MODAL DE MATHÉMATIQUES

L'objectif du MODAL de mathématiques est d'initier les élèves à certains thèmes des mathématiques contemporaines, sur la base d'une méthodologie collaborative. C'est une démarche tout à fait similaire à celle employée par la plupart des mathématiciens professionnels pour faire avancer leurs recherches et acquérir de nouvelles connaissances.

Dans chacun des sujets qui seront proposés, l'enseignant présentera le problème posé et les bases du domaine considéré. Avec l'aide de l'enseignant, les élèves devront alors approfondir ces connaissances via des recherches personnelles et bibliographiques et les exposer au reste du groupe. Si le problème s'y prête, les élèves seront également invités à réaliser des simulations informatiques.

Ce sera également l'occasion d'illustrer de manière originale le contenu des autres cours de mathématiques, en particulier ceux du tronc commun.

Voici la liste des sujets qui seront proposés. Dans les pages qui suivent, nous allons donner quelques détails sur leur contenu.

- Nœuds aléatoires (Julien Marché)
- Géométrie hyperbolique et empilements Apolloniens (Gilles Courtois)
- Groupes Kleiniens : autour du livre *Indra's Pearls* (Romain Dujardin)
- Analyse complexe discrète et empilements de cercles (Romain Dujardin)

Date: 12 mai 2010.

Noeuds aléatoires

Le sujet de ce MODAL a deux aspects : apprendre les fondements de la théorie des noeuds et développer des modèles de noeuds aléatoires que l'on étudie numériquement à l'aide d'invariants simples.

Partie théorique.

- On présente les noeuds et quelques théorèmes fondamentaux. Un noeud se présente de manière équivalente comme un plongement linéaire par morceaux (ou de classe C^1) de S^1 dans $\mathbb{R}^3$. On définit dans ces deux cas la notion d'isotopie de noeuds et on explicite une bijection entre les classes d'isotopie des deux types d'objets.
- Pour représenter les noeuds on les projette sur un plan et on dessine leur diagramme. On étudiera le théorème de Reidemeister qui permet de déterminer à quelles conditions deux diagrammes représentent des noeuds isotopes (i.e. équivalents). C'est l'outil fondamental pour construire beaucoup d'invariants de noeuds combinatoires.
- On construit donc des invariants à partir de diagrammes de noeuds. On peut facilement traiter le cas des polynômes dits de Conway et de Jones. Le premier terme du polynôme de Conway, est particulièrement facile et intéressant ; on peut le calculer par une formule.
- La formule précédente est un modèle pour une grande famille d'invariants dits de type fini. Plus généralement, savoir encoder un invariant donné à partir de diagrammes est un problème difficile et assez peu exploré. On pourra lancer les élèves motivés dans la litterature existant sur ce sujet.

Partie expérimentale.

Voilà quelques idées (par ordre chronologique) de ce qui pourra être fait.

- La notion de noeud aléatoire n'est pas bien définie : plusieurs modèles sont possibles mais ils ne sont pas équivalents sur le plan informatique. On se propose d'implémenter plusieurs d'entre eux et de construire ainsi plusieurs "diagrammes de noeuds aléatoires" dépendant généralement d'un paramètre N (nombre de points du noeud).
- Il s'agit maintenant d'implémenter le calcul des invariants pour déterminer quelques propriétés des noeuds aléatoires, notamment leur non-trivialité, chiralité, etc...
- On peut chercher à implémenter des invariants plus complexes comme le polynôme d'Alexander entier ou le polynôme de Jones.
- Plus intéressant encore, on peut analyser la loi limite de quelques invariants quand N tend vers l'infini. On peut ainsi peut-être expliquer (et même démontrer) la loi du poisson de Willerton. (Source : Simon Willerton, *On the first two Vassiliev invariants*, Experiment. Math. 11 (2002), 289-296.)

