08.11.2011 ARIVAF 3

## Énoncés principaux

N. Borne

# Catégories tannakiennes

## 1 reconstruction

G schéma en groupes affine / $k$

$\omega^G : \mathrm{Rep}_k(G) \longrightarrow \mathrm{Vec}_k$ foncteur d'oubli

R $k$-algèbre

$$\underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}(\omega^G)(R) = \left\{ \lambda \in \mathrm{Aut}\left( \mathrm{Rep}_k(G) \xrightarrow{\omega^G} \mathrm{Vec}_k \xrightarrow{R\otimes} \mathrm{Mod}_R \right) \right.$$

with $\omega^G_R$ over the composite arrow $\mathrm{Rep}_k(G) \to \mathrm{Mod}_R$

vérifiant $\lambda_{X_1 \otimes X_2} = \lambda_{X_1} \otimes \lambda_{X_2}$

$\left. \lambda_{1} = \mathrm{id}_R \right\}$

rem la naturalité s'exprime par : si $X \xrightarrow{\alpha} Y$ morphisme de $\mathrm{Rep}_k G$

$$\begin{tikzcd}
X \otimes R \arrow[r, "\alpha \otimes id"] \arrow[d, "\lambda_X"'] & Y \otimes R \arrow[d, "\lambda_Y"] \\
X \otimes R \arrow[r, "\alpha \otimes id"'] & Y \otimes R
\end{tikzcd}$$

**Prop** $G \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}(\omega^G)$ est un isomorphisme.

## 2 dualité

$\mathcal{C}$ une catégorie $k$ linéaire abélienne monoïdale rigide $[k = \underline{\mathrm{End}}(1)]$

$\omega : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Vec}_k$ foncteur $k$ linéaire exact monoïdal fidèle

**Thm** i) $\underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}(\omega)$ est représentable par un schéma en groupes affine G

ii)

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Rep}_k(G) \arrow[d, "\omega^G"] \\
\mathcal{C} \arrow[ur, dashed, "\otimes"'] \arrow[r, "\omega"'] & \mathrm{Vec}_k
\end{tikzcd}$$

## Exemples

① $G/S$ diagonalisable

$G = \underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-gr}}(M_S, \mathbb{G}_m) = D_S(M)$, $M$ groupe ordinaire

$S = \mathrm{Spec}\, A$ $\quad \mathrm{Rep}_S(G) \xrightarrow[\sim]{\otimes} \mathrm{Grad}^M(\mathrm{Mod}_A)$ " $A$ modules munis d'une graduation du type $M$ "

$(V,\rho) \longmapsto (m \mapsto V_m)$

② $G/S$ multiplicatif (isotrivial)

$\exists S'/S$ surjectif fini étale $\quad G_{S'}$ diagonalisable

$S = \mathrm{Spec}\, k$

$X^*(G) = \mathrm{Hom}_{k^{sep}\text{-gr}}(G_{k^{sep}}, \mathbb{G}_m) \overset{\text{action continue}}{\circlearrowleft} \mathrm{Gal}(k^{sep}/k)$

$(V,\rho) \in \mathrm{Rep}_S(G) \longrightarrow V \otimes_k k^{sep} = \bigoplus_{m \in X^*(G)} V_m \;/\; \forall \sigma \in \mathrm{Gal}(k^{sep}/k) \;\; \sigma V_m = V_{\sigma m}$

$\mathrm{Rep}_S(G) \longleftrightarrow$ $k^{sep}$ ev munis
d'une $X^*(G)$-graduation \ compatibles
d'une action de Galois semi-linéaire

Question $\quad X = \underline{\mathrm{Hom}}_S(G, \mathbb{G}_m)$ " groupe constant tordu "

$S = \mathrm{Spec}\, A$ $\quad \mathrm{Rep}_S\, G \overset{\otimes}{\underset{?}{\xrightarrow{\sim}}} \mathrm{Grad}^X(\mathrm{Mod}_A)$

objets : $X \longrightarrow \mathrm{Mod}_A$
morphismes de champs ...

