Retour aux invariants :

$H_1(X, \mathbb{Z})$ n'a pas de torsion (plus fort $\pi_1(X) = 0$)

Dém : Si n-torsion alors $Y \xrightarrow{\mu} X$ étale de degré $n \geq 1$.

$\Rightarrow \quad K_Y \simeq \mu^* K_X \simeq \mathcal{O}_Y$.

$$\Rightarrow \quad \underset{\substack{\parallel \\ n\chi(X) = 2n}}{\chi(Y)} = 1 - q(Y) + \underset{\substack{\parallel \\ 1}}{p_g(Y)} = 2 - q(Y) \qquad \Rightarrow n = 1. \quad \square$$

topologie

$\Rightarrow \quad H^3(X, \mathbb{Z}) = 0$, $H^1(X, \mathbb{Z}) = 0$ et $H^2(X, \mathbb{Z})$ n'a pas de torsion. (thm des coefficients universels)

$H^2(X, \mathbb{Z})$ est donc un réseau de rang 22. et le cup-produit donne une forme bilinéaire non-dégénérée à valeurs entières

- La forme d'intersection est unimodulaire (dualité de Poincaré à valeurs dans $\mathbb{Z}$)

- Thm d'indice de Thom-Hirzebruch

$$\underbrace{I(X)}_{\text{indice de la forme d'intersection}} = \frac{1}{3}\left(c_1^2(X) - 2c_2(X)\right) = -16,$$

- Le réseau est pair, càd $(x, x) \in 2\mathbb{Z}$ $\forall x \in H^2(X, \mathbb{Z})$

par le théorème de Wu

$$(w_2(X), c) = (c, c) \bmod 2 \quad \forall c \in H^2(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq H^2(X, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

où w_2 la $2^{\text{ème}}$ classe de Whitney-Stiefel.

comme $w_2(X) =$ l'image de $c_1(K_X) = 0$.

on conclut.

Thm de classification

puisque |indice| ≠ rang

Un réseau indéfini est déterminé à isométrie près par son rang, indice et parité.

$\underset{22}{''}$ $\underset{-16}{''}$ $\underset{\text{pair}}{''}$

Corollaire

$$H^2(X,\mathbb{Z}) \simeq \underbrace{-E_8 \oplus -E_8}_{\text{définie négat}} \oplus \underbrace{H \oplus H \oplus H}_{\text{indéfinie}} =: L$$

Défn: Soit X, X' des surfaces complexes compactes kählériennes
Un isomorphisme de $\mathbb{Z}$-modules

$$H^2(X,\mathbb{Z}) \to H^2(X',\mathbb{Z})$$

est une isométrie de Hodge si

i) il préserve le cup-produit (produit d'intersection)
ii) l'extension $H^2(X,\mathbb{Z})\otimes\mathbb{C} \to H^2(X,\mathbb{Z})\otimes\mathbb{C}$ préserve la décomposition de Hodge

Notation: Par le thm d'indice de Hodge $(\,,\,)|_{H^{1,1}(X,\mathbb{R})}$ est $(1, h^{1,1}-1)$

$\Rightarrow$ $\{x \in H^{1,1}(X,\mathbb{R}) \mid (x,x) > 0\} = \mathcal{C}_X \sqcup \mathcal{C}_X'$ cones convexes

on choisit comme $\mathcal{C}_X$ le cone qui contient les classes de Kähler et on l'appelle le cone positif

$NS\,X = H^{1,1}(X,\mathbb{R}) \cap H^2(X,\mathbb{Z}) \subset H^2(X,\mathbb{C})$ groupe de Néron-Severi.

Une classe $\alpha \in NS\,X$ est effective si
$\exists D$ diviseur effectif tq $\alpha = c_1(D)$.

Défn: Une isométrie de Hodge est effective, si
- elle préserve les cônes positifs
- elle induit bijection entre les classes effectives

Thm de Torelli

Qu'est-ce que c'est un thm de Torelli :

"récupérer une variété par sa structure de Hodge (polarisée)"

Thm de Torelli pour les tores :

T, T' tores cplxes, $\varphi : H^1(T, \mathbb{Z}) \to H^1(T', \mathbb{Z})$ isomorphisme

qui préserve la décomp. de Hodge sur $H^1(X, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}$.

