Catégorie monoïdale

Une catégorie $\mathcal{C}$ munie d'un foncteur binaire : $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ appelé "produit tensoriel", et d'un objet unité I.

Une catégorie monoïdale est également munie de trois transformations naturelles exprimant le fait que le produit tensoriel

- est associatif : il y a une transformation naturelle α, appelée "associativité", avec composantes :
  $\alpha_{A,B,C} : (A \otimes B) \otimes C \to A \otimes (B \otimes C)$,
- admet I pour unité à droite et à gauche : il y a deux transformations naturelles λ et ρ, appelées respectivement identités à droite et à gauche, avec composantes :

$$\lambda_A : I \otimes A \to A \text{ et}$$
$$\rho_A : A \otimes I \to A\,.$$

Axiomes de cohérence

$$\begin{tikzcd}
((A \otimes B) \otimes C) \otimes D \arrow[r, "\alpha_{A,B,C\otimes D}"] \arrow[dd, "\alpha_{A\otimes B,C,D}"'] & (A \otimes (B \otimes C)) \otimes D \arrow[d, "\alpha_{A,B\otimes C,D}"] \\
 & A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) \arrow[d, "A\otimes\alpha_{B,C,D}"] \\
(A \otimes B) \otimes (C \otimes D) \arrow[r, "\alpha_{A,B,C\otimes D}"'] & A \otimes (B \otimes (C \otimes D))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes I) \otimes B \arrow[rr, "\alpha_{A,I,B}"] \arrow[dr, "\rho_A\otimes B"'] & & A \otimes (I \otimes B) \arrow[dl, "A\otimes\lambda_B"] \\
 & A \otimes B &
\end{tikzcd}$$

Une catégorie monoïdale est « stricte » si les transformations naturelles α, λ et ρ sont des identités.

Symétrie

Une *catégorie monoïdale symétrique* est une catégorie monoïdale $\mathcal{C}$ munie d'une symétrie, c'est-à-dire d'une transformation naturelle

$$\gamma_{A,B} : A \otimes B \to B \otimes A$$

telle que $\gamma_{B,A}\gamma_{A,B} = 1_{A\otimes B}$ pour tout couple d'objets (A, B), et le diagramme hexagonal suivant commute (où α est l'isomorphisme d'associativité) :

$$\begin{tikzcd}
A \otimes (B \otimes C) \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\alpha^{-1}"'] & (B \otimes C) \otimes A \arrow[d, "\alpha"] \\
(A \otimes B) \otimes C \arrow[d, "\gamma"'] & B \otimes (C \otimes A) \arrow[d, "\gamma"] \\
(B \otimes A) \otimes C \arrow[r, "\alpha"'] & B \otimes (A \otimes C)
\end{tikzcd}$$

Catégorie monoïdale rigide

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie monoïdale et (A, B) un couple d'objets. Une paire de morphismes $\nu : I \to B \otimes A$ et $\epsilon : A \otimes B \to I$ forment une *adjonction* entre A et B si les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "A\otimes\nu"] \arrow[dr, "id"'] & A \otimes B \otimes A \arrow[d, "\epsilon\otimes A"] \\
& A
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\nu\otimes B"] \arrow[dr, "id"'] & B \otimes A \otimes B \arrow[d, "B\otimes\epsilon"] \\
& B
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{C}$ est *autonome* ou *rigide* si tout objet a un adjoint à gauche et un adjoint à droite.

Foncteur monoïdal

Un *foncteur monoïdal relâché* F de la catégorie monoïdale $(\mathcal{C}, \otimes, I_{\mathcal{C}}, \alpha_{\mathcal{C}}, \lambda_{\mathcal{C}}, \rho_{\mathcal{C}})$ vers la catégorie monoïdale $(\mathcal{D}, \bullet, I_{\mathcal{D}}, \alpha_{\mathcal{D}}, \lambda_{\mathcal{D}}, \rho_{\mathcal{D}})$ est la donnée d'un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et de deux transformations naturelles, appelées « morphismes de cohérence »

$$\phi_{A,B} : FA \bullet FB \to F(A \otimes B)$$

$$\psi : I_{\mathcal{D}} \to FI_{\mathcal{C}}$$

compatibles avec les transformations naturelles d'associativité et d'unité (voir transparent suivant).

Un « foncteur monoïdal » est un foncteur monoïdal relâché dont les applications de cohérence sont des isomorphismes, et un « foncteur monoïdal strict » est un foncteur monoïdal relâché dont les applications de cohérence sont des identités.