③ $K$ groupe topologique

$\mathrm{Rep}(K)$ représentations continues sur les $\mathbb{R}$-ev de dim $< \infty$

$\mathrm{Rep}(K) \xrightarrow{\omega^K} \mathrm{Vec}_{\mathbb{R}}$

$\widetilde{K} = \underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}(\omega_K)$ enveloppe algébrique réelle

$\mathrm{Rep}(K) \simeq \mathrm{Rep}(\widetilde{K})$ $\quad$ [ compatible à $\omega^K, \omega^{\widetilde{K}}$ ]

$\mathrm{Gr\,Top} \underset{G(\mathbb{R}) \longleftarrow G}{\overset{K \longrightarrow \widetilde{K}}{\rightleftarrows}} \mathrm{Gr\,Aff}/\mathbb{R}$ $\qquad K \longrightarrow \widetilde{K}(\mathbb{R})$

isomorphisme si $K$ compact

muni de la topologie "usuelle" $\rightsquigarrow$ permet d'identifier $\mathrm{Gr\,Top\,Comp}$ à une sous catégorie pleine de $\mathrm{Gr\,Aff}/\mathbb{R}$

# Dictionnaire

## 1 fonctorialité

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Rep}_k G' = \mathcal{C}' \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "\omega'"'] & \arrow[d, phantom, "\Swarrow"] & \mathcal{C} = \mathrm{Rep}_k G \arrow[dl, "\omega"] \\ & \mathrm{Vec}_k & \end{tikzcd}$$

$$G' \xleftarrow{f} G$$

**prop**

1) $f$ immersion fermée (monomorphisme) $\Longleftrightarrow$ tout objet $X$ de $\mathcal{C}$ est sous quotient de l'image par $F$ d'un objet $X'$ de $\mathcal{C}'$

2) $f$ est fidèlement plat $\Longleftrightarrow$
- i) $F$ est (fidèlement) plein
- ii) tout sous objet de $F(X')$, $X' \in \mathrm{obj}\,\mathcal{C}'$ est l'image par $F$ d'un sous objet de $X'$

rem on peut généraliser aux cogèbres et aux comodules

## 2) algébricité

$G = \mathrm{Spec}\,A$ algébrique si $A$ est de type fini, ou : $\exists\, \rho : G \hookrightarrow GL(V)$ $\dim_k V < \infty$.

def $X \in \mathrm{obj}\,\mathcal{C}$, $(\mathcal{C}, \omega)$ tannakienne
$X$ $\otimes$ générateur si tout objet est un sous quotient d'un objet de la forme $P(X)$ $P \in \mathbb{N}[t]$

prop Si $G = \underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}\omega$, $G$ algébrique $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{C}$ admet un $\otimes$ générateur

découle du

lemme $X \in \mathrm{obj}\,\mathcal{C}$, $\underline{\mathrm{Aut}}_k(\omega) = G \xrightarrow{f_X} \underline{\mathrm{Aut}}_k(\omega(X))$

$f_X$ monomorphisme $\Longleftrightarrow$ $X \oplus X^\vee$ $\otimes$ générateur

preuve $\mathrm{Rep}_k \underline{\mathrm{Aut}}_k(\omega(X)) \xrightarrow{F_X} \mathcal{C}$

$f_X$ mono $\Longleftrightarrow$ tout objet de $\mathcal{C}$ est sous quotient de l'image par $F_X$ d'un objet de $\mathrm{Rep}_k \underline{\mathrm{Aut}}_k(\omega(X))$

$X \oplus X^\vee$ $\otimes$ générateur
$\Longleftrightarrow$ tout objet de $\mathcal{C}$ est sous quotient d'un objet du type $P(X, X^\vee)$ $P \in \mathbb{N}[t_1, t_2]$

Comme les $P(X, X^\vee)$ sont dans l'image de $F_X$ $\Leftarrow$ est clair. ]

Pour $\Rightarrow$ : on veut voir : si $\rho : G \hookrightarrow GL(V)$,

alors $V \oplus V^\vee$ $\otimes$ générateur.

Soit $\nu : G \to GL(W)$, $\dim W < \infty$

alors $W \hookrightarrow \omega^G(W) \underset{k}{\otimes} A \simeq A^{\oplus \dim W}$

Pour montrer que $W$ est sous-quotient d'un objet du type $P(V, V^\vee)$

on peut donc se ramener à $W \hookrightarrow A$.