$\Rightarrow \exists\ f : T' \xrightarrow{\simeq} T$ tel que $\varphi = f^*$.

Dém :

$$\begin{array}{ccc} T & \overset{\alpha_T}{\underset{\simeq}{\longrightarrow}} \mathrm{Alb}\, T = & H^{1,0}(T)^* / H_1(T, \mathbb{Z}) \\ & & \Big\uparrow \simeq \text{ induit par } \varphi \\ T' & \overset{\alpha_{T'}}{\underset{\simeq}{\longrightarrow}} \mathrm{Alb}\, T' = & H^{1,0}(T')^* / H_1(T', \mathbb{Z}) \end{array}$$

$\boxtimes$

Thm de Torelli pour les K3 :

X, X' surface K3, $\varphi : H^2(X, \mathbb{Z}) \to H^2(X', \mathbb{Z})$ isométrie de Hodge effective

$\Rightarrow \exists !\ f : X' \xrightarrow{\simeq} X$ tel que $\varphi = f^*$

Corollaire (Torelli faible)

X, X' surface K3, $\varphi : H^2(X, \mathbb{Z}) \to H^2(X', \mathbb{Z})$ isométrie de Hodge

$\Rightarrow X \simeq X'$

Dém : quitte à appliquer $-\mathrm{Id}$ et des réflections de Picard-Lefschetz, on peut supposer que φ est effective $\square$

La preuve utilise trois outils.

I. Thm de Torelli pour les Kummer projectives, (notre but)

c-à-d le thm avec hypothèse supplémentaire que X Kummer proj

II. Thm de densité

Déf. 1: Une surface K3 marquée est une paire (X, φ)
où X K3 et $\varphi : H^2(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow L$ est une isométrie

(X,φ) K3 marquée. L'inclusion

$$H^{2,0}(X) \hookrightarrow H^2(X,\mathbb{C}) \xrightarrow{\varphi_{\mathbb{C}}} L_{\mathbb{C}}$$

définit point $[\varphi_{\mathbb{C}}(H^{2,0}(X))] \in \mathbb{P}(L_{\mathbb{C}})$ appelé point de période de (X,φ)

Rque: Dans ce sense, Torelli faible dit $\left\{ \begin{array}{l} X \simeq X' \\ \Updownarrow \\ \exists\ (X,\varphi),\ (X',\varphi') \text{ marquages tel que} \\ \varphi_{\mathbb{C}}(H^{2,0}(X)) = \varphi'_{\mathbb{C}}(H^{2,0}(X')) \end{array} \right.$

$$H^2(X,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\varphi} L \xrightarrow{(\varphi')^{-1}} H^2(X',\mathbb{Z})$$

Pourquoi?

$$\begin{tikzcd} H^2(X,\mathbb{C}) \arrow[r, "\varphi_{\mathbb{C}}", "\simeq"'] & L_{\mathbb{C}} \arrow[r, "(\varphi'_{\mathbb{C}})^{-1}"] & H^2(X',\mathbb{C}) \\ H^{2,0}(X) \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[rr] & & H^{2,0}(X') \arrow[u, phantom, "\cup"] \end{tikzcd}$$

même point de période

$\Rightarrow$ conjugaison $H^{0,2}(X) \longrightarrow H^{0,2}(X')$

Puisque $H^{1,1}(X) = (H^{2,0} \oplus H^{0,2})^{\perp}$ $\quad H^{1,1}(X) \longrightarrow H^{1,1}(X')$

$\Rightarrow \varphi$ isométrie de Hodge.

