

SOUS-GROUPES DE GL_2 ET ARBRES

JOËL BELLAÏCHE AND GAËTAN CHENEVIER

RÉSUMÉ. In this paper, we characterize the subsets of the Bruhat-Tits tree of PGL_2 that are the sets of fixed point of a subgroup of GL_2 . Those are the “strips” in the tree. We also evaluate the form of the strip fixed by a given subgroup in terms of algebraic invariants of this subgroup, which allows us to give a new generalization of Ribet’s lemma

1. INTRODUCTION

Dans tout l’article¹ on fixe un anneau de valuation discrete complet (A, m, k) , K son corps de fractions, et π une uniformisante de A .

Soit G un groupe, et ρ une représentation $\rho : G \rightarrow GL_n(K)$, que nous supposons dans cette introduction, pour simplifier la discussion, d’image bornée. Cette représentation induit une action par automorphismes sur l’immeuble de Bruhat-Tis \mathcal{X} de $PGL_n(K)$. Soit $C(\rho)$ l’ensemble des points fixes de \mathcal{X} sous cette action : c’est ce que Bruhat et Tits appellent une partie “close” de l’immeuble, et que nous appelons le *clos* de ρ . Lorsque G est un sous-groupe de $GL_n(K)$ et ρ est l’injection canonique, on écrit parfois $C(G)$ au lieu de $C(\rho)$. En général, on a $C(\rho) = C(\rho(G))$.

On sait qu’il est possible d’établir un dictionnaire simple entre des propriétés algébriques de la représentation ρ et des propriétés géométriques de l’ensemble $C(\rho)$. Pour n’en donner ici qu’un exemple, ρ est irréductible si et seulement si $C(\rho)$ est borné. Des fragments de ce dictionnaire se trouvent dans Serre ([S]) pour le cas $d = 2$ et dans [B] et [BG] pour le cas général. Ce dictionnaire permet, entre autres, suivant une idée de Serre, de donner une preuve conceptuelle et simple du fameux “lemme de Ribet” (affirmant l’existence d’un réseau stable de réduction mod π indécomposable quand ρ est irréductible et $d = 2$, cf. [R]) et d’en donner la généralisation optimale pour d quelconque ([B] et [BG]).

Cependant, pour obtenir des résultats plus fins concernant en particulier la construction de réseaux stables sous ρ ayant des propriétés désirées modulo π^n , et non seulement modulo π , il apparaît nécessaire de savoir quelles sont les parties closes de \mathcal{X} qui peuvent apparaître comme clos $C(\rho)$ d’une représentation, autrement dit, quelle est l’image de l’application C . Ceci n’est d’ailleurs pas la seule raison de s’intéresser aux ensembles $C(\rho)$. Par exemple les sommets de cet ensemble paramètrent les A -réseaux de K^n stable par ρ à homothétie près, et il peut être intéressant de compter le nombre de tels réseaux quand celui-ci est fini (e.g. quand K est localement compact et ρ irréductible). De tels

¹Lors de la fin de la rédaction de cet article, le premier auteur a bénéficié d’un NSF grant (DMS 05-01023).

dénombrement semblent par exemple être utile lors de la comparaison des correspondances de Langlands p -adique et modulo p . Par ailleurs, le calcul de certaines intégrales orbitales apparaissant dans la théorie de la formule des trace se ramènent au dénombrement d'un $C(G)$.

Dans cet article, nous résolvons ce problème pour $d = 2$; autrement dit, nous déterminons complètement les parties de l'arbre de Bruhat-Tits de $\mathrm{PGL}_2(K)$ qui sont de la forme $C(\rho)$ pour un certain ρ . Il revient évidemment au même de déterminer les ensembles de la forme $C(G)$, où G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(K)$. Le résultat est très simple : ceux des ensembles de la forme $C(G)$ qui sont bornés (c'est le cas le plus délicat, cf. théorème ??, ainsi que la proposition ?? pour le cas général) sont exactement les *bandes* bornées, i.e. les ensembles de points à distance majorée par une *épaisseur* entière r d'un segment géodésique. La preuve occupe la partie 3 de cette article, et repose sur des résultats préliminaires sur les arbres développés dans la partie 2. L'idée en est simple : supposant $C(G)$ borné, par des réductions on se ramène à supposer que G est engendré (topologiquement) par des éléments semi-simples réguliers, et donc que $C(G)$ est une intersection d'ensembles de la forme $C(H)$, où H est un groupe engendré par un élément semi-simple régulier. On montre d'une part que ces ensembles sont des bandes, éventuellement infinies (prop. 4), et d'autre part qu'une intersection de bandes est une bande (prop. 2).

Comme cette description de notre preuve le suggère, on utilise vraiment les propriétés de groupes de Lie de $\mathrm{GL}_2(K)$. D'ailleurs le résultat serait tout différent si l'on cherchait à déterminer les parties de la forme $C(G)$, pour G un sous-groupe du groupe des automorphismes de l'arbre \mathcal{X} ; en effet, toute partie close est de cette forme. Ceci contraste fortement avec la situation pour $d \geq 3$: dans ce cas, le groupe d'automorphisme de l'immeuble est $\mathrm{PGL}_d(K)$, et la détermination des parties de la forme $C(\rho)$ se ramène donc à un problème purement immobilier, sans théorie des groupes. La solution de ce problème (que nous ne connaissons pas) aurait bien sûr des applications analogues à celle de notre résultat. Notons à ce sujet que la détermination des ensembles de la forme $C(\rho)$, pour d quelconque, mais ρ *résiduellement sans multiplicité* a déjà été faite : ce sont exactement les parties closes contenues dans un appartement de \mathcal{X} ([BG]).

Dans la dernière partie de cette article, nous essayons de déterminer, pour une représentation irréductible ρ , la forme de la bande $C(\rho)$. Une telle bande est décrite par deux invariants : son diamètre et son épaisseur. Nous donnons des encadrements de ces invariants en fonctions de deux invariants algébriques de ρ , son lieu de réductibilité, et son "lieu de non multiplicité un". Le point le plus délicat, et le plus utile, est la minoration du diamètre de $C(\rho)$ en fonction du lieu d'irréductibilité de ρ (théorème 2). On en déduit différentes applications : une généralisation du lemme de Ribet (pour $d = 2$) permettant de construire des extensions non triviales entre caractères modulo π^n , un analogue du théorème de Lie-Kolchin, et un résultat concernant les notions "convergences en trace" et "convergence physique" généralisant (mais seulement pour $d = 2$) l'un de ceux de [BCKL].

2. L'ARBRE DE $PGL_2(K)$

2.1. **Définitions.** On renvoie à Serre ([S]) pour plus de détails sur ce qui suit.

L'arbre de $PGL_2(K)$ est le graphe (non orienté) défini de la manière suivante. L'ensemble des sommets $T = T(K)$ est l'ensemble des classes d'homothéties de A -réseaux dans K^2 . Deux sommets sont voisins si on peut trouver deux réseaux Λ et Λ' les représentant avec $\Lambda \subset \Lambda'$ et $\Lambda/\Lambda' \simeq k$ en tant que A -module. Il est élémentaire et bien connu que ce graphe est un arbre homogène, chaque sommet ayant exactement $|k| + 1$ voisins.

On note d la distance sur T induite par cette structure de graphe. Si x est un sommet de T , représenté par un réseau Λ , et n un entier, les points de T qui sont à distance de n de x correspondent bijectivement et canoniquement au sous- $A/\pi^n A$ -modules libres de rang un de $\Lambda/\pi^n \Lambda$.

Une *géodésique* est un ensemble de sommets $\{x_i, i \in I\}$ où I est un intervalle de \mathbb{Z} telle que $d(x_i, x_j) = |j - i|$ pour tout i, j dans I . Quand $I = \mathbb{Z}$, une telle géodésique est dite *droite* ou *appartement*. Quand $I = [a, +\infty[$ ou $]-\infty, a]$, on parle de *demi-droites* d'extrémité x_a . Quand $I = [a, b]$, on parle de segment d'extrémités x_a et x_b .