Mais $G \hookrightarrow GL(V) \hookrightarrow \mathrm{End}(V) \times \mathrm{End}(V^\vee)$ immersion fermée

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Sym}(\mathrm{End}\,V) \otimes \mathrm{Sym}(\mathrm{End}^\vee V) \arrow[rr, two heads] & & A \\
\bigoplus_{n \geq 0} (V^\vee \otimes V)^{\otimes n} \otimes \bigoplus_{m \geq 0} (V \otimes V^\vee)^{\otimes m} \arrow[u, two heads] & & \\
\exists \; W' \arrow[u, hook] \arrow[rr, two heads] & & W \arrow[uu, hook]
\end{tikzcd}$$

$\dim_k W' < \infty$
$G$-stable

<u>note</u> tout comodule sous une algèbre de Hopf est limite inductive filtrante de ses sous-comodules de dimension finie

<u>rem</u> ① $f_X(G) = G_X$ groupe de monodromie de $X$

Groupe de Tannaka de la catégorie tannakienne engendrée par $X$.
$\langle X \rangle \subset \mathcal{C}$

② $G$ est de plus fini $\Leftrightarrow$ $\mathcal{C}$ admet un pseudo générateur

i.e. $\exists X \in \mathrm{obj}\, \mathcal{C}$
tout objet de $\mathcal{C}$ est sous quotient d'un $X^{\oplus n}$, $n \geq 0$

3) <u>réductivité</u>

**Prop** $(\mathcal{C}, \omega)$ tannakienne $/k$ car $k = 0$ $G = \mathrm{Aut}^\otimes \omega$

$G$ pro réductif $\Leftrightarrow$ $\mathcal{C}$ semi simple

<u>note</u> : en car 0 $G$ réductif si $G^\circ$ l'est, par déf.

Dans cette situation, on peut récupérer $G_X \hookrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_k(\omega(X))$

à partir des éléments de $\omega(X)^{\otimes m} \otimes \omega(X)^{\vee \otimes n}$ fixés par $G_X$.

("tenseurs mixtes" )

Un peu plus généralement (et pour simplifier les notations)

**Prop** $\underset{\text{réductif}}{G} \subset GL(V)$

i) toute représentation de G est facteur direct d'une somme de tenseurs mixte $T^{m,n}(V) = V^{\otimes m} \oplus V^{\vee \otimes n}$

ii) Si $H \subset G$, et $H' = \left\{ g \in G \;/\; \forall m, n \in \mathbb{N} \; \forall v \in T^{m,n}(V)^H \; gv = v \right\}$

alors $H$ réductif $\Longrightarrow H = H'$

dém i) lemme précédent + semi simplicité

ii) $H \subset H'$ est clair

De plus, d'après le théorème de Chevalley, $\exists \, G \hookrightarrow GL(W)$

et D droite de W tels que $H = G_D$.

D'après i) on peut supposer que W est une somme de $T^{m,n}(V)$.

Comme H réductif $D \underset{i}{\overset{\exists p}{\rightleftarrows}} W$ $p$ H équivariant, $p \circ i = id$

Induit $\operatorname{End}(D) \xrightarrow{\alpha} \operatorname{End}(W)$, $f \longmapsto i \circ f \circ p$ H équivariant, en particulier $H = G_D = G_{\alpha(id_D)}$

Si $g \in H'$, alors g doit fixer $\alpha(id_D) \in \operatorname{End}(W) \underset{G\text{eq}}{\simeq} W^\vee \otimes W$

en effet l'image de $\alpha(id_D)$ est un tenseur mixte fixé par H.

# Polarisation

## 1 formes bilinéaires

$\mathcal{C}$ catégorie tannakienne / $k$

$T$ objet inversible ($T\otimes \cdot$ équivalence)

**déf:** forme bilinéaire à valeurs dans $T$ : $\varphi : V\otimes V \longrightarrow T$

On a des bijections $\quad \mathrm{Hom}(V\otimes V, T) \rightrightarrows \mathrm{Hom}(V, V^\vee \otimes T)$

$$\varphi \longmapsto \varphi^\sim \qquad \varphi^\sim(x)(y) = \varphi(x\otimes y)$$

$$\varphi \longmapsto {}^\sim\varphi \qquad {}^\sim\varphi(x)(y) = \varphi(y\otimes x)$$