Pour tout triplet d'objets (A, B, C) de $\mathcal{C}$, les diagrammes suivants commutent dans la catégorie $\mathcal{D}$.

$$\begin{tikzcd}
(FA \bullet FB) \bullet FC \arrow[r, "\alpha_{\mathcal{D}}"] \arrow[d, "\phi_{A,B} \bullet 1"'] & FA \bullet (FB \bullet FC) \arrow[d, "1 \bullet \phi_{B,C}"] \\
F(A \otimes B) \bullet FC \arrow[d, "\phi_{A \otimes B, C}"'] & FA \bullet F(B \otimes C) \arrow[d, "\phi_{A, B \otimes C}"] \\
F((A \otimes B) \otimes C) \arrow[r, "F\alpha_{\mathcal{C}}"'] & F(A \otimes (B \otimes C))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
FA \bullet I_{\mathcal{D}} \arrow[r, "1 \bullet \psi"] \arrow[d, "\rho_{\mathcal{D}}"'] & FA \bullet FI_{\mathcal{C}} \arrow[d, "\phi_{A, I_{\mathcal{C}}}"] \\
FA & F(A \otimes I_{\mathcal{C}}) \arrow[l, "F\rho_{\mathcal{C}}"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
I_{\mathcal{D}} \bullet FB \arrow[r, "\psi \bullet 1"] \arrow[d, "\lambda_{\mathcal{D}}"'] & FI_{\mathcal{C}} \bullet FB \arrow[d, "\phi_{I_{\mathcal{C}}, B}"] \\
FB & F(I_{\mathcal{C}} \otimes B) \arrow[l, "F\lambda_{\mathcal{C}}"]
\end{tikzcd}$$

Foncteur monoïdal symétrique

On suppose que les deux catégories monoïdales $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont symétriques. Le foncteur monoïdal relâché F est « symétrique » si le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
FA \bullet FB \arrow[r, "\gamma_{FA,FB}"] \arrow[d, "\phi_{A,B}"'] & FB \bullet FA \arrow[d, "\phi_{B,A}"] \\
F(A \otimes B) \arrow[r, "F\gamma_{A,B}"'] & F(B \otimes A)
\end{tikzcd}$$

commute pour tout couple d'objets (A, B) de $\mathcal{C}$.

Transformation naturelle monoïdale

Soient $(\mathcal{C}, \otimes, I_{\mathcal{C}}, \alpha_{\mathcal{C}}, \lambda_{\mathcal{C}}, \rho_{\mathcal{C}})$, $(\mathcal{D}, \bullet, I_{\mathcal{D}}, \alpha_{\mathcal{D}}, \lambda_{\mathcal{D}}, \rho_{\mathcal{D}})$ deux catégories monoïdales et $(F, \phi_F, \psi_F) : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $(G, \phi_G, \psi_G) : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ deux foncteurs monoïdaux.

Une *transformation naturelle monoïdale* $\theta : (F, \phi_F, \psi_F) \Rightarrow (G, \phi_G, \psi_G)$ est une transformation naturelle $\theta : F \Rightarrow G$ telle que les diagrammes

$$\begin{tikzcd}
FA \bullet FB \arrow[r, "\theta_A \bullet \theta_B"] \arrow[d, "\phi_{A,B}"'] & GA \bullet GB \arrow[d, "\phi_{A,B}"] \\
F(A \otimes B) \arrow[r, "\theta_{A \otimes B}"'] & G(A \otimes B)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & I_{\mathcal{D}} \arrow[dl, "\psi_F"'] \arrow[dr, "\psi_G"] & \\
FI_{\mathcal{C}} \arrow[rr, "\theta_{I_{\mathcal{C}}}"'] & & GI_{\mathcal{C}}
\end{tikzcd}$$

commutent pour tout couple d'objets (A, B) de $\mathcal{C}$.

Monoïdes

Un *monoïde* (ou *objet en monoïdes*) (M, μ, η) dans une catégorie $\mathcal{C}$ est un objet M avec deux morphismes

$\mu : M \otimes M \to M$ appelé « multiplication » et,
$\eta : I \to M$ appelé « unité »,

tels que les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{tikzcd}
(M \otimes M) \otimes M \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\mu"'] & M \otimes (M \otimes M) \arrow[r, "\mu"] & M \otimes M \arrow[d, "\mu"] \\
M \otimes M \arrow[rr, "\mu"'] & & M
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
I \otimes M \arrow[r, "\eta\otimes 1"] \arrow[dr, "\lambda"'] & M \otimes M \arrow[d, "\mu"] & M \otimes I \arrow[l, "1\otimes\eta"'] \arrow[dl, "\rho"] \\
& M &
\end{tikzcd}$$

Un *comonoïde* dans la catégorie monoïdale $\mathcal{C}$ est un monoïde dans la catégorie opposée $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$.

