

Revenir aux invariants:

$H_1(X, \mathbb{Z})$  n'a pas de torsion (père ferial  $\bar{\pi}_1(X) = 0$ )

Dém: Si  $n$ -fersion alors  $Y \xrightarrow{f} X$  étale de degré  $n \geq 1$ .

$$\Rightarrow \mathcal{K}_Y \cong \mu^n \mathcal{K}_X \cong \mathcal{O}_Y.$$

$$\Rightarrow \chi(Y) = 1 - q(Y) + p_g(Y) = 2 - q(Y)$$

$$\parallel \quad \parallel$$

$$n\chi(X) = 2n \quad \Rightarrow n=1. \quad \square$$

topologie

$\Rightarrow H^3(X, \mathbb{Z}) = 0, H^1(X, \mathbb{Z}) = 0$  et  $H^2(X, \mathbb{Z})$  n'a pas de torsion. (thm des coefficients universels)

$H^2(X, \mathbb{Z})$  est donc un réseau de rang 2 et le cup-produit donne une forme bilinéaire non-dégénérée à valeurs entières

- la forme d'intersection est unimodulaire (dualité de Poincaré à valeurs dans  $\mathbb{Z}$ )
- Thm d'indice de Thom - Hirzebruch

$$\underbrace{I(X)}_{\text{indice signature de la forme d'intersection}} = \frac{1}{3} (c_1^2(X) - 2c_2(X)) = -16,$$

- le réseau est pair, c'à d  $(x, x) \in 2\mathbb{Z} \quad \forall x \in H^2(X, \mathbb{Z})$

par le théorème de Wu

$$(w_2(x), c) = (c, c) \text{ mod } 2 \quad \forall c \in H^2(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong H^2(X, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

où  $w_2$  la 2<sup>ème</sup> classe de Whitney-Stiefel.

comme  $w_2(X) =$  l'image de  $c_1(\mathcal{K}_X) = 0$ .

on conclut.

⑧ Thm de classification / puisque  $|\text{indice}| \neq \text{neqj}$

Un réseau indéfini est déterminé à isométrie près par son rang, indice et parité.

$\begin{matrix} \text{rang} & \text{indice} & \text{parité} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ 22 & -15 & \text{pairs} \end{matrix}$

Corollaire

$$H^2(X, \mathbb{Z}) \cong -E_8 \oplus \underbrace{-E_8}_{\text{défini négat}} \oplus \underbrace{H \oplus H \oplus H}_{\text{indéfini}} =: L$$

Défn: Soit  $X, X'$  des surfaces complexes compactes kählériennes  
 Un isomorphisme de  $\mathbb{Z}$ -modules

$$H^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X', \mathbb{Z})$$

est une isométrie de Hodge si

- i) il préserve le cup-produit (produit d'intersection)
- ii) l'extension  $H^2(X, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C} \rightarrow H^2(X', \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}$  préserve la décomposition de Hodge

Notation: Par le thm d'indice de Hodge  $(, ) |_{H^{1,1}(X, \mathbb{R})}$  est  $(1, h^{1,1}-1)$

$$\Rightarrow \{ x \in H^{1,1}(X, \mathbb{R}) \mid (x, x) > 0 \} = \mathcal{E}_x \cup \mathcal{E}'_x \text{ cones convexes}$$

comme on choisit  $\mathcal{E}_x$  le cone qui contient les classes de Kähler et on l'appelle le cone positif

$$NS(X) = H^{1,1}(X, \mathbb{R}) \cap H^2(X, \mathbb{Z}) \subset H^2(X, \mathbb{C})$$

groupe de Néron-Severi.

Une classe  $d \in NS(X)$  est effective si

$$\exists D \text{ diviseur effectif tq } d = c_1(D).$$

Défn: Une isométrie de Hodge est effective, si

- elle préserve les cônes positifs
- elle induit bijection entre des classes effectives

Thm de Torelli

Qu'est-ce que c'est un thm de Torelli:

"répondre une variété par sa structure de Hodge (polarisée)"

Thm de Torelli pour les tores:

$T, T'$  tores cplx,  $\varphi: H^1(T, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(T', \mathbb{Z})$  isomorphisme

qui préserve la décomp. de Hodge sur  $H^1(X, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}$ .

$\Rightarrow \exists f: T' \xrightarrow{\sim} T$  tel que  $\varphi = f^*$ .