**déf:** $\varphi$ non dégénérée si $\varphi^\sim$ iso ($\Longleftrightarrow {}^\sim\varphi$ iso)

**déf** $\varepsilon_\varphi = {}^\sim\varphi^{-1}\circ\varphi^\sim$ parité de $\varphi$

$\varphi$ non degenerée définit des bijections $\quad \mathrm{End}\,V \rightrightarrows \mathrm{Hom}(V\otimes V, T)$

$$u \longmapsto \varphi\circ(u\otimes id)$$

$$u \longmapsto \varphi\circ(id\otimes u)$$

et donc une bijection $\quad \mathrm{End}\,V \longrightarrow \mathrm{End}\,V$

$$u \longmapsto u^\varphi$$

## 2 formes de Weil

même hypothèse, $k \hookrightarrow \mathbb{R}$

**déf:** $\varphi : V\otimes V \longrightarrow T$ non degenerée est une forme de Weil si

i) $\varepsilon_\varphi \in Z(\mathrm{End}(\varphi))$

ii) $\forall u \in \mathrm{End}(V) \quad u \neq 0 \Rightarrow \mathrm{tr}(u\,u^\varphi) > 0$

**déf** $\varphi : V\otimes V \longrightarrow T$, $\psi : W\otimes W \longrightarrow T$ sont compatibles si $\varphi \oplus \psi$ est une forme de Weil

relation d'équivalence sur l'ensemble des formes de Weil de parité $\varepsilon$ fixée.

## 3 Polarisation

même hypothèses, $\varepsilon \in \mathrm{Aut}^{\otimes}(id_{\mathcal{C}})$

rem si $\mathcal{C}$ admet un foncteur fibre $\omega$
$\underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}(id_{\mathcal{C}}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}\omega$
identifie $\underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}(id_{\mathcal{C}})$ à $Z(\underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}\omega)$

définition $\varepsilon$ – polarisation $\pi$ (homogène)

$\forall V \in$ obj $\mathcal{C}$ donnée de $\pi(V)$ classe d'équivalence de forme de Weil de parité $\varepsilon$
$V \otimes V \to 1$

telles que $\forall V, W \in$ obj $\mathcal{C}$

$\varphi \in \pi(V)$ $\quad \varphi \oplus \psi \in \pi(V \oplus W)$
$\psi \in \pi(W)$ $\quad \varphi \otimes \psi \in \pi(V \otimes W)$

$\varphi \in \pi(V)$ : forme positive pour $\pi$

proposition $\pi$ polarisation pour $\mathcal{C}$. Alors $\mathcal{C}$ est semi-simple

## 4 Exemple

$k = \mathbb{R}$ $\quad G/\mathbb{R}$ groupe algébrique affine
$\mathcal{C} = \mathrm{Rep}(G)$

def $C \in G(\mathbb{R})$ $\quad \varphi : V \otimes V \longrightarrow \mathbb{R}$ dans $\mathrm{Rep}(G)$
est de $C$ – polarisation si $(x, y) \longmapsto \varphi(x, Cy)$ est symétique définie positive

On montre qu'alors $\varphi$ est de Weil
$\mathcal{C}$ est semi simple

def $C$ est Hodgien si tout $V \in$ obj $\mathrm{Rep}\, G$ admet une forme de $C$–polarisation

alors $C$ définit une polarisation $\pi_C$
formes positives = formes de $C$–polarisation

prop $G$ compact $\quad C$ Hodgien $\Longleftrightarrow C \in Z(\mathbb{R})$

# Esquisse de preuve

## 1 stratégie

On cherche A/k algèbre de Hopf /

$\forall R/k$ algèbre $\quad \mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(A, R) \simeq \underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}(\omega)(R) \qquad (1)$

1ère étape : [illegible] construire A/k cogèbre /

$\forall V/k$ EV $\quad \mathrm{Hom}_{k\mathrm{EV}}(A, V) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_k(\omega, \omega\otimes V) \qquad (2)$

à partir de $\mathcal{C}$ k linéaire abélienne + reconstruction
$\omega$ k linéaire exact fidèle . dualité

2ème étape
$\mathcal{C}, \omega$ monoïdaux $\longrightarrow$ A bigèbre
$(2) \longrightarrow (1)$

[illegible] $\mathcal{C}, \omega$ symétriques $\longrightarrow$ A commutative

3ème étape $\mathcal{C}, \omega$ rigides $\longrightarrow$ A algèbre de Hopf.