On dit que deux demi-droites sont *cofinales* si leur intersection est infinie. Il revient au même de demander que cette intersection est une demi-droite. La cofinalité est une relation d'équivalence, donc les classes s'appellent les *bouts* de l'arbre. Les bouts de T sont en bijection naturelle (donné par le stabilisateur) avec les sous-groupes de Borel de $PGL_2(K)$ (ou de $GL_2(K)$), ou si l'on veut avec les K -droites dans K^2 . Les droites de T correspondent bijectivement aux sous-groupes de Levi de $PGL_2(K)$ (ou de $GL_2(K)$), ou si l'on veut aux décompositions de K^2 en somme directe de deux K -droites.

Comme T est un arbre, étant donnés deux points x et y dans T , il existe un segment et un seul d'extrémités x et y , et on le note $[x, y]$. On dit qu'un ensemble S est *convexe* (ou *clos*) dans T si pour tout x, y dans S , on a $[x, y] \subset S$. Un point d'un convexe S est dit *extrémal* s'il n'a qu'un seul voisin dans S , ou bien si S est réduit à ce point. La *fermeture convexe* d'un sous-ensemble de T est le plus petit convexe le contenant.

Nous utiliserons librement le résultat suivant, qui est facile en utilisant l'axiome du choix : un convexe $S \subset T$ est borné si et seulement s'il ne contient pas de demi-droites.

Comme T est un arbre, étant donnée S une partie convexe de T et x un point de S , il existe un unique point $y \in S$ tel que $d(x, y) = d(x, S) := \min_{z \in S} d(x, z)$. On l'appelle le *projeté* de x sur S .

2.2. **Demi-sommets et milieu d'un segment.** A tout couple (x, y) de sommets voisins dans T , on associe formellement un point $m_{x,y}$ qu'on imagine au milieu de l'arête $[x, y]$. Si DT désigne l'ensemble de tous les sommets ou demi-sommets, on définit une distance (encore noté d) sur DT prolongeant celle de T en posant pour x, y, z, t dans T :

$$d(m_{x,y}, z) := \min(d(x, z), d(y, z)) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(d(x, z) + d(y, z))$$

puis

$$d(m_{x,y}, m_{z,t}) = \min(d(m_{x,y}, z), d(m_{x,y}, t)) + \frac{1}{2}.$$

La distance $2d$ sur DT est à valeurs entières, et on se convainc aisément que c'est la distance attachée à une (unique) structure de graphe sur DT , qui fait de DT un arbre bi-homogène : les points de $DT - T$ ont valence 2 (le point $m_{x,y}$ a pour voisins x et y), et les points de T ont valence $|k| + 1 > 2$.

Si x et y sont dans T , il existe un point et un seul m dans DT tel que $d(x, m) = d(m, y) = \frac{d(x,y)}{2}$. On l'appelle *milieu* du segment $[x, y]$. Le milieu de $[x, y]$ est dans T si et seulement si $d(x, y)$ est pair.

Remarque 1. Cette construction d'un arbre bi-homogène DT à partir d'un arbre homogène T est standard.

2.3. Boules. Si $m \in DT$, et r est un réel, on appelle *boule* de centre m et de rayon r et on note $B(m, r)$ l'ensemble des sommets x de T tels que $d(x, m) \leq r$. Une boule ne change pas si l'on remplace r par sa partie entière si m est dans T , et par l'entier le plus proche (en arrondissant au supérieur), si m est dans $DT - T$. Ainsi, toute boule peut être définie avec un rayon entier. Une boule de

rayon négatif est vide. Il est facile de voir que le centre d'une boule non vide est bien déterminé, et que son rayon l'est aussi dès lors qu'on lui impose d'être entier.

Si $[x, y]$ est un segment de T , on appelle *boule de diamètre* $[x, y]$ la boule de centre le milieu de (x, y) et de rayon $d(x, y)/2$.

2.4. Bandes.

Définition 1. Si S est une géodésique de T , et r un entier, la bande de *nerf* S et de rayon r est l'ensemble des x dans T tel que $d(x, S) \leq r$.

Remarque 2. - Il est facile de voir que le nerf et le rayon d'une bande sont bien déterminés. (Si C est une bande, pour $r \geq 0$, soit $N(r)$ l'ensemble des $x \in C$ tels que $B(x, r) \subset C$; il est clair que le rayon de la bande est le plus petit r tel que $N(r)$ est non vide et que ce $N(r)$ en est le nerf.)

- Une bande est bornée si et seulement si son nerf S est fini.

Exemples 1. Une droite, une demi-droite, un segment sont des bandes (de rayon 0). Une boule est une bande. Plus précisément, la boule $B(m, r)$ est la bande de nerf $\{m\}$ et de rayon r si m est dans T , et la bande de nerf $[x, y]$ et de rayon $r - 1$ si $m = m_{x,y}$ est dans $DT - T$

Proposition 1. *Une intersection de deux bandes est une bande.*

Démonstration — Soient $B(S, r)$ et $B(S', r')$ deux bandes, I leur intersection. On note Z la fermeture convexe de $S \cup S'$. Si z est dans Z , on pose

$$n_z := \min(r - d(z, S), r' - d(z, S')).$$

Nous affirmons d'abord que I est la réunion des boules de centre z dans Z et de rayon n_z :

$$(1) \quad I = \bigcup_{z \in Z} B(z, n_z).$$

En effet, soit x dans $B(z, n_z)$; comme $d(z, S) \leq r - n_z$, $d(x, S) \leq r$ par l'inégalité triangulaire, et donc $x \in B(S, r)$; par symétrie, $x \in B(S', r')$ et donc $x \in I$. Réciproquement, comme S est un segment du convexe Z , pour tout x sommet de l'arbre on a $d(x, S) = d(x, z) + d(z, S)$, où z est le projeté de x sur Z . Si x est dans I , on a $d(x, S) \leq r$, donc $d(x, z) \leq r - d(z, S)$, et de même $d(x, z) \leq r' - d(z, S')$. Donc $d(x, z) \leq n_z$, et $x \in B(z, n_z)$. Ceci prouve (1).

Soit N l'ensemble des z dans Z tels que n_z est maximal (c'est un ensemble non vide puisque n_z est majoré par $\min(r, r')$). Nous allons montrer que I est la bande de nerf N et de rayon n_t pour (n'importe quel) t dans N .

Il y a lieu de distinguer deux cas :

(a) Cas où $S \cap S' = \emptyset$

Dans ce cas on note X le segment réalisant la distance minimale de S à S' , de sorte que $Z = S \cup S' \cup X$. on note d la longueur de X . On distingue trois sous-cas (non exclusif a priori) :

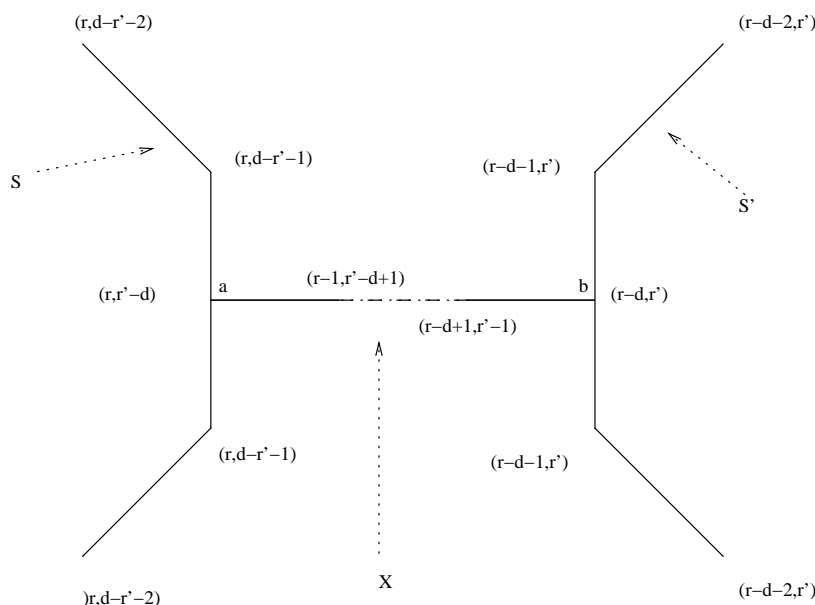


FIG. 1. Cas $S \cap S' = \emptyset$

(i) Sous-cas où N rencontre S .