On introduit $\Omega = \{ [\omega] \in \mathbb{P}(L_{\mathbb{C}}) \mid (\omega,\omega) = 0, (\omega,\bar\omega) > 0 \}$ domaine de périodes

X K3 $[\varphi(H^{2,0}(X))]$ est représentée par $\omega \in H^{2,0}(X)$

2-formes holom. partout non-nulle

$$\Rightarrow (\omega,\omega) = \int_X \underset{\substack{\| \\ 0}}{\omega\wedge\omega} = 0$$

$$(\omega,\bar\omega) = \int_X \underbrace{\omega\wedge\bar\omega}_{\substack{(2,2)\text{-forme réelle} \\ \text{partout } >0}} > 0.$$

Donc $[\varphi(H^{2,0}(X))] \in \Omega$. Notons que

$$\Omega \overset{\text{ouvert}}{\subset} \underbrace{\{ \omega \in \mathbb{P}(L_{\mathbb{C}}) \mid (\omega,\omega) = 0 \}}_{\substack{\text{quadrique} \subset \mathbb{P}(L_{\mathbb{C}}) \simeq \mathbb{P}^{21} \\ \text{de dim } 20}}$$

<u>Théorème de densité</u>:

Les points de période des Kummer projectives marquées sont denses dans Ω.

III. Théorème de Torelli local

(X_0, φ_0) K3 marquée

$p : \mathcal{X} \to (S,0)$ famille de Kuranishi de X

$R^2 p_* \mathbb{Z}_{\mathcal{X}}$ système local, on choisit loc^t $\varphi : R^2 p_* \mathbb{Z}_{\mathcal{X}} \xrightarrow{\simeq} L_S$

tq $\varphi|_0 = \varphi_0$.

on obtient l'application de période

$$\mathcal{J} : S \to \Omega$$
$$s \mapsto \varphi_{\mathbb{C}}(s)(H^{2,0}(X_s))$$

<u>Torelli local</u> $\mathcal{J}$ est un biholomorphisme local.

12

Idée de la démonstration.

Il suffit de montrer que $dJ : T_{S,0} \longrightarrow T_{\Omega, \varphi_{\mathbb{C}}(0)}(H^{2,0}(X_0))$ est un isom.

Notons que de façon générale, si $\ell \in \mathbb{P}(L_{\mathbb{C}})$, alors

$$T_{\mathbb{P}(L_{\mathbb{C}}),\ell} = \mathrm{Hom}(\ell, L_{\mathbb{C}}/\ell)$$

et si $Q = \{\ell \in \mathbb{P}(L_{\mathbb{C}}) \mid (\ell,\ell) = 0\}$

alors

$$T_{Q,\ell} = \mathrm{Hom}(\ell, \ell^{\perp}/\ell)$$

donc dans notre cas, on a une identification

$$T_{\Omega,\varphi_{\mathbb{C}}(0)}(H^{2,0}(X_0)) = \mathrm{Hom}\left(H^{2,0}(X_0), \, H^{2,0}(X_0)^{\perp}/H^{2,0}(X_0)\right)$$

$$H^{2,0}(X_0)^{\perp} = H^{1,1}(X_0) \oplus H^{2,0}(X_0)$$

$$H^{2,0}(X_0)^{\perp}/H^{2,0}(X_0) = H^{1,1}(X_0) = H^1(\Omega_{X_0})$$

$\exists$ factorisation

$$\begin{tikzcd} T_{S,0} \arrow[r, "dJ"] \arrow[d, "\text{Kodaira-Spencer}"'] & \mathrm{Hom}(H^{2,0}(X_0), H^1(\Omega_{X_0})) \\ H^1(T_{X_0}) \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

$e \longmapsto t_e$, $\quad t_e(\omega) = \omega \cup e$

ω : (2,0)-forme, $\quad e$: (0,1) à valeurs dans T_{X_0}

déjà vu quand on a construit l'isom.

$$T_{X_0} \simeq K_{X_0} \otimes T_{X_0} \simeq \Omega_{X_0}.$$

Donc c'est un isom.

En plus $(S,0)$ universelle donc $T_{S,0} \simeq H^1(T_{X_0})$. $\square$

Démonstration du Thm de Torelli :