rem au vu de (2) on aura

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{k\mathrm{EV}}(A, k) \arrow[r, phantom, "\simeq"] \arrow[d, dash] & \mathrm{End}_k(\omega) \arrow[d, dash] \\
\text{" distributions sur G"} & \text{" transformée de Fourier "}
\end{tikzcd}$$

prendre $A = \cancel{\mathrm{Hom}}_{k\mathrm{EV}}(\mathrm{End}_k(\omega), k)$ ne marchera que si $\dim_k \mathrm{End}_k(\omega) < \infty$

## 2 Construction de la cogèbre

$\mathcal{C}$ catégorie $\quad \omega : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Vec}_k$ foncteur

$$\mathrm{End}^\vee(\omega) = \int^{X \in \mathcal{C}} \omega(X)^\vee \otimes \omega(X)$$ "prédual", une cofin

plus concrètement

$$\mathrm{End}^\vee(\omega) = \frac{\bigoplus_{X \in \mathcal{C}} (\omega X)^\vee \otimes \omega X}{\mathrm{Vect}\left((\omega f)^* \psi \otimes v - \psi \otimes (\omega f)(v),\ X \xrightarrow{f} Y\ v \in \omega(X)\ \psi \in \omega(Y)^\vee\right)}$$

**lemme** $\quad \mathrm{VEC}_k \longrightarrow \mathrm{VEC}_k$

$$V \longmapsto \mathrm{Hom}(\omega, \omega \otimes_k V)$$

est représenté par $\mathrm{End}^\vee(\omega)$

idée de la preuve
$\mathrm{Hom}(\cdot, W) : \mathrm{VEC}_k \longrightarrow (\mathrm{VEC}_k)^\circ$
transforme colimites en limites.

en particulier on a une flèche universelle $\omega \xrightarrow{\delta} \omega \otimes \mathrm{End}^\vee(\omega)$

donnée par $\omega(X) \xrightarrow[\mathrm{db} \otimes \mathrm{id}]{} \omega(X) \otimes \omega(X)^\vee \otimes \omega(X) \longrightarrow \omega(X) \otimes \mathrm{End}^\vee(\omega)$

structure de cogèbre

en notant $A = \mathrm{End}^\vee(\omega)$ on définit $\Delta : A \longrightarrow A \otimes A \qquad \varepsilon : A \longrightarrow k$

par

$$\begin{tikzcd} \omega \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\delta"'] & \omega \otimes A \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \Delta"] \\ \omega \otimes A \arrow[r, "\delta \otimes \mathrm{id}"'] & \omega \otimes A \otimes A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \omega \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & \omega \otimes A \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \varepsilon"] \\ & \omega \end{tikzcd}$$

concrètement $\quad \Delta([\varphi \otimes v]) = \sum_{i \in I} [\varphi \otimes e_i] \otimes [e_i^* \otimes v] \qquad \varepsilon([\varphi \otimes v]) = \varphi(v)$

$(e_i)_{i \in I}$ base de $\omega(X)$

factorisation de $\omega$

la flèche universelle $\quad \omega(X) \xrightarrow{\delta} \omega(X) \otimes \mathrm{End}^\vee \omega$

produit

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Comod}_A \arrow[d, "\omega^A"] \\ \mathcal{C} \arrow[ur, dotted, "\tilde{\omega}"] \arrow[r, "\omega"'] & \mathrm{Vec}_k \end{tikzcd}$$

**proposition** Si $\left( \begin{array}{l} \mathcal{C} \text{ est } k \text{ linéaire, abélienne} \\ \omega \text{ est exact et fidèle } k \text{ linéaire} \end{array} \right)$ alors $\tilde{\omega}$ est une équivalence

rem : aussi un théorème de reconstruction dans ce contexte.