Notons a l'intersection de X avec S . Soit t un point de $N \cap S$. Pour z dans S , on a $n_z = \min(r, r' - d(z, S'))$, donc les points z de S plus proches de a (ou, ce qui revient au même, de S') que t sont aussi dans N . Il vient donc que $N \cap S$ est un segment centré en a .

Par ailleurs, on a $r \leq r' - d$ (puisque $n_a = \min(r, r' - d) \geq n_{a'} = \min(r - 1, r' - d + 1)$ où a' est le voisin de a dans X), et donc et

$$n_a = r = n_t$$

pour tout t dans $N \cap S$.

Nous allons voir que pour tout $z \in Z$, $B(z, n_z)$ est contenu dans un $B(t, n_t)$ pour un certain t dans N . En effet, c'est tautologique pour $z \in N$. Pour $z \in S - (N \cap S)$, on a $n_z \leq n_a - d(z, t)$, d'où il vient que $B(z, n_z) \subset B(t, n_t) = B(t, r)$ pour t le projeté de z sur N . Finalement, pour $z \in Z - S$, si l'on pose $l := d(z, a) > 0$, on a $n_z \leq n_a - l = r - l$, de sorte que pour un tel z , $B(z, n_z)$ est inclus dans $B(a, n_a)$.

Notons au passage que pour $z \in Z - S$, $n_z < n_a$, et donc $z \notin N$, si bien que $N \cap S$ est un segment centré en a .

Ainsi, I est la réunion des $B(t, n_t) = B(t, r)$ pour t dans le segment N . C'est donc la bande de nerf N et de rayon r .

(ii) Sous-cas où N rencontre S' : ce sous-cas est symétrique du précédent.

(iii) il ne reste donc que le sous-cas N ne rencontre ni S ni S' .

On a donc $N \subset X - \{a, b\}$, où a désigne l'intersection de X avec S et b celle de X avec S' . Il est clair que la fonction n_z , quand z va de a à b le long de X croit d'abord puis décroît, et donc que N est réduit soit à un sommet t , soit à une arête (t, t') dans $X - \{a, b\}$. On en déduit facilement, en raisonnant comme en (i), que I est la bande de nerf N et de rayon $n_t (= n_{t'})$.

(b) Cas où $S \cap S'$ est non vide.

On note Y l'intersection de S et S' , c'est une géodésique.

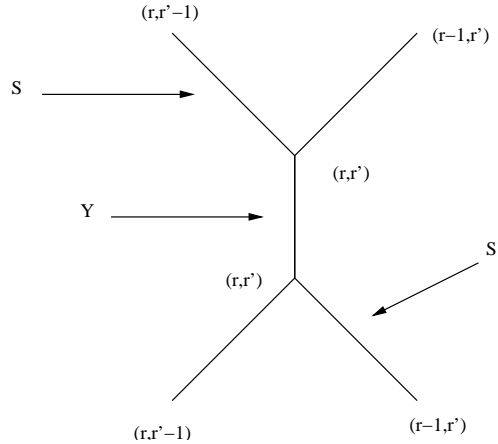


FIG. 2. Cas $S \cap S' = Y \neq \emptyset$

Si z est dans Y , $n_z = \min(r, r')$; donc $Y \subset N$.

Supposons par exemple $r \leq r'$. On voit que si z est dans S' à distance l de Y , alors $n_z \leq r - l$. Si z n'est pas dans Y , i.e. $l > 0$, $n_z < r$ et z n'est pas dans N . Autrement

dit $N \subset S$. De plus, pour un tel z , $B(z, n_z)$ est inclu dans $B(y, n_y) = B(y, r)$ pour y le projeté de z sur Y .

On est donc ramené à $I = \cup_{z \in S} B(z, n_z)$, mais comme pour $z \in S$, on voit aisément que $n_z = r - d(z, N)$, on en déduit que N est une géodésique de S , et que I est la bande $B(N, r)$. □

On peut renforcer ce résultat :

Proposition 2. *Une intersection quelconque de bandes est une bande.*

Démonstration — Par le lemme de Zorn et la proposition précédente, on est ramené à traiter le cas d'une intersection décroissante. Il résulte de la remarque 2 que si deux bandes B et B' de rayons r et r' vérifient $B \cap B'$, on a $r \leq r'$ et en cas d'égalité, le nerf de B est inclus dans le nerf de B' . Par la proposition précédente, on est donc ramené à traiter le cas d'une intersection de bande de même rayon r et de nerf décroissants. Il est clair que le résultat est la bande de rayon r et de nerf l'intersection des nerfs, qui est bien une géodésique. □

2.5. Sapins de Noël.

Définition 2. Si D est une demi-droite d'extrémité a , on appellera *sapin de Noël* de D la réunion $SN(D)$ des boules de centre $x \in D$ et de rayon $d(x, a)$.

Notons que $D \subset SN(D)$. Cependant $SN(D)$ ne détermine pas D :

Lemme 1. (i) *Toute demi-droite contenue dans $SN(D)$ est cofinale à D .*

(ii) *Si D et D' sont deux demi-droites, on a $SN(D) = SN(D')$ si et seulement si D et D' sont cofinales, et, si a, a' et b désignent les extrémités respectives des demi-droites D, D' et $D \cap D'$, on a $d(a, b) = d(a', b)$.*

Démonstration — Si $D' = \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ n'est pas cofinal à D , la projection $p(x_i)$ de x_i sur D est constante pour i assez grand. Comme $d(x_i, p(x_i)) \rightarrow \infty$ quand $i \rightarrow \infty$, il existe i telle que $d(x_i, p(x_i)) \geq d(p(x_i), a)$ où a est l'extrémité de D . Donc $D' \not\subset SN(D)$. Ceci prouve (i).

Si $SN(D) = SN(D')$, alors $D' \subset SN(D)$ donc D' et D sont cofinale par (i). Avec les notations de l'énoncé, on a, puisque $a \in SN(D')$, et que b est le projeté de a sur D' , $d(a, b) \leq d(a', b)$. Par symétrie, on a donc $d(a, b) = d(a', b)$. La réciproque est évidente. □

Lemme 2. *Si un sapin de Noël contient deux sommets a et b , la boule de diamètre $[a, b]$ est contenue dans le sapin.*

Démonstration — C'est clair, car un Sapin de Noël est par définition une union *croissante* de boules, et la propriété à montrer est évidente pour une boule. □

Lemme 3. *Si S est un sous-ensemble de T telle que pour tout a, b dans S , S contienne la boule de diamètre $[a, b]$, alors S est soit une boule, soit un sapin de Noël, soit tout l'arbre.*

Démonstration — Comme la boule de diamètre $[a, b]$ contient $[a, b]$, l'hypothèse implique en particulier que S est convexe.

Soit n le nombre de bouts qui ont au moins un représentant (i.e. une demi-droite) contenu dans S .

Si $n = 0$, alors S est borné. Soit a, b dans S tel que $d(a, b)$ soit maximal. S contient la boule de diamètre $[a, b]$ par hypothèse, et est contenu dans cette boule par maximalité. C'est donc une boule.

Si $n = 1$, il existe une demi-droite $D \subset S$ maximale (sinon, la réunion strictement croissante d'une famille infinie de demi-droite serait une droite contenue dans S , et S contiendrait aux moins deux bouts). Notons $D = \{x_i, i \in \mathbb{N}\}$ avec $x_0 = a$ et $d(x_i, a) = i$. On a $SN(D) \subset S$ car la boule de centre x_i et de rayon $d(x_i, a) = i$ n'est autre que la boule de diamètre $[x_0, x_{2i}]$. Montrons l'autre inclusion. Soit x dans S , x_i son projeté sur D , et posons $d = d(x, x_i)$. Par hypothèse, S contient la boule de diamètre $[x, x_{i+d}]$ qui n'est autre que la boule de centre x_i et de rayon d . Par maximalité de D , S ne contient qu'un seul voisin de $a = x_0$ (à savoir x_1), donc $d(x_i, a) \geq d = d(x_i, x)$: on a donc $x \in SN(D)$. On a prouvé $S = SN(D)$.