On considère

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & & \mathcal{X}' \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi' \\ (S,0) & & (S',0) \end{array}$$

les familles de Kuranishi

on choisit un marquage $\alpha : R^2\pi'_*\mathbb{Z}_{\mathcal{X}'} \to L_{S'}$

et dans un polydisque on étend φ à $\Phi : R^2\pi_*\mathbb{Z}_{\mathcal{X}} \to R^2\pi'_*\mathbb{Z}_{\mathcal{X}'}$

ce qui donne donc un marquage $\alpha \circ \Phi : R^2\pi_*\mathbb{Z}_{\mathcal{X}} \to L_{S'}$

donc applications de périodes

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{J} : (S,0) & \xrightarrow{\simeq} & \Omega \\ \uparrow \simeq & \nearrow \simeq & \\ \mathcal{J}' : (S',0) & & \end{array}$$

tel que $\mathcal{J}(0) = \mathcal{J}'(0)$ (c'est l'hypothèse)

Torelli local

"localement on 'peut' donc faire l'identification

$S = S'$, $\varphi = \mathrm{Id}$, $\mathcal{J} = \mathcal{J}'$

+ isométries de Hodge (eff) pour tout $s \in S$.

Par densité, $\exists\, s_n \to 0$ tel que $\mathcal{J}(s_n)$ est point de période d'un Kummer projective.
$\; \underset{S}{\cap}$

puisque $\Phi(s_n)$ est une isométrie de Hodge pour tout s_n.

le Thm de Torelli pour les Kummer projectives montre que

$$\exists!\, f_n : X'_{s_n} \xrightarrow{\simeq} X_{s_n} \quad \text{tq} \quad \Phi(s_n) = f_n^*$$

On montre que : $f_n \to f : X' \to X$ tel que $\Phi(0) = f^*$

(c'est non-trivial : on a besoin de $\Phi(s_n) = f_n^*$ pour montrer que le volume du cycle $\Gamma_n \subset X'_{s_n} \times X_{s_n}$ est borné uniformément)

$\boxtimes$

$$\begin{tikzcd} \tilde{T} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\tilde{p}"'] & T \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r] & T/_{\pm 1} \end{tikzcd}$$

14

Théorème de Torelli pour les Kummer projectives

<u>1ère étape</u> : Si X Kummer, X' a une structure de Kummer induite

Soit $\underset{\underset{H^2(X,\mathbb{Z})}{\cap}}{c_1,\dots,c_{16}}$ les classes des 16 courbes exc. $C_i \subset X$

$\overset{\varphi \text{ effectif}}{\Longrightarrow}$ $c_i' = \varphi(c_i)$ effectif et représenté par (-2)-courbe C_i'

(C_i' clairement irréductible

$C_i'^2 = C_i^2 = -2$

$K_{X'} \cdot C_i = 0$

$\overset{\shortparallel}{\mathcal{O}_{X'}}$

en plus $\sum c_i = L^{\otimes 2} \Rightarrow \sum c_i' = \varphi(L)^{\otimes 2}$, $\underset{\text{fois}}{\overset{\text{dernière}}{\Longrightarrow}}$ X' Km T' et C_i' exceptionnel

2ème étape : On se ramène à un problème pour les tores.

On définit $\alpha = \tilde{p}_* \circ \sigma^* : H^2(T,\mathbb{Z}) \to H^2(X,\mathbb{Z})$

On a : i) $(\alpha(x),\alpha(y)) = 2(x,y)$ $\forall\, x,y \in H^2(T,\mathbb{Z})$

(formule de projection) $\Rightarrow \alpha$ injective

et ii) $\alpha_{\mathbb{C}}(H^{2,0}(T)) = H^{2,0}(X)$ (déjà vu : la 2-forme holom. sur T donne la 2-forme sur X)

soit $W = \{c_1,\dots,c_{16}$ 16 classes exc.$\}$ et soit

$\mathbb{Z}^W \subset H^2(X,\mathbb{Z})$ le réseau engendré

Lemme : $\operatorname{Im}\alpha = (\mathbb{Z}^W)^\perp$

(facile : $\operatorname{Im}\alpha\otimes\mathbb{Q} = (\mathbb{Q}^W)^\perp$
$\dim \mathbb{Q}^W = 16$
$\dim \operatorname{Im}\alpha\otimes\mathbb{Q} = \dim H^2(T,\mathbb{Q}) = 6$.
et ils sont bien orthogonaux.)

