Arivaf, rencontre no. 4
Cohomologie ℓ-adique

Organisateurs : S. Brochard, M. Romagny

1 Objectifs et méthode

Ce groupe de travail est le second d'une série de trois groupes de travail tendus vers un même objectif : tenter de comprendre, du moins dans les grandes lignes, la preuve par Deligne des conjectures de Weil. Le premier de la série, « Arivaf 2 », qui a eu lieu fin mai 2011 à Paris, traitait de la cohomologie étale. Si les conjectures de Weil servent toujours ici de guide et de motivation, les exposés consacrés à l'esquisse de leur preuve sont reportés à la rencontre Arivaf 5, qui aura lieu aux alentours du dernier trimestre 2012. Le début de la présente rencontre est consacré à la définition de la cohomologie ℓ-adique et à quelques-unes de ses propriétés fondamentales. Les derniers exposés sont consacrés à son utilisation par Deligne et Lusztig en théorie des représentations des groupes finis, à travers l'exemple élémentaire du groupe $SL_2(\mathbb{F}_q)$. En effet, comme indiqué dans la préface de [Bonnafé], cet exemple est assez simple pour que l'on puisse le décrire complètement, mais assez riche cependant pour laisser entrevoir certains des aspects les plus délicats de la théorie générale. Cette application, moins ambitieuse que la preuve des conjectures de Weil, sert donc en quelque sorte de « guide intermédiaire » pour ce groupe de travail.

Les références principales sont [SGA4.5] pour la cohomologie ℓ-adique et [Bonnafé] pour les applications en théorie des groupes.

2 Prérequis

Il est souhaitable d'avoir une assez bonne connaissance de la cohomologie étale, par exemple d'avoir suivi le groupe de travail Arivaf 2 qui y était consacré.

3 Planning

Dates : les 26 et 27 mars 2012

Lieu : Salle des conférences, Bordeaux - IMB.

Programme :

Lundi 26 mars	09h30	1. Faisceaux ℓ-adiques (1h30)
	11h00	☕ **Pause café**
	11h30	2. Catégories dérivées (1h)
	12h30	**Déjeuner**
	14h00	3. La cohomologie ℓ-adique est une cohomologie de Weil (1h30)
	15h30	☕ **Pause café**
	16h00	4. Formule des traces I (1h30)
	17h30	Discussions ANR
Mardi 27 mars	09h00	5. Comparaison cohomologie de Betti / cohomologie ℓ-adique (1h)
	10h10	6. Autres propriétés de la cohomologie ℓ-adique (1h)
	11h10	☕ **Pause café**
	11h40	7. Représentations des groupes finis : une introduction (45 min.)
	12h30	**Déjeuner**
	14h00	8. Caractères de $SL_2(\mathbb{F}_q)$ (1h30)
	15h30	☕ **Pause café**
	16h00	9. Compléments : représentations modulaires (45 min.)

Orateurs :

1. Dajano Tossici
2. Sylvain Maugeais
3. Anna Cadoret
4. Cédric Ppin
5. Sylvain Brochard
6. Matthieu Romagny
7. Cédric Bonnafé
8. Jilong Tong
9. Cédric Bonnafé

4 Résumés des exposés

LUNDI 26 MARS

1. Faisceaux ℓ-adiques (1h30)
- faisceaux ℓ-adiques, constants tordus, constructibles, localement libres,
- faisceaux de $\mathbb{Q}_\ell$-espaces vectoriels,
- définition de la cohomologie ℓ-adique,
- nombres de Betti et caractéristique d'Euler-Poincaré ℓ-adiques.

2. Introduction aux catégories dérivées (1h)

3. La cohomologie ℓ-adique est une cohomologie de Weil (1h30) On rappellera les trois attributs principaux qui font de la cohomologie ℓ-adique une cohomologie de Weil : dualité de Poincaré, formule de Künneth et application cycle (cf points A, B et C dans [Kleiman]).
- énoncé du théorème de dualité de Poincaré,
- formule de Künneth, avec preuve en cohomologie étale (Milne, VI.8). On admettra le passage à la limite qui donne le résultat en cohomologie ℓ-adique.
- construction de l'application cycle algébrique via les classes de Chern. Propriétés : fonctorialité, multiplicativité, non-trivialité (cf [Kleiman]).