Si $n = 2$, comme S est convexe, il contient une droite, et on en déduit aisément que $S = T$. \square

3. CLOS DES SOUS-GROUPES DE $GL_2(K)$

3.1. Définition et première propriétés. Pour G un sous-groupe de $GL_2(K)$, on note $C(G)$ l'ensemble des sommets de l'arbre T de $PGL_2(K)$ qui sont fixes par G : on l'appelle le *clos* de G . C'est une partie convexe de T , et nous allons chercher à la caractériser parmi les parties convexes de T .

Lemme 4. *Si $C(G)$ est non vide, $C(G)$ est borné si et seulement si G agit irréductiblement sur K^2 .*

Démonstration —

Comme $C(G)$ est convexe, il est borné si, et seulement si, il ne contient pas de demi-droite. Par ailleurs, comme il est non vide, $C(G)$ contient (un représentant) d'un bout b si, et seulement si, G est contenu dans le Borel correspondant à ce bout. Ces deux équivalences donnent le lemme. \square

Un cas important dans les applications est celui où G est borné :

Proposition 3. *Supposons que G est un sous-groupe borné de $GL_2(K)$. Alors :*

(a) *$C(G)$ est non vide, et tout réseau Λ représentant un sommet x de $C(G)$ est stable par G .*

- (b) Pour tout $x \in C(G)$, Λ représentant x , et $n \geq 0$ les sous- $A/\pi^n A$ -modules libres de $\Lambda/\pi^n \Lambda$ stables par G sont en bijection canoniques avec les points de $C(G)$ à distance n de x . Pour $m \leq n$, l'image d'un sous- $A/\pi^n A$ -module libre et facteur direct, correspondant à un sommet y de l'arbre, dans $\Lambda/\pi^m \Lambda$ correspond à l'unique point de $[x, y]$ à distance m de x .
- (c) En particulier, pour tout $x \in C(G)$, Λ représentant x , les droites stables par la représentation de dimension 2, notée $\bar{\rho}_x$, de G sur le k -espace vectoriel $\Lambda/\pi \Lambda$ sont en bijections avec les voisins de x dans $C(G)$.
- (d) Pour $x \in C(G)$, on a les équivalences suivantes
- (i) $\bar{\rho}_x$ irréductible si, et seulement si, x n'a pas de voisins dans $C(G)$ si, et seulement si, $C(G) = \{x\}$.
 - (ii) $\bar{\rho}_x$ réductible mais indécomposable si, et seulement si, x a exactement un voisin dans $C(G)$ (i.e. x est un point extrémal).
 - (iii) $\bar{\rho}_x$ est décomposable, somme de deux caractères distincts si, et seulement si, x a exactement deux voisins dans $C(G)$.
 - (iv) $\bar{\rho}_x$ est décomposable, somme de deux caractères égaux si, et seulement si, tous les voisins de x dans T sont dans $C(G)$.

Démonstration — C'est un exercice facile. □

Lemme 5. (a) Si $H \subset G$, alors $C(G) \subset C(H)$.

(b) Si $C(\langle \{G_i\}_i \rangle) = \bigcap_i C(G_i)$.

(c) Si $C(G)$ est borné, il existe un sous-groupe ouvert G' de $GL_2(K)$, contenant $G.Z$, tel que $C(G) = C(G')$.

Démonstration — (a) et (b) sont triviaux, prouvons (c). Soit $x \in T$ un sommet quelconque, $G_n := \langle G, \text{stab}(B(x, n)) \rangle$, $n \in \mathbb{N}$. Si n est assez grand, $B(x, n)$ contient $C(G)$, et donc $C(G_n) = C(G)$ par (b). Comme $\text{stab}(B(x, n))$ est ouvert, G_n l'est aussi. □

Lemme 6. Si $C(G)$ est borné, $C(G)$ est une intersection de $C(\langle x \rangle)$, où $x \in G$ est un élément semi-simple régulier de $GL_2(K)$. Si K est localement compact, on peut supposer que cette intersection est finie.

Démonstration — Les éléments semi-simples réguliers de $GL_2(K)$ sont denses par un argument classique. On peut supposer que G est ouvert et contient un groupe de congruence $G(N)$ assez petit ayant un clos contenant $C(G)$. L'ensemble G^{sr} rencontre donc chaque $G(N)$ -classe à droite de G , que l'on peut écrire $g_i G(N)$. Cela conclut par le (b) du lemme précédent car $G = \langle G(N), (g_i)_i \rangle$. □

On va étudier les clos des groupes monogènes engendrés par chacun des éléments de $GL_2(K)$.

3.2. Clos de certains éléments de $GL_2(K)$. Soit $g \in GL_2(K)$ semi-simple régulier, g est diagonalisable à valeurs propres distinctes soit dans K , soit dans une extension quadratique K' de K .

Lemme 7. *Si g est un élément de $GL_2(A)$ diagonal à valeurs propres distinctes a et b , $C(G)$ est la bande de nerf la droite définie par g et de rayon $v(a - b)$.*

Démonstration — Si x un point de l'appartement D défini par g , représenté par un réseau Λ , alors g est l'identité sur $\Lambda/\pi^r\Lambda$, de sorte que la boule de centre x de rayon r est dans T , ce qui fournit une inclusion.

Soit x un point fixe par g qui n'est pas dans D , $p(x)$ dans le projeté de x sur D , $s = d(x, p(x))$ et y, z les points de D à distance s de $p(x)$. Alors dans $\Lambda/\pi^s\Lambda$, les sommets $p(x), y$ et z définissent trois A/π^s -droites facteurs directes stables par g (prop 3(ii)), distinctes même modulo π , et l'on en déduit que g est donc homothétique modulo π^s , i.e. $a = b \pmod{\pi^s}$, et donc $s \leq r$. C'est l'autre inclusion. \square

Proposition 4. *Si g un élément semi-simple régulier de $GL_2(A)$, alors son clos est une bande. Plus précisément, c'est une bande infinie si g est diagonalisable, une boule sinon.*

Démonstration — Le cas diagonalisable a déjà été traité. Notons a et b les valeurs propres de g , $r = v(a - b) \in \frac{\mathbb{Z}}{2}$ et supposons donc que a, b sont quadratiques, $K' := K(a)$, A' son anneau d'entiers. Soit T' l'arbre de $PGL_2(K')$. On dispose d'une injection de T dans T' correspondant à l'application $\Lambda \mapsto \Lambda \otimes_A A'$. Il est clair que cette injection est une isométrie (i.e. respecte la structure de graphe) si K'/K est non ramifié, et multiplie les distances par 2 si K'/K est ramifié. Dans ce dernier cas, on peut étendre cette injection et plonger naturellement DT dans T' : si $m_{x,y}$ est un point de $DT - T$, et si Λ, Λ' représentent x et y et vérifient $\Lambda' \subset \Lambda$ et $\Lambda/\Lambda' \simeq k$ as an A -module, on envoie $m_{x,y}$ sur la classe de l'unique A' -réseau L de K'^2 tel que $\Lambda' \otimes_A A' \subset L \subset \Lambda \otimes_A A'$ et $(\Lambda \otimes_A A')/L \simeq k$ as an A' -module. On obtient ainsi une injection de DT dans T' qui envoie le double de la distance d de DT sur la distance de T' .

En résumé, on a plongé T dans le cas non-ramifié, DT dans le cas ramifié, comme un sous-arbre (en particulier convexe) de T' . Dans ce dernier cas, DT est l'ensemble des points de T' à distance (de T') au plus 1 de T .

Soit s le générateur de $\text{Gal}(K'/K)$. s agit semi-linéairement sur K'^2 , donc par automorphismes de graphes (isométries) sur T' . Si $x \in T'$ est fixe par s alors tous les réseaux correspondant à x le sont. Le lemme suivant est peut-être un cas particulier d'un résultat de Bruhat-Tits.