Dém:

$$T \xrightarrow[\cong]{\alpha_T} \text{Ab } T = H^{1,0}(T)^* / H_1(T, \mathbb{Z})$$

↑  
≅ induit par  $\varphi$

$$T' \xrightarrow[\cong]{\alpha_{T'}} \text{Ab } T' = H^{1,0}(T')^* / H_1(T', \mathbb{Z}) \quad \square$$

Thm de Torelli pour les K3:

$X, X'$  surface K3,  $\varphi: H^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X', \mathbb{Z})$  isométrie de Hodge effective

$\Rightarrow \exists f: X' \xrightarrow{\sim} X$  tel que  $\varphi = f^*$

Corollaire (Torelli faible)

$X, X'$  surface K3,  $\varphi: H^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X', \mathbb{Z})$  isométrie de Hodge

$\Rightarrow X \cong X'$

Dém:

quitte à appliquer - tel et des réflexions de Picard-Lefschetz, on peut supposer que  $\varphi$  est effective.  $\square$

la preuve utilise trois outils.

I. Thm de Torelli pour les Kummer projectives, (notre best)

→ c'est le thm avec hypothèse supplémentaire que X Kummer. proj

II. Thm de densité

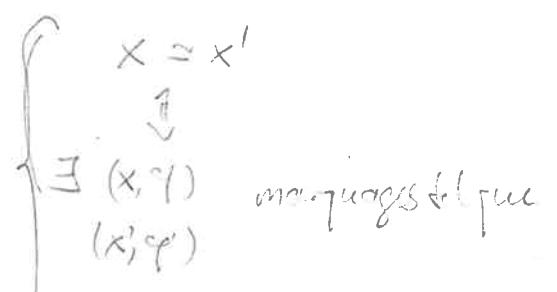
Déf: Une surface K3 marquée est un pair  $(X, \varphi)$   
 où X K3 et  $\varphi: H^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow L$  est une isométrie

$(X, \varphi)$  K3 marquée. L'inclusion

$$H^{2,0}(X) \hookrightarrow H^2(X, \mathbb{C}) \xrightarrow{\varphi_{\mathbb{C}}} L_{\mathbb{C}}$$

définit point  $[\varphi_{\mathbb{C}}(H^{2,0}(X))] \in \mathbb{P}(L_{\mathbb{C}})$  appelé point de période de  $(X, \varphi)$

Rq: Dans ce sens, Torelli faible dit



$$H^2(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\varphi} L \xrightarrow{(\varphi')^{-1}} H^2(X', \mathbb{Z}) \quad \varphi_{\mathbb{C}}(H^{2,0}(X)) = \varphi'_{\mathbb{C}}(H^{2,0}(X'))$$

Pourquoi?

$$H^2(X, \mathbb{C}) \xrightarrow{\varphi_{\mathbb{C}}} L_{\mathbb{C}} \xrightarrow{(\varphi'_{\mathbb{C}})^{-1}} H^2(X', \mathbb{C})$$

$$\cup \quad \cup$$

$$H^{2,0}(X) \xrightarrow{\quad \quad \quad} H^{2,0}(X')$$

↑  
même point de période

$$\Rightarrow \text{conjugaison } N^{0,2}(X) \rightarrow N^{0,2}(X')$$

Puisque  $H^{1,1}(X) = (N^{2,0} \oplus N^{0,2})^{\perp}$   $H^{1,1}(X) \rightarrow H^{1,1}(X')$

$\Rightarrow \varphi$  isométrie de Hodge.

On introduit  $\Omega = \{ [\omega] \in \mathbb{P}(L_C) \mid (\omega, \omega) = 0, (\omega, \bar{\omega}) > 0 \}$  domaine de périodes

$\times U_3$   $[\varphi(N^{2,0}(X))]$  est représentée par  $\omega \in N^{2,0}(X)$   
2-formes holom. partout non-nulle

$$\Rightarrow (\omega, \omega) = \int_X \omega \wedge \omega = 0$$

$$(\omega, \bar{\omega}) = \int_X \omega \wedge \bar{\omega} > 0.$$

$\times$  (2,2)-forme réelle partout  $> 0$

Donc  $[\varphi(N^{2,0}(X))] \in \Omega$ . Notons que

$$\Omega \subset \{ \omega \in \mathbb{P}(L_C) \mid (\omega, \omega) = 0 \}$$

quadrique  $\subset \mathbb{P}(L_C) \cong \mathbb{P}^{2n}$   
de dim  $2n$

Théorème de densité:

les points de période des Kummer projectives marquées sont denses dans  $\Omega$ .

III. Théorème de Torelli local

$(X, \varphi) \times \mathbb{Z}$  marquée

$p: X \rightarrow (S, 0)$  famille de Kuranishi de  $X$

$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  système local, on choisit  $\text{loc}^+ \varphi: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} L_S$   
 $\text{tg } \varphi|_0 = \varphi_0$ .

on obtient l'application de période

$$I: S \rightarrow \Omega$$

$$s \mapsto \varphi_s(s) (N^{2,0}(X_s))$$

Torelli local  $I$  est un biholomorphisme local.

(12)

Solide de la  
démonstration.