Géométrie hyperbolique et empilements Apolloniens

Un empilement de cercles sur une surface est une collection de cercles dont les tangences sont assujetties à une triangulation (voir également le sujet : empilements de cercles et analyse complexe discrète). Le groupe des similitudes du plan transforme un empilement de cercles en un autre empilement de cercles ce qui met ces objets au coeur de la géométrie hyperbolique.

Voici le contenu prévisionnel du MODAL.

1. Empilements Apolloniens entiers.
- Théorèmes d'Apollonius et de Descartes.
- Groupe d'Apollonius.

2. Géométrie hyperbolique.
- Groupe de Möbius.
- Géométrie hyperbolique de dimension 2 et 3, géodésiques.
- Flot géodésique, ergodicité et mélange.

3. Groupes discrets.
- Pavages euclidiens et hyperboliques.
- Ensemble limite et dimension de Hausdorff.
- Ensemble limite du groupe d'Apollonius.

Indra's pearls

Indra's Pearls, The Vision of Felix Klein est un magnifique livre de D. Mumford, D. Wright, et C. Series, consacré aux groupes Kleinéens. L'approche est élémentaire et expérimentale, l'accent étant mis notamment sur la visualisation des ensembles limites par ordinateur. Plusieurs cours ont déjà été consacrés à ce livre de par le monde, et des ressources supplémentaires (images, programmes) sont disponibles sur le web. Je propose donc un MODAL autour de ce livre, et plus généralement de la dynamique des groupes de transformations de Möbius. Le contenu mathématique étant très riche, il y a peut être moyen de constituer 2 groupes sur ce sujet, qui pourraient aborder des thèmes différents.

Partie théorique.
Voici un contenu possible pour le cours. On voit que chaque notion devra faire appel à des connaissances non nécessairement maîtrisées par les élèves (en théorie des groupes, topologie, etc). [bibliographie complémentaire : Alan Beardon, *The geometry of discrete groups*, GTM Springer Verlag.]

1. La sphère de Riemann. Transformations de Möbius et leur dynamique.

2. Groupes, groupes de type fini, classification des sous groupes élémentaires. (Quotients)

3. Groupes discrets, ensembles limites. Domaines fondamentaux et pavages. Exemples.

4. Géométrie hyperbolique, groupes Fuchsiens.

5. Fractales et dimension.

Partie expérimentale.
Chacune des notions précédentes est sujette à modélisation informatique. Voici quelques exemples de thèmes abordables.

1. Visualisation dans la sphère, projection stéréographique.

2. Visualisations d'ensembles limites, conjectures sur leurs propriétés (connexité, etc).

3. Pavages, pavages hyperboliques.

Empilements de cercles et analyse complexe discrète

Un empilement de cercles dans le plan est une configuration de cercles d'intérieurs disjoints, satisfaisant certaines relations de tangence prédéterminées. Thurston a découvert dans les années 80 que cette notion est d'une richesse insoupçonnée, par ses liens intimes avec l'analyse complexe d'une variable, et permet de développer une forme d'analyse complexe discrète. Ce domaine des mathématiques s'est beaucoup développé par la suite. C'est ce sujet, très visuel, que nous voulons faire découvrir à travers ce MODAL.

Partie théorique.

1. La sphère de Riemann. Transformations de Möbius.

2. Le théorème d'Andreev-Thurston : construction d'empilements de cercles de combinatoire donnée.

3. Le théorème d'uniformisation de Riemann. Introduction aux applications quasi-conformes.

4. Le théorème de Rodin-Sullivan : les empilements de cercles approximent l'uniformisation.

Partie expérimentale.

Un intérêt majeur du sujet est sa dimension très visuelle. Des programmes pour calculer les empilements d'Andreev-Thurston sont disponibles sur le web (voir notamment la page web de Kenneth Stephenson), et pourront servir à illustrer le cours. Il sera également possible d'implémenter directement un algorithme de construction d'empilements de cercles.

Bibliographie.

Kenneth Stephenson *Introduction to Circle Packing. The Theory of Discrete Analytic Functions* Cambridge Univ. Press.