Notons $C'(G)$ l'ensemble des points fixe par un sous-groupe G dans T' . D'après le lemme précédent, $C'(\langle g \rangle)$ est une bande de rayon r . Son intersection avec T est $C(\langle g \rangle)$. Notons que comme $g \in GL_2(K)$, s stabilise $C'(\langle g \rangle)$ (si hgh^{-1} est dans $GL_2(A')$, alors $s(h)gs(h)^{-1}$ aussi, i.e. $h(A'^2)$ stable ssi $s(h)(A'^2)$ l'est).

Soit D le nerf de la bande $C'(\langle g \rangle)$. Par unicité du nerf, on a $s(D) = D$.

Lemme 8. *la droite D de T' contient un unique point x_0 fixe par s . Ce point est le projeté sur D de tout point de T .*

Démonstration — Comme s respecte la structure de graphe de T' , le projeté d'un point de T sur D est fixe par s , d'où l'existence d'un point fixe. L'unicité provient de ce que $s^2 = 1$, et que s ne fixe pas tout D . Par unicité, tous les points de T ont donc même projeté sur D . □

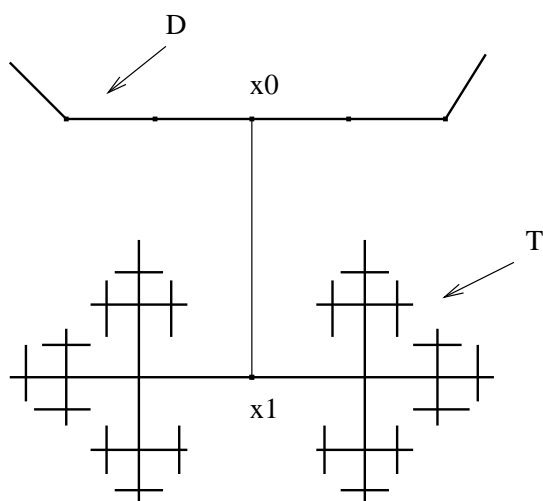


FIG. 3. L'enveloppe convexe de $D \cup T$, cas K' ramifié

Définissons x_1 comme le projeté de x sur DT . Le chemin le plus court d'un point z de T à D , est le segment $[z, x_0]$, et par définition, ce segment contient x_1 . Ainsi, $C(\langle g \rangle)$ est la boule de centre x_1 de rayon $r - d(x_1, x_0)$. Ceci termine la preuve. □

Proposition 5. *Si g est un élément unipotent de $GL_2(K)$, son clos est un sapin de Noël.*

Démonstration — Dans une certaine base e_1, e_2 , g a pour matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il est clair que $C(g)$ est le sapin de Noël définie par la demi-droite dont les sommets sont les classes des réseaux $Ae_1 + A\pi^n e_2$, $n \geq 0$. □

3.3. Clos des sous-groupes de $GL_2(K)$. Si C est une partie de T , on notera $\Gamma(C)$ le stabilisateur de la partie C dans $GL_2(K)$. On notera Z le centre de $GL_2(K)$.

Théorème 1. *Soit G un sous-groupe irréductible de $GL_2(K)$. Alors $C(G)$ est une bande bornée. Réciproquement, toute bande bornée est de la forme $C(G)$ pour G un sous-groupe irréductible de $GL_2(K)$*

Démonstration — Si G est irréductible, $C(G)$ est borné (lemme 4). C'est donc (cf. 6) une intersection de convexes de la forme $C(g)$ avec g semi-simple régulier. Ces convexes sont des bandes (cf. prop 4), et donc $C(G)$ est aussi une bande (prop. 2).

Réciproquement, soit S un segment géodésique de longueur l , r un entier, et $B = B(S, r)$. Quitte à changer de base (e_1, e_2) de K^2 , on peut supposer que les extrémités de S sont les classes des réseaux $Ae_1 \oplus Ae_2$ et $Ae_1 \oplus p^r Ae_2$. Notons $\Gamma(C)$ le stabilisateur dans $GL_2(K)$ d'une partie C de T .

Nous allons voir que

$$(2) \Gamma(B(S, r)) = Z \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z}_p), \quad a, d \in 1 + p^r \mathbb{Z}_p, \quad v(b) \geq r, \quad v(c) \geq r + s \right\},$$

de quoi il résulte facilement que $C(\Gamma(B(S, r))) = B(S, r)$ et le théorème.

Pour vérifier l'égalité ci-dessus, notons que $B(S, r) = \cup_{x \in S} B(x, r)$ d'où il découle

$$(3) \quad \Gamma(B(S, r)) = S \cap_{x \in S} \Gamma(B(x, r))$$

Soit u la matrice diagonale $(1, p)$. Si x_0 est le sommet représentant le réseau A^2 , les points de S sont les $u^i x_0$, $i = 0, \dots, l$. Or $\Gamma(B(u^i x_0, r)) = u^i Z \Gamma(B(x_0, r)) u^{-i}$. D'où

$$(4) \quad \Gamma(B(S, r)) = Z \cap_{i \in \{0, \dots, l\}} u^i \Gamma(B(x_0, r)) u^{-i}$$

On calcule aisément $\Gamma(B(x_0, r))$: c'est le sous-groupe de congruence $G_r = Z \text{Ker} (GL_2(A) \rightarrow GL_2(A/\pi^r))$, d'où le résultat. \square

Notons ce corollaire (du théorème avec sa preuve).

Corollaire 1. *Si G est un sous-groupe irréductible de $GL_2(K)$,*

$$C(\Gamma(C(G))) = C(G).$$

Démonstration — En effet, $C(G) = B(S, r)$ pour un certain segment S , et l'on a vu que $C(\Gamma(B(S, r))) = B(S, r)$. \square

Notons également :

Proposition 6. *Si G est un sous-groupe irréductible de $GL_2(K)$ dont l'adhérence est engendrée (topologiquement) par ses éléments unipotents, $C(G)$ est une boule.*

Démonstration — En effet, $C(G)$ est intersection de convexes de la forme $C(g)$ pour g unipotent (lemme 6), qui sont des sapins de Noël (prop. 5). En conséquence, d'après $C(G)$ vérifie la propriété que pour tout a, b dans $C(G)$ la boule de diamètre $[a, b]$ est contenue dans $C(G)$ (lemme 2). D'après le lemme 3, et comme $C(G)$ est borné d'après le lemme 4, c'est une boule. \square

Pour être complet, déterminons aussi le clos d'un sous-groupe réductible.

Proposition 7. *Soit G un sous-groupe réductible de $GL_2(K)$: la représentation naturelle ρ de G est somme de deux caractères χ_1 et $\chi_2 : G \rightarrow K^*$. Si $C(G)$ est non vide, alors :*

- (a) *Si ρ est semi-simple et $\chi_1 = \chi_2$, on a $C(G) = T$.*
- (b) *Si ρ est semi-simple et $\chi_1 = \chi_2$, $C(G)$ est une bande de nerf la droite correspondant à l'unique Levi contenant G .*
- (c) *Si ρ est non semi-simple et $\chi_1 = \chi_2$, $C(G)$ est un sapin de Noël $SN(D)$ où D définit le bout de T coorespondant à l'unique Borel contenant G .*
- (d) *Si ρ est non semi-simple et $\chi_1 \neq \chi_2$, $C(G)$ est l'intersection d'un Sapin de Noël $SN(D)$ et d'une bande de nerf D ,*

Démonstration — Dans le cas (a), G est dans le centre de $GL_2(K)$, donc le résultat est clair. La preuve de (b) se fait comme celle de la prop 5, celle de (c) comme celle du lemme 7, et (d) résulte de (b) et (c) puisque G peut s'écrire comme le produit de son sous-groupe unipotent maximal et d'un groupe diagonalisable. \square

4. ESTIMATION DES INVARIANTS DU CLOS

Dans toute cette section on fixe un sous-groupe borné irréductible G de $GL_2(K)$. Notons ρ l'injection canonique de G dans $GL_2(K)$ que nous voyons comme une représentation de G .

