = x_i \wedge y_i$. Donc $W_{\mathbb{C}}^{p\sigma+p\tau}$ est généré par les éléments de degré 2. \square

Proposition 4.4. *Soit W un espace vectoriel sur \mathbb{C} avec une non dgenere symplectique forme φ et soit m un entier. Alors, si $G = \text{Sp}(W, \varphi)$,*

$$[\wedge^\bullet(W)^{\oplus m}]^G$$

est généré par les éléments de degré 2.

On a aussi un resultat plus général.

Théorème 4.5. *Soit X une variété abélienne complexe. Soit $D := \text{End}^0(X)$, $V := H_1(X, \mathbb{Q})$ et φ sa forme de Riemann d'une polarisation. Alors on a $\mathcal{B}^\bullet(X^n) = \mathcal{D}^\bullet$ pour tout n si et seulement si $Hg(X) = Sp_D(V, \varphi)$ et X n'a pas des factors de type III.*

Corollaire 4.6. *La conjecture de Hodge est vrai pour tout variété abélienne simple de dimension première.*