Il suffit de montrer que  $d\mathcal{I}: T_{S,0} \longrightarrow T_{\Omega, \varphi_0(0)}(H^{2,0}(X_0))$  est un isom.

Notons que de façon générale, si  $\ell \in \mathbb{P}(L_C)$ , alors

$$T_{\mathbb{P}(L_C), \ell} = \text{Hom}(\ell, L_C/\ell)$$

$$\text{d si } Q = \{ \ell \in \mathbb{P}(L_C) \mid (\ell, \ell) = 0 \}$$

$$\text{alors } T_{Q, \ell} = \text{Hom}(\ell, \ell^\perp/\ell)$$

donc dans votre cas, on a une identification  $H^{1,1}(X_0) \oplus H^{2,0}(X_0)$

$$T_{\Omega, \varphi_0(0)}(H^{2,0}(X_0)) = \text{Hom}(H^{2,0}(X_0), \frac{H^{2,0}(X_0)^\perp}{H^{2,0}(X_0)})$$

$$\parallel \\ H^{1,1}(X_0) = H^1(\Omega_{X_0})$$

$\exists$  factorisation  $T_{S,0} \xrightarrow{d\mathcal{I}} \text{Hom}(H^{2,0}(X_0), H^1(\Omega_{X_0}))$

Kodaira  
Spencer

$$H^1(T_{X_0})$$

$$t_e(w) = w \circ v_e$$

(2,0) forme (0,1) à valeurs dans  $T_{X_0}$

déjà vu quand on a construit l'isom.

$$T_{X_0} \cong K_{X_0} \otimes T_{X_0} \cong \Omega_{X_0}$$

Donc c'est un isom.

En plus (S, e) universalité, donc  $T_{S,0} \cong H^1(T_{X_0})$ .

□

Démonstration du Thm de Torelli:

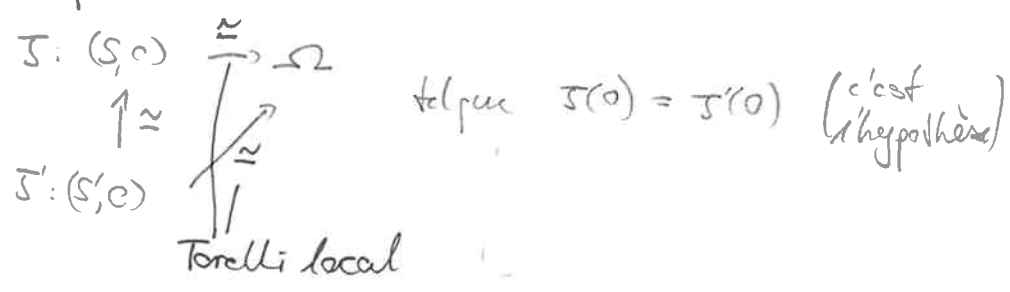
On considère  $X$   $X'$  les familles de Kuramishi  
 $\downarrow \pi$   $\downarrow \pi'$   
 $(S, c)$   $(S', c')$

on choisit un marquage  $\alpha: R^2 \pi'_* \mathbb{Z}_{X'} \rightarrow L_{S'}$

et dans un polydisque on étend  $\alpha$  à  $\underline{F}: R^2 \pi_* \mathbb{Z}_X \rightarrow R^2 \pi'_* \mathbb{Z}_{X'}$

ce qui donne donc un marquage  $\alpha \circ \underline{F}: R^2 \pi_* \mathbb{Z}_X \rightarrow L_{S'}$

donc applications de périodes



localement on peut donc faire l'identification

$$S = S', q = \text{Id}, J = J'$$

+ isométries de Hodge (eff) pour tout  $s \in S$ .

Par densité,  $\exists \underset{S}{s_n} \rightarrow 0$  tel que  $J(s_n)$  est point de période d'un Kummer projective.

puisque  $\underline{F}(s_n)$  est une isométrie de Hodge pour tout  $s_n$ .

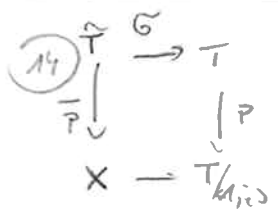
le Thm de Torelli pour les Kummer projectives montre que

$$\exists f_n: X'_{s_n} \xrightarrow{\cong} X_{s_n} \quad \text{tel que} \quad \underline{F}(s_n) = f_n^*$$

On montre que:  $f_n \rightarrow f: X' \rightarrow X$  tel que  $\phi(0) = f^*$

(c'est non-trivial: on a besoin de  $\underline{F}(s_n) = f_n^*$  pour

montrer que le volume du cycle  $T_n \subset X'_{s_n} \times X_{s_n}$  est borné uniformément)  $\square$