4.1. **Les invariants $n(G)$ et $m(G)$.** Considérons le plus grand entier :

(a) $n(G)$ tel qu'il existe deux caractères continus $\chi_i : G \rightarrow (A/\pi^n)^*$ satisfaisant

$$\forall g \in G, \quad \det(X - g) = (X - \chi_1(g))(X - \chi_2(g)) \pmod{\pi^{n(G)}},$$

(b) $m(G)$ tel qu'il existe un caractère continu $\chi : G \rightarrow (A/\pi^n)^*$ satisfaisant

$$\forall g \in G, \quad \det(X - g) = (X - \chi(g))^2 \pmod{\pi^{m(G)}}.$$

Il est clair que l'on a

$$(5) \quad m(G) \leq n(G).$$

L'idéal $\pi^{n(G)}$ mérite le nom d'*idéal de réductibilité* de ρ . C'est le plus grand idéal modulo qui le polynôme caractéristique de ρ devient celui de la somme de deux caractères continus. Le nombre $m(G)$ mesure à quel point ρ est éloigné d'avoir la propriété d'être *résiduellement sans multiplicité* : cette propriété, qui est souvent une hypothèse (cf. [1],[BG],[U]) dans les travaux généralisant le lemme de Ribet, est en effet équivalente à $m(G) = 0$

Notons que $n(G)$ et $m(G)$ ne dépendent que de la classe de conjugaison de G , i.e. de la classe d'équivalence de ρ .

Remarque 3. (a) Si α et β sont deux solutions conjuguées d'une équation quadratique $X^2 + aX + b = 0$ dans A/π^n (i.e. si $\alpha + \beta = -a$ et $\alpha\beta = b$), et si m désigne le plus grand entier tel que $\alpha \equiv \beta \pmod{\pi^m}$, alors $\alpha + \gamma$ et $\beta - \gamma$ sont aussi deux solutions conjuguées dès que γ est divisible par π^i avec $i \geq \max(n - m, n/2)$. Ainsi

l'on voit, déjà dans le cas d'un groupe monogène, que les caractères χ_1 et χ_2 de la définition de $n(G)$ ne sont pas uniquement déterminés. Seule leur restriction modulo $\pi^{\lceil \max(n-m, n/2) \rceil}$ est bien déterminée.

- (b) On a $m(G) \leq n(G)/2$ ou bien $m(G) = n(G)$. En effet, si $m(G) > n(G)/2$ on a $\chi_1 = \chi_2 \pmod{p^{\lceil n(G)/2 \rceil}}$, et l'on voit aisément que $\chi := (\chi_1 + \chi_2)/2$ est aussi un caractère, et que $\det(X - g) = (X - \chi(g))^2 \pmod{\pi^{n(G)}}$ pour tout $g \in G$.
- (c) Lorsque K est un corps local d'inégale caractéristique, on peut ôter de la définition de $n(G)$ et de $m(G)$ le mot "continu". En effet, d'après un théorème de Lazard, un caractère sur un groupe de Lie p -adique est automatiquement continu.

Rappelons que $C(G)$ est une bande bornée $B(S, r)$. Une telle bande possède deux invariants : son épaisseur $r = r(G)$ et son diamètre $d = d(G) = l(S) + 2r$. Le but de cette section est de donner des encadrements de $r(G)$ et $d(G)$ en fonction de $n(G)$ et $m(G)$.

Pour cela, notons qu'on peut supposer que G est un sous-groupe ouvert. En effet, en remplaçant G par le sous-groupe engendré G' par G et un sous-groupe de congruence $G(N)$ pour N assez grand, on peut supposer que $C(G') = C(G)$ comme dans le lemme 6, mais aussi que les caractères χ_1, χ_2 et χ se prolongent à G' , et donc que $n(G) = n(G')$ et $m(G) = m(G')$.

4.2. Majoration de $d(G)$ et de $r(G)$.

Proposition 8. *On a $d(G) \leq n(G)$ et $r(G) \leq m(G)$*

Démonstration — Soit $[x, y]$ un segment de $C(G)$ de longueur $d(G)$, et Λ un réseau représentant x . L'action de G sur $\Lambda/\pi^{d(G)}\Lambda$ possède un sous- $A/\pi^{d(G)}$ -module libre stable correspondant à y , d'après la proposition 3. Autrement dit l'action de G sur $\Lambda/\pi^{d(G)}\Lambda$ se trigonalise, d'où il vient $d(G) \leq n(G)$.

Soit z un point du nerf de $C(G)$, Λ un réseau représentant z . Comme tous les points de T à distance $r(G)$ de z sont dans $C(G)$, la proposition 3 implique que tous les sous- $A/\pi^{r(G)}$ -modules libres de $\Lambda/\pi^{r(G)}\Lambda$ sont stables par l'action de G , donc que cette action est scalaire. On en déduit $r(G) \leq m(G)$. \square

4.3. Exemples.

Lemme 9. *Si $B(S, r)$ est une bande bornée, de diamètre $d = l(S) + 2r$, et $G = \Gamma(B(S, r))$, on a $n(G) = d(G) = d$ et $m(G) = r(G) = r$*

Démonstration — On sait déjà que $n(G) \leq d$ et $m(G) \leq r$ par la prop 8. Mais on voit immédiatement d'après (2) que les formules

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a \text{ resp. } d \pmod{\pi^d}$$

définissent des caractères de G , d'où $n(G) \geq d$, et aussi que ces caractères sont égaux (entre eux, et au caractère trivial) modulo π^r , d'où $m(G) \leq r$. \square

Cet exemple montre que $m(G)$ peut prendre toutes les valeurs entières comprises entre 0 et $n(G)/2$.

Lemme 10. Je ne comprends pas ce lemme Soit $n \geq 0$ un entier et $G = \Gamma_1(\pi^n)$ défini comme le groupe des matrices qui sont unipotentes supérieures mod π^n . Dans ce cas $C(G)$ est une boule de diamètre n donc une bande de diamètre $d(G) = N$ et d'épaisseur $r(G) = \lfloor n/2 \rfloor$. De plus, on a $n(G) = m(G) = n$. (ou bien $N(G) = 2n$???).

4.4. Une minoration utilisant un élément résiduellement unipotent. Soit x un point extrémal de $C(G)$. (Un tel point existe puisque $C(G)$ est borné). Soit Λ un réseau représentant x . D'après la proposition 3, la représentation $\bar{\rho}_x$ de G sur $\Lambda/\pi\Lambda$ est réductible et indécomposable. En particulier, il existe un élément u , tel que $\bar{\rho}_x(u)$ est trigonalisable, mais non diagonalisable (autrement dit, à un scalaire pres, $\bar{\rho}_x(u)$ est unipotente non triviale, d'où le titre de cette sous-section).

Lemme 11. Soit y est un point de T , distinct de x , et fixe par u . Posons $i = d(x, y)$. Alors il existe une base de Λ tel que dans la base déduite de celle-ci, l'action de u sur $\Lambda/\pi^i\Lambda$ soit donnée par la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \beta \end{pmatrix},$$

avec $\alpha, \beta \in (A/\pi^i)^*$, et telle que le A/π^i -module libre engendrée par le premier vecteur de la base corresponde au point y .

Démonstration — Le point y définit un sous- A/π^i -module libre de $\Lambda/\pi^i\Lambda$ qui est stable par G . On peut prendre un générateur de ce sous-module et le compléter en une base de $\Lambda/\pi^i\Lambda$ (un sous-module libre d'un module libre sur un anneau artinien étant toujours facteur direct), qu'on peut relever en une base de Λ . Pour cette base, l'action de u est donnée par la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \beta \end{pmatrix},$$

avec $\alpha, \beta \in (A/\pi^i)^*$. La réduction de γ modulo π est non nulle, sinon l'action de u sur $\Lambda/\pi\Lambda$ serait diagonalisable. Autrement dit, γ est inversible, et on peut donc changer le second vecteur de la base de manière à avoir $\gamma = 1$. \square

En particulier, pour $i = 1$, il existe un voisin de x fixe par u , d'où une base e_1, e_2 , pour laquelle l'action de u sur $\Lambda/\pi\Lambda$ a la forme donnée par le lemme.