<u>Affirmation</u> : φ induit une isométrie de Hodge

$$\psi : H^2(T,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(T',\mathbb{Z})$$

Dém : On a vu que $\varphi(c_i) = c_i'$

$$\Rightarrow \varphi(\mathbb{Z}^w) = \mathbb{Z}^{w'}$$

φ isom.

$$\Rightarrow \varphi((\mathbb{Z}^w)^\perp) = (\mathbb{Z}^{w'})^\perp$$

$$\begin{tikzcd} H^2(X,\mathbb{Z}) \arrow[r, "\varphi"] & H^2(X',\mathbb{Z}) \\ H^2(T,\mathbb{Z}) \arrow[u, hook, "\alpha"] \arrow[r, dashed, "\psi"] & H^2(T',\mathbb{Z}) \arrow[u, hook, "\alpha'"] \end{tikzcd}$$

ψ isométrie par i)

$\Rightarrow$ de Hodge par ii)

3ème étape : on montre que

$$\exists\ J : H^1(T,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(T',\mathbb{Z})$$

(qui préserve décomp. de Hodge.) automatique puisque $\psi = J \wedge J$

telle que $\psi = J \wedge J$

Une fois ceci fait on applique Torelli pour les tores

$$\exists\ g : T' \longrightarrow T \quad \text{tq} \quad J = g^*$$

g va induire $f : X' \longrightarrow X$ par passage au quotient.

Thm Soit T, T' deux tores de dimension 2

$\psi : H^2(T',\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(T,\mathbb{Z})$ " isométrie de Hodge

s'il existe $J_2 : H^1(T', \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(T, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ tq $J_2 \wedge J_2 = \psi \bmod 2$

$\Rightarrow \exists\ J : H^1(T',\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(T,\mathbb{Z})$ tq $J \wedge J = \psi$.

(préserve décomposition de Hodge)

Démontrer que ce résultat s'applique à notre situation,

demande encore pas mal d'outils

"Digression on affine geometry over $\mathbb{F}_2$"

Rque sur le thm de densité : (p. 325)

X variété proj lisse$/\mathbb{C}$, $L \to X$ fibré en droites.

Soit $\mathcal{X} \to \operatorname{Spec} \mathbb{C}[t]/(t^2)$ défⁿ de premier ordre

donné par une classe $e \in H^1(X, T_X)$.

Soit $c_1(L) \in H^1(X, \Omega_X)$ la première classe de Chern.

Alors $\exists\ \mathcal{L} \to \mathcal{X}$ tel que $\mathcal{L}|_X = L$ ssi

$$e \cdot c_1(L) = 0 \quad \text{dans } H^2(X, \mathcal{O}_X)$$

où $\cdot$ est l'application

$$H^1(X, T_X) \times H^1(X, \Omega_X) \longrightarrow H^2(X, T_X \otimes \Omega_X) \longrightarrow H^2(X, \mathcal{O}_X)$$

"L'obstruction de déformer L avec X vit dans $H^2(X, \mathcal{O}_X)$".

Dans notre cas : X K3 $\Rightarrow H^2(X, \mathcal{O}_X) \simeq \mathbb{C}$

et $H^1(X, T_X) \times H^1(X, \Omega_X) \longrightarrow H^2(X, \mathcal{O}_X)$ est la dualité de Serre

$\Rightarrow \forall L \neq 0\ \exists e \in H^1(X, T_X)$ tq $e \cdot c_1(L) \neq 0$.

déformations des K3 projectives forment famille de dim 19
$$\cap$$
famille de Kuranishi

Mais : il y a une infinité de composantes irréductibles de dim 19 pour les Kummer projectives

+ Prop 8.2.
les 2-plans contenant $P \subset L_{\mathbb{R}}$ tq $(x,x) \in 4\mathbb{Z}$ $\forall x \in P \cap L$ est dense dans $G(2, L_{\mathbb{R}})$

Comment reconnaître les périodes de Kummer ?

Prop : Soit $T \subset L$ sous-réseau primitif orienté de rang 2 tq $(\ ,\ )_T > 0$ et $(x,x) \in 4\mathbb{Z}$ $\forall x \in T$. Alors

$\exists\ X$ Kummer exceptionnelle et isométrie $\varphi : H^2(X, \mathbb{Z}) \to L$ telle que $\varphi(NS_X^{\perp}) \to T$