# 3 Construction de la bigèbre

[ **modèle** A est une $k$-cogèbre

A bigèbre si on se donne $A\otimes A \xrightarrow{m} A$, $k \xrightarrow[\eta]{} A$ faisant de $(A, m, \eta)$ un monoïde dans $\mathrm{Cog}_k$

Une telle structure définit une structure monoïdale sur $\mathrm{comod}_A$

$$(V_1,\rho_1)\otimes(V_2,\rho_2) = (V_1\otimes V_2\,,\ \rho)$$

$$\rho_i : V_i \longrightarrow V_i\otimes A$$

$$\begin{tikzcd} V_1\otimes V_2 \arrow[r, "\rho_1\otimes\rho_2"] & V_1\otimes A\otimes V_2\otimes A \arrow[r, phantom, "\simeq"] & V_1\otimes V_2\otimes A\otimes A \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes m"] \\ & & V_1\otimes V_2\otimes A \end{tikzcd}$$

**rem** $\omega^A : \mathrm{Comod}_A \to \mathrm{Vec}_k$ est monoïdal ]

**reconstruction de m sur $\mathrm{End}^\vee\omega$**

partant de $(\mathcal{C},\omega)$ monoïdaux

avec la description concrète

multiplication
$$[\underset{\underset{(\omega X)^\vee\otimes\omega X}{\cap}}{\varphi\otimes v}]\,.\,[\underset{\underset{(\omega Y)^\vee\otimes\omega Y}{\cap}}{\psi\otimes w}] = [\underset{\underset{\underset{\omega(Y)^\vee\otimes\omega(X)^\vee}{\wr}}{\omega(X\otimes Y)^\vee}}{\underset{\cap}{(\varphi\otimes\psi)}}\otimes\underset{\underset{\underset{\omega(X)\otimes\omega(Y)}{\wr}}{\omega(X\otimes Y)}}{\underset{\cap}{(v\otimes w)}}]$$

unité $[\mathrm{id}\otimes 1]\in k^\vee\otimes k$

abstraitement : $\mathcal{C}at\,/\,\mathcal{V}ec_k$ objets : (petites) catégories $\mathcal{C}$ $+\ \omega : \mathcal{C}\to\mathcal{V}ec_k$

morphismes : $(\mathcal{C},\omega)\xrightarrow{(F,\alpha)}(\mathcal{C}',\omega')$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[d, "F"'] \arrow[rd, "\omega"{name=U}] & \\ \mathcal{C}' \arrow[r, "\omega'"'{name=D}] & \mathcal{V}ec_k \arrow[from=D, to=U, Rightarrow, "\alpha"] \end{tikzcd}$$

le foncteur $\mathrm{End}^\vee : \mathcal{C}at\,/\,\mathcal{V}ec_k \longrightarrow \mathrm{Cog}_k$

est monoïdal, en particulier transforme

monoïdes dans $\mathcal{C}at/\mathcal{V}ec_k$ : catégories monoïdales strictes muni d'un foncteur tensoriel

en monoïdes dans $\mathrm{Cog}_k$ : $k$-bigèbres. **note** tout catégorie monoïdale est monoïdalement équivalente à une catégorie monoïdale stricte

---

Si R est une $k$-algèbre, et $A = \mathrm{End}^\vee(\omega)$

$$\mathrm{Hom}_{k\mathrm{EV}}(A,R) \simeq \mathrm{Hom}_k(\omega, \omega\underset{k}{\otimes}R) \simeq \mathrm{End}_R(\omega\otimes R) = \mathrm{End}(\omega_R)$$

se restreint en $\mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(A,R) \simeq \mathrm{End}^\otimes(\omega_R)$

---

il est clair sur les deux constructions de m

que si $(\mathcal{C},\omega)$ monoïdal est de plus symétrique, $\mathrm{End}^\vee(\omega)$ est commutative

# 4 Construction de l'antipode

On a presque montré le théorème de dualité : si $A = \mathrm{End}^\vee \omega$

$G = \mathrm{Spec}\, A$ est un schéma en monoïdes et

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Rep}_k G \arrow[d] \\ \mathcal{C} \arrow[ru, dashed] \arrow[r, "\omega"] & \mathrm{Vec}_k \end{tikzcd}$$

La rigidité montre que $G$ est en fait un groupe

grâce à la proposition suivante

**prop** $\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"{name=U}] \arrow[r, bend right, "G"'{name=D}] & \mathcal{D} \arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "\alpha"] \end{tikzcd}$ morphisme de foncteurs tensoriels.

Si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont rigides, alors $\alpha$ est un isomorphisme.

On peut appliquer ceci à $\omega_R : \begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r] \arrow[rd] & \mathrm{Mod}_R \\ & \mathrm{Proj}_R \arrow[u] \end{tikzcd}$

si bien que $\mathrm{End}^{\otimes}(\omega_R) = \mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega_R)$.