Lemme 12. Il existe un point z fixe par u tel que $d(x, z) = n(G)$. De plus toute l'intersection de la boule de diamètre $[x, z]$ et de la bande de nerf $[x, z]$ et de rayon $m(G)$ (c'est une bande de nerf inclus dans $[x, z]$) est fixe par u .

Démonstration — Le vecteur e_2 est tel que $e_2, \bar{\rho}_x(u - \alpha_0)e_2$ est une base de $\Lambda/\pi\Lambda$. Par le lemme de Nakayama, appliqué à $\Lambda/\pi^{n(G)}\Lambda$ vu comme $u - \chi_2(u)$ module, le vecteur e_2

se relève en un v tel que $v, u(v) - \chi_2(u)v$ est une famille génératrice, donc une base de $\Lambda/\pi^{n(G)}\Lambda$. Notons e_2, e_1 cette base. Dans la base (e_1, e_2) , la matrice u a donc la forme

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & \chi_2(u) \end{pmatrix}.$$

En écrivant que la trace de u est $\chi_1(u) + \chi_2(u)$, il vient $a = \chi_1(u)$ dans $A/\pi^{n(G)}$. Puis, en écrivant que le déterminant de u est $\chi_1(u)\chi_2(u)$, il vient $b = 0 \in A/\pi^{n(G)}$. Ceci montre que le $A/\pi^{n(G)}$ -module libre engendré par e_1 est stable par u , d'où la première assertion vue la proposition 3.

Soit maintenant y le point de $[x, z]$ à distance i de x , $0 \leq i \leq n(G)$. Un réseau correspondant à y est $\Lambda_y := \mathcal{O}_K e_1 + \pi^i \mathcal{O}_K e_2$. Dans la base $e_1, \pi^i e_2$ de ce réseau, la matrice de u est de la forme $\begin{pmatrix} \chi_1(u) & \pi^i \\ \pi^{n(G)-i} b' & \chi_2(u) \end{pmatrix}$. On en déduit que la boule de centre y et de rayon $k(i) := \min(i, n(G) - i, m(G))$ est fixe par u , car la matrice de u modulo $\pi^{k(i)}$ est scalaire. Mais la réunion de ces boules est l'ensemble de l'énoncé. \square

Lemme 13. *Tout point y de T fixe par u tel que $d(x, y) \leq m(G)$ est fixe par tout G .*

Démonstration — Soit y un tel point et $i := d(x, y)$. Prenons une base de $\Lambda/\pi^i\Lambda$ comme dans le lemme 11. Dans cette base, écrivons la matrice d'un élément $g \in G$: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Comme $i \leq m(G)$, on a dans A/π^i ,

$$\text{tr}(g) = 2\chi(g), \text{ et } \text{tr}(gu) = 2\chi(g)\chi(u), \text{ d'où } \text{tr}(gu) = \text{tr}(g)\chi(u)$$

Par les expressions des matrices g et u , on voit que

$$\text{tr}(g) = a + d \text{ et } \text{tr}(gu) = a\chi(u) + d\chi(u) + c.$$

D'où $c = 0$, ce qui signifie que le point y est fixe par g . \square

Proposition 9. *Pour tout x point extrémal de $C(G)$, il existe une boule de diamètre $m(G)$ dans $C(G)$ contenant x .*

Démonstration — Soit z comme dans le lemme 12 et t le point de $[x, z]$ à distance $m(G)$ de x . La boule de diamètre $[x, t]$ est dans $C(G)$. En effet, cette boule est évidemment incluse dans la bande de nerf $[x, z]$ et d'épaisseur $m(G)$, ainsi que dans la boule de diamètre $[x, z]$, donc elle est fixe par u par le lemme 12. Mais comme cette boule est également contenue dans la boule de centre x et de rayon $m(G)$, elle est fixe par G par le lemme 13. \square

4.5. **Une minoration utilisant un élément diagonalisable.** Posons

$$G_i := \text{Ker}(\chi_1/\chi_2 \pmod{\pi^i}),$$

pour $0 \leq i \leq n(G)$. C'est une suite décroissante de sous-groupes fermés de G .

Lemme 14. *Soit g un élément semi-simple elliptique de G , alors $g \in G_{\lceil n/2 \rceil}$.*

Démonstration — Soit $P = (X - x)(X - s(x)) \in A[X]$ le polynôme caractéristique de g . Soit λ_i un relevé quelconque dans A de $\chi_i(g) \in A/\pi^{n(G)}$. Alors pour $i = 1, 2$, $v(P(\lambda_i)) = 2v(\lambda_i - x) \geq n(G)$ par définition de $n(G)$, et donc $2v(\lambda_1 - \lambda_2) \geq n(G)$, i.e. $\lambda_1 \equiv \lambda_2 \pmod{\pi^{\lceil n(G)/2 \rceil}}$. \square

On suppose dans le reste de cette sous-section que $m(G) \leq \lceil n(G)/2 \rceil - 1$. Cette condition est équivalente à $m(G) < n(G)$ si $n(G)$ est pair, et $m(G) \leq n(G)/2$ si $n(G)$ est impair.

Dans tous les cas, on a $m(G) < n(G)/2$, et donc par définition $G_{m(G)+1}$ est un sous-groupe fermé propre de G .

Par densité des éléments semi-simples réguliers de G , il y a un tel élément qui n'est pas dans $G_{m(G)+1}$, donc qui n'est pas dans $G_{\lceil n(G)/2 \rceil}$. Par le lemme précédent, un tel élément est diagonalisable : appelons-le $\delta = \text{diag}(\alpha, \beta)$ dans une certaine base (e_1, e_2) de K^2 . Cette base définit une droite D de T . On a $\alpha \equiv \beta \pmod{\pi^{m(G)}}$ mais $\alpha \not\equiv \beta \pmod{\pi^{m(G)+1}}$. D'après la remarque 3, on a, quitte à échanger χ_1 et χ_2 ,

$$\alpha \equiv \chi_1(\delta), \beta \equiv \chi_2(\delta) \pmod{\pi^{n(G)-m(G)}}.$$

Proposition 10. *$C(G) \cap D$ est un segment de longueur au moins $n(G) - 2m(G)$.*

Démonstration — Soit x une extrémité de ce segment. On peut supposer que le réseau $Ae_1 + Ae_2$ représente x . Soit $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$. On a

$$\text{tr}(g) = a + d \equiv \chi_1(g) + \chi_2(g) \pmod{\pi^{n(G)}}.$$

Mais on aussi

$$\text{tr}(g\delta) = a\alpha + d\beta \equiv a\chi_1(\delta) + d\chi_2(\delta) \pmod{\pi^{n(G)-m(G)}},$$

et

$$\text{tr}(g\delta) \equiv \chi_1(g\delta) + \chi_2(g\delta) \pmod{\pi^{n(G)}}.$$

On a donc un système de congruences modulo $\pi^{n(G)-m(G)}$, qui se traduit par le fait que la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

envoie les deux vecteurs colonnes ${}^t(a, d)$ et ${}^t(\chi_1(g), \chi_2(g))$ sur le même vecteur. Comme cette matrice a pour déterminant $\beta - \alpha$ qui est de valuation $m(G)$, on en déduit :

$$a \equiv \chi_1(g), \quad d \equiv \chi_2(g) \pmod{\pi^{n(G)-2m(G)}}.$$

On conclut suivant un argument standard : soit $g' \in G$, notons a', b', c', d' ses coefficients. On obtient en multipliant les précédentes congruences pour g et g' :

$$aa' \equiv \chi_1(g)\chi_1(g') \pmod{\pi^{n(G)-2m(G)}}$$

et en appliquant le même congruence à gg' :

$$aa' + bc' \equiv \chi_1(gg') \pmod{\pi^{n(G)-2m(G)}}$$

d'où

$$bc' \equiv 0 \pmod{\pi^{n(G)-2m(G)}}.$$

Comme x est au bord du segment, on peut trouver une matrice g tel que b est inversible (ou bien g' tel que c' est inversible, mais ce cas est symétrique du précédent). On en déduit que pour tout $g' \in G$, $c' \in \pi^{n(G)-2m(G)}A$. \square

4.6. Synthèse.

Théorème 2. $\lceil n(G)/2 \rceil \leq d(G) \leq n(G)$ et $\lfloor m(G)/2 \rfloor \leq r(G) \leq m(G)$.