Action d'un monoïde

Une *action* (à gauche) d'un monoïde (M, μ, η) dans une catégorie monoïdale $\mathcal{C}$ sur un objet A de $\mathcal{C}$ est un morphisme $\nu : M \otimes A \to A$ tel que les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{tikzcd}
(M \otimes M) \otimes A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\mu"'] & M \otimes (M \otimes A) \arrow[r, "\nu"] & M \otimes A \arrow[d, "\nu"] \\
M \otimes A \arrow[rr, "\nu"'] & & A
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
I \otimes A \arrow[r, "\eta\otimes 1"] \arrow[dr, "\lambda"'] & M \otimes A \arrow[d, "\nu"] \\
& A
\end{tikzcd}$$

Une coaction (à droite) dans $\mathcal{C}$ est une action (à gauche) dans $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$.

Algèbre bilinéaire dans une catégorie monoïdale rigide

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie monoïdale rigide, T un objet inversible (i.e. $T \otimes \cdot$ est une équivalence).

Une *forme bilinéaire* sur un objet V à valeur dans T est la donnée d'un morphisme $\phi : V \otimes V \to T$.

Cette donnée équivaut à celle de $\phi^{\sim}$ (resp. ${}^{\sim}\phi$) dans $\mathrm{Hom}(V, V^{\vee} \otimes T)$ définie par $\phi^{\sim}(x)(y) = \phi(x \otimes y)$ (resp. ${}^{\sim}\phi(x)(y) = \phi(y \otimes x)$).

La forme bilinéaire ϕ est dite *non dégénérée* si $\phi^{\sim}$ (de manière équivalente ${}^{\sim}\phi$) est un isomorphisme. On définit alors sa *parité* comme l'isomorphisme de V : $\epsilon_\phi = {}^{\sim}\phi^{-1} \circ \phi^{\sim}$.

Une forme bilinéaire non dégénérée ϕ définit des bijections $\mathrm{End}(V) \rightrightarrows \mathrm{Hom}(V \otimes V \to T)$ par $u \mapsto \phi \circ (u \otimes \mathrm{id})$ (resp. $u \mapsto \phi \circ (\mathrm{id} \otimes u)$), on en déduit une involution $\mathrm{End}\, V \to \mathrm{End}\, V$ notée $u \mapsto u^{\phi}$.

Formes de Weil

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie tannakienne neutre sur k, $k \subset \mathbb{R}$.

Une forme bilinéaire non dégénérée $\phi : V \otimes V \to T$ est une *forme de Weil* si

1. $\epsilon_\phi \in Z(\mathrm{End}(V))$,
2. $\forall u \in \mathrm{End}\, V \quad (u \neq 0 \implies \mathrm{tr}(uu^{\phi}) > 0)$.

Deux formes de Weil $\phi : V \otimes V \to T$ et $\psi : W \otimes W \to T$ sont dites *compatibles* si $\phi \oplus \psi$ est une forme de Weil.

Ceci définit une relation d'équivalence sur les formes de Weil de parité fixée.

Cofin

Soient $\mathcal{I}$, $\mathcal{C}$ deux catégories, $F : \mathcal{I}^{op} \times \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ un foncteur de variance mixte.

1. Un *bout (wedge)* de F à un objet C de $\mathcal{C}$ est une collection de flèches $\alpha_I : F(I,I) \to C$ dans $\mathcal{C}$ *dinaturelle* au sens que pour tout flèche $I \to J$ dans $\mathcal{I}$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} & F(I,I) \arrow[dr, "\alpha_I"] & \\ F(J,I) \arrow[ur, "F(f{,}1)"] \arrow[dr, "F(1{,}f)"'] & & C \\ & F(J,J) \arrow[ur, "\alpha_J"'] & \end{tikzcd}$$

2. Si un bout universel existe, on le note $\int^I F(I,I)$.

Bibliographie

1. Joyal, André ; Street, Ross
   An introduction to Tannaka duality and quantum groups. Category theory (Como, 1990), 413–492, Lecture Notes in Math., 1488, Springer, Berlin, 1991.
2. Mac Lane, Saunders
   Categories for the working mathematician. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 5. Springer-Verlag, New York, 1998.
3. Schauenburg, Peter
   Tannaka duality for arbitrary Hopf algebras. Algebra Berichte [Algebra Reports], 66. Verlag Reinhard Fischer, Munich, 1992.