Théorème de Torelli pour les Kummer projectives

1<sup>ère</sup> étape : Si  $X$  Kummer,  $X'$  a une structure de Kummer indéterminée

Soit  $c_1, \dots, c_{16}$  les classes des 16 courbes exc.  $C_i \subset X$   
 $\cap$   
 $H^2(X, \mathbb{Z})$

$\varphi$  effectif  $\Rightarrow C_i' = \varphi(C_i)$  effectif et représenté par (-2)-courbe  $C_i'$   
 ( $C_i'$  clairement irréductible)

$$\begin{aligned}
 C_i'^2 &= C_i^2 = -2 \\
 K_{X'} \cdot C_i' &= 0 \\
 G_{X'}
 \end{aligned}$$

en plus  $\sum C_i = L^{\otimes 2} \Rightarrow \sum C_i' = \varphi(L)^{\otimes 2}$  dernière fois  $X'$  Kummer et  $C_i'$  exceptionnel

2<sup>ème</sup> étape : On se ramène à un problème pour les torres.

On définit

$$\begin{aligned}
 \alpha = \bar{p}_* \circ \sigma^* : H^2(\mathbb{T}, \mathbb{Z}) \\
 \downarrow \\
 H^2(X, \mathbb{Z})
 \end{aligned}$$

on a : i)  $(\alpha(x), \alpha(y)) = 2(x, y) \quad \forall x, y \in H^2(\mathbb{T}, \mathbb{Z})$

(formule de projection)  $\Rightarrow \alpha$  injective

et ii)  $\alpha_c(H^{2,0}(\mathbb{T})) = H^{2,0}(X)$

(déjà vu : la 2-forme holom. sur  $\mathbb{T}$  donne la 2-forme sur  $X$ )

soit  $W = \{c_1, \dots, c_{16} \text{ 16 classes exc.}\}$  et soit

$$\mathbb{Z}^W \subset H^2(X, \mathbb{Z})$$

le réseau engendré  
 facile :  $\text{Im } \alpha \otimes \mathbb{Q} = (\mathbb{R}^W)^\perp$

lemme :  $\text{Im } \alpha = (\mathbb{Z}^W)^\perp$

$\dim \mathbb{R}^W = 16$   
 $\dim \text{Im } \alpha \otimes \mathbb{Q} = \dim H^2(\mathbb{T}, \mathbb{C}) = 6$   
 et ils sont bien orthogonaux.

Affirmation :  $\varphi$  induit une isométrie de Hodge

$$\psi : H^2(\mathbb{T}, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(\mathbb{T}', \mathbb{Z})$$

Dém: On a vu que  $\varphi(c_i) = c_i'$

$$\Rightarrow \varphi(\mathbb{Z}^w) = \mathbb{Z}^{w'}$$

$\varphi$  isom.  
 $\Rightarrow \varphi((\mathbb{Z}^w)^\perp) = (\mathbb{Z}^{w'})^\perp$

$$H^2(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\varphi} H^2(X', \mathbb{Z})$$

$$\begin{array}{ccc} \int \alpha & & \int \alpha' \\ H^2(T, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\varphi} & H^2(T', \mathbb{Z}) \end{array} \quad \begin{array}{l} \varphi \text{ isométrique par i)} \\ \Rightarrow \text{de Hodge par ii)} \end{array}$$

3<sup>ème</sup> étape: on montre que

$$\exists \mathcal{I}: H^1(T', \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(T, \mathbb{Z}) \quad \left( \begin{array}{l} \text{automatique puisque } \mathcal{I} = \mathcal{I} \circ \mathcal{I} \\ \text{qui préserve décomp.} \\ \text{de Hodge.} \end{array} \right)$$

telle que  $\varphi = \mathcal{I} \circ \mathcal{I}$

Une fois ceci fait on applique Torrelli pour les torres

$$\exists g: T' \rightarrow T \quad \text{tg} \quad \mathcal{I} = g^*$$

$g$  va induire  $f: X' \rightarrow X$  par passage au quotient.

Thm Soit  $T, T'$  deux torres de dimension 2

$$\varphi: H^2(T', \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(T, \mathbb{Z}) \text{ " isométrique de Hodge"}$$

$$\text{s'il existe } \mathcal{I}_2: H^1(T', \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow H^1(T, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \quad \text{tg} \quad \mathcal{I}_2 \circ \mathcal{I}_2 = \varphi \text{ mod } 2$$

$$\Rightarrow \exists \mathcal{I}: H^1(T', \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(T, \mathbb{Z}) \quad \text{tg} \quad \mathcal{I} \circ \mathcal{I} = \varphi.$$

(préserve décomposition de Hodge)

Démontrer que ce résultat s'applique à votre situation,

demande encore pas mal d'outils

"Digression en affiné géométrie over  $\mathbb{F}_2$ "