Démonstration — Il suffit de montrer les minoration de $r(G)$ et $m(G)$. Celle de $r(G)$ résulte immédiatement de la prop. 9 qui implique aussi $d(G) \leq m(G)$.

Reste à prouver la minoration de $d(G)$. On peut supposer que $m(G) \leq \lceil n(G)/2 \rceil - 1$ comme on l'a fait dans la sous-section précédente, car sinon $d(G) \geq m(G) \geq \lceil n(G)/2 \rceil$, ce qu'on veut prouver.

Lemme 15. *Sous cette hypothèse, pour tout point extrémal x de $C(G)$ il existe un élément δ comme dans la sous-section précédente, et tel que x est un point extrémal de $C(\delta)$.*

Démonstration — D'après la sous-section précédente, les éléments diagonalisables qui ne sont pas dans $G_{m(G)+1}$ sont denses dans G . Le clos $C(G)$ est donc intersection des clos de ces éléments, qui sont des bandes de nerf une droite et épaisseur $m(G)$. Comme un point dans une telle bande est soit extrémal, soit intérieur (i.e. tous ses voisins sont dans la bande), on voit que tout point extrémal x de $C(G)$ est aussi point extrémal d'une bande $C(\delta)$ pour un $\delta \in G$ comme-ci dessus. \square

On considère un tel δ . Par le lemme 12 appliqué à $u = \delta$ (ce qui est permis, car $\bar{\rho}_x(\delta)$ est trigonalisable, puisque $\rho(\delta)$ l'est, mais pas diagonalisable, puisque x est au bord de $C(\delta)$), il existe un point z dans T , à distance $m(G)$ de x , et tel que $B(z, m(G))$ est fixe par δ . On en déduit que z est dans le nerf D de la bande $C(\delta)$, et que $[x, z] \cap D = \{z\}$.

Par la prop. 10, on en déduit $D \cap C(G)$ est un segment de longueur au moins $n(G) - 2m(G)$.

Soit t l'extrémité de ce segment qui est la plus éloigné de z . On a $d(z, t) \geq \lceil n(G)/2 \rceil - m(G)$. Comme $[x, z] \cap D = \{z\}$, on a $d(x, t) = d(x, z) + d(z, t) \geq \lceil n(G)/2 \rceil$ \square

Remarque 4. On a prouvé au passage d'autres inégalités : par exemple $d(g) \geq n(g) - 2m(G)$ qui est meilleure que celle du théorème pour $m(G)$ petit. On a aussi montré que de *n'importe quel point extrémal* de la bande $C(G)$ partait un segment de longueur $\lceil n(G)/2 \rceil$, ce qui est plus fort que la simple minoration du diamètre $d(G)$. Notons cependant que la minoration $r(G) \geq \lfloor m(G)/2 \rfloor$ est optimale (parmi les minorations ne faisant intervenir que $m(G)$ et non $n(G)$ fu moins) comme le montre l'exemple du lemme 9 appliqué à une boule de diamètre r .

4.7. Conséquences. Le corollaire suivant est une généralisation du lemme de Ribet :

Corollaire 2. *Si $\rho : G \rightarrow GL_2(K)$ est une représentation continue d'image bornée irréductible, tel qu'il existe $n \geq 0$ et deux caractères continus χ_1 et $\chi_2 : G \rightarrow (A/\pi^n)^*$, tels que $\det(X - \rho(g)) = (X - \chi_1(g))(X - \chi_2(g)) \pmod{\pi^n}$ pour tout $g \in G$, alors il existe un réseau Λ stable par ρ tel que $\Lambda/\pi^{\lceil n/2 \rceil} \Lambda$ soit une extension de χ_1 par χ_2 non scindée modulo π (autrement dit, définissent un sous- $A/\pi^{\lceil n/2 \rceil}$ -module libre de $\text{Ext}_G(\chi_1, \chi_2)$).*

C'est clair vu la théorème précédent et la prop. 3. Le cas $n = 1$ est le lemme de Ribet original.

Corollaire 3. *Supposons $\text{car}K \geq 2$. Soit ρ_n une suite de représentations continues $G \rightarrow GL_n(K)$. On suppose qu'il existe deux caractères continus χ_1 et $\chi_2 : G \rightarrow A^*$ tel que $\text{tr}(\rho_n)$ converge vers $\chi_1 + \chi_2$, uniformément sur G (i.e. ρ_n converge en trace au sens de [BCKL]). Alors il existe un choix de bases pour tout n de K^2 , tel que la matrice de ρ_n dans la base choisie converge vers la matrice $\text{diag}(\chi_1, \chi_2)$ uniformément en g (autrement dit, ρ_n converge physiquement au sens de [BCKL]).*

Remarque 5. Dans [BCKL], on montre ce même résultat avec l'hypothèse de multiplicité un $\chi_1 \neq \chi_2$ (en dimension quelconque, et pour tout corps K valué complet). Contrairement à toutes les autres hypothèses des théorèmes de [BCKL], dont la nécessité est prouvé par des exemples, nous faisons remarquer que cette hypothèse de multiplicité n'est vraisemblablement pas nécessaire. Ce corollaire en donne la preuve en dimension 2.

Démonstration — Pour n assez grand, les $\text{tr}(\rho_n)$ sont dans A , d'où l'on déduit aisément que ρ_n est d'image bornée. Le résultat est simple pour une sous-suite de ρ_n réductibles, on suppose donc que les ρ_n sont irréductibles. Les diamètres d_n des bandes $C(\rho_n)$ tendent vers l'infini avec n d'après le théorème. On peut donc trouver des points x_n dans $C(\rho_n)$ milieu de segments $[y_n, z_n]$ de longueur d_n tendant vers l'infini. Pour chaque n , on choisit une base de K^2 qui engendrent un réseau correspondant au point x_n , et qui définissent des droites contenant le segment $[y_n, z_n]$. Dans une telle base, la matrice de $\rho_n(g)$ a pour tout g ses coefficients non diagonaux de valuation au moins $\lfloor d_n/2 \rfloor$. On conclut facilement. \square

RÉFÉRENCES

- [B] J. Bellaïche, *À propos d'un lemme de Ribet*, Rendiconti del seminario dell'universita di Padova 109 (2003), 47–62.

- [BCKL] J. Bellaïche, G. Chenevier, C. Khare & M. Larsen, *Converging sequences of p -adic Galois representations and density theorems*, Int. Math. Res. Notices 59 (2005).
- [BG] J. Bellaïche & P. Graftieaux, *Représentations sur un anneau de valuation discrète complet*, to appear in Math. Annalen.
- [1] MW B. Mazur & A. Wiles, *The class field of abelian extensions of \mathbb{Q}* , Inv. Math. 76 no.2 (1984), 179–330.
- [R] K. Ribet, *A modular construction of unramified extensions of $\mathbb{Q}(\zeta_p)$* , Inv. Math. 34(3) (1976), 151–162.
- [S] J.-P. Serre, *Arbres, amalgames, Sl_2* , Astérisque, Société mathématique de France.
- [U] E. Urban, *On residually reducible representations on local rings*, J. Algebra 212 (1999), 738–742.

E-mail address: jbellaic@math.columbia.edu

509 MATH BUILDING, COLUMBIA UNIVERSITY, 2990 BROADWAY, NEW YORK, NY 10027

E-mail address: Gaetan.Chenevier@normalesup.org

LABORATOIRE ANALYSE GÉOMÉTRIE ET APPLICATIONS, INSTITUT GALILÉE, UNIVERSITÉ PARIS 13, 99 AV. J.-B. CLÉMENT, 93430 VILLETANEUSE, FRANCE