4. Formule des traces I (1h30)
- Endomorphisme de Frobenius et correspondance de Frobenius induite pour un faisceau étale sur un $\mathbb{F}_q$-schéma. ([Rapport], paragraphe 1)
- Enoncé de la formule des traces ([Rapport], Thm 3.2 ou [Jav], thm 1.2)

– Signaler (sans preuve) que cette formule des traces a pour conséquence "facile" la rationnalité des fonctions L de Grothendieck. La preuve sera faite dans Arivaf 5 (si le cœur nous en dit).
– Preuve dans le cas particulier $\dim X = 0$. ([Rapport], Thm 5.1 ou [Jav], Ex. 1.3)
– Cas particulier $F = \mathbb{Q}_\ell$, alors on tombe sur le théorème du point fixe de Lefschetz pour le morphisme $f = \mathrm{Frob}$.
– Démontrer le théorème du point fixe de Lefschetz (pour f quelconque), de manière "formelle", c'est-à-dire à partir des axiomes d'une cohomologie de Weil. ([Cycle], 3.7)
– Donner l'idée de la preuve originale de Weil quand X est une courbe (voir [Rapport] thm 5.3, [Lang] VI paragraphe 3 thm 6 et VII paragraphe 1 thm 3, voir aussi la remarque 1.37 dans [Jav]).
– Exemples faciles : calcul de $|\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)|$ et de $|\mathbb{G}_m(\mathbb{F}_q)|$ ([Bonnafé] A.3.1 et A.3.2), union de deux droites ([Jav] exemples 1.34 et 1.36).

MARDI 27 MARS

5. Comparaison entre la cohomologie de Betti et la cohomologie ℓ-adique (1h) Il s'agit de démontrer, dans les grandes lignes, ledit théorème de comparaison. Les références principales sont [Milne] III, paragraphe 3, thm 3.12 et [SGA 4], exposé XI.

6. Autres propriétés (1h) On donnera notamment des preuves, ou des esquisses de preuves, des propriétés de la cohomologie ℓ-adique nécessaires aux exposés sur les groupes, et non évoquées dans l'exposé 3. Tout le matériel nécessaire est rassemblé en quatre pages (sans preuves) dans l'appendice A du livre [Bonnafé]. Pour les preuves, le livre renvoie à [SGA4.5].

7. Représentations des groupes finis : une introduction, par C. Bonnafé (45 min.) Je présenterai quelques problèmes généraux en théorie des représentations des groupes finis, leur incarnation pour les groupes de matrices sur un corps fini, et les tentatives de résolution de ces problèmes.

8. Caractères de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ (1h30) Il s'agit de montrer, sur l'exemple de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$, comment l'étude de la cohomologie de la courbe $xy^q - yx^q = 1$ permet de compléter la classification des caractères irréductibles de $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$. On utilise pour cela les propriétés classiques de la cohomologie sur $\mathbb{Q}_\ell$: quotient par un groupe fini, suite exacte ouvert-fermé, actions de tores... On suivra [Bonnafé], paragraphes 2.1 à 2.4 et paragraphe 4. L'orateur est chaleureusement invité à contacter Cédric Bonnafé pour préparer son exposé, se coordonner avec lui, poser des questions, etc.

9. Compléments : représentations modulaires, par C. Bonnafé (45 min.) J'expliquerai sommairement comment la cohomologie sur $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$, ou sur $\mathbb{Z}_\ell$, permet de construire des équivalences de catégories dérivées entre représentations de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ et certains de ses sous-groupes.

Bibliographie

[Bonnafé] Bonnafé, Representations of $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$

[Cycle] La classe de cohomologie associée à un cycle, dans SGA4.5

[Jav] A. Javanpeykar, *The generalized Lefschetz trace formula*, notes disponibles sur

`http://perso.ens-lyon.fr/frederic.deglise/riemann.html`

[Kleiman] Kleiman, *Algebraic cycles and the Weil conjectures*, dans Dix exposés sur la cohomologie des schemas

[Lang] Lang, Abelian varieties

[Milne] Milne, *Étale cohomology*

[Rapport] Rapport sur la formule des traces, dans SGA4.5

[T] Tamme, *Introduction to etale cohomology*

[SGA4.5] SGA 4 1/2, *Cohomologie étale*, LNM 569.

[Weil II] Deligne, la conjecture de Weil II.