Giorno 18

29/12/2022

- Examen = 5 janvier
  3h

programme = tout jusqu'à Riemann-Roch
(PAS de théorie des faisceaux)

× quotient
× sous-harmonique
× Riemann-Roch

But : dualité de Serre, interprétation de Riemann-Roch "faisceautique"

Rappel X surface de Riemann

- $\mathcal{F}$ = faisceau $U \longmapsto \mathcal{F}(U)$ groupe abélien

$$V \subseteq U \quad \rho^V_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$$

- $\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G}$ morphisme $\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\alpha_U} \mathcal{G}(U)$

$$\mathcal{F}_p = \text{"stalk à } p\text{"} = \varinjlim_{U \ni p} \mathcal{F}(U)$$

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \iff 0 \to \mathcal{F}_p \xrightarrow{\alpha_p} \mathcal{G}_p \quad \forall p$$

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\beta} \mathcal{G} \to 0 \iff \mathcal{F}_p \xrightarrow{\beta_p} \mathcal{G}_p \to 0 \quad \forall p$$

$H^q(\mathcal{F}, X)$ = cohomologie de Čech de $\mathcal{F}$ sur X.

Thm (suite exacte longue en cohomologie)

Si $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \to 0$ est exacte, alors on a la suite exacte longue suivante

$$0 \to H^0(\mathcal{F}) \to H^0(\mathcal{G}) \to H^0(\mathcal{H}) \xrightarrow{\delta} H^1(\mathcal{F}) \to H^1(\mathcal{G}) \to \cdots$$
$$\to H^1(\mathcal{H}) \xrightarrow{\delta} H^2(\mathcal{F}) \to H^2(\mathcal{G}) \to H^2(\mathcal{H}) \to 0$$

Forster Riemann surfaces § 15.12

- on utilise $\dim_{\mathbb{R}}(X) = 2$ pour montrer que $H^q(\mathcal{F}) = 0 \quad \forall q \geq 3 \quad \forall \mathcal{F}$ faisceau

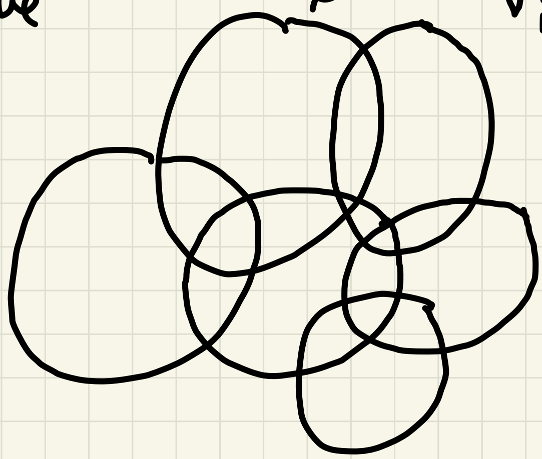
(si $\dim_{\mathbb{R}}(X) = n \quad H^q(\mathcal{F}) = 0 \ \forall q \geq n+1$).

$\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in A}$ recouvrement ouvert

Fait : $\exists\, \mathcal{V} \leq \mathcal{U}$ $\quad \mathcal{V} = (V_i)_{i \in I}$

telle que $\quad \emptyset = V_{i_1} \cap V_{i_2} \cap V_{i_3} \cap V_{i_4}$

$\forall\, i_1 \neq i_2 \neq i_3 \neq i_4$.



[Munkres : dimension theory,

Lebesgue covering dimension $\leq$ inductive

dimension $(X) = 2$]

Alors $\check{C}^q(\mathcal{V}, \mathcal{F}) = (0) \quad q \geq 3$

$f \overset{\in}{=} (f_i) \quad f_i \in \mathcal{F}(\underbrace{V_{i_0} \cap \dots \cap V_{i_q}}_{= \emptyset})$

Construction de $\delta : H^0(\mathcal{H}) \to H^1(\mathcal{F})$

$h \in H^0(\mathcal{H})$

$p \in X \qquad \mathcal{G}_p \xrightarrow{\beta_p} \mathcal{H}_p \to 0$

- $\exists \, (U_i)_{i \in I}$ recouvrement $\quad g_i \in \mathcal{G}(U_i)$

$$\underset{\shortparallel}{\beta(g_i)} \; (= \beta_{U_i}(g_i)) \in \mathcal{H}(U_i)$$

$$h|_{U_i} \; (= \rho_X^{U_i} h).$$

- dans $U_{ij} = U_i \cap U_j$

$$\beta(g_i - g_j) = 0$$

$$0 \to H^0(\mathcal{F}, U_{ij}) \xrightarrow{\alpha} H^0(\mathcal{G}, U_{ij}) \xrightarrow{\beta} H^0(\mathcal{H}, U_{ij})$$

$\exists \, f_{ij} \in H^0(\mathcal{F}, U_{ij}) \quad g_i - g_j = \alpha(f_{ij})$

On pose $\delta h = \underbrace{\{f_{ij}\}}_{f} \in H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$

- $\delta^1 f = 0$ ($f = \{f_{ij}\}$ est un cobord)

car α est injectif.

- δh ne dépend pas du choix, $\mathcal{U}$, des g_i, des f_{ij}.

///

9. Dualité de Serre.

X surface de Riemann connexe compacte

Thm Pour tout diviseur D sur X, il existe une forme bilinéaire non dégénérée

$$q_D : H^0(\Omega^1(-D)) \times H^1(\mathcal{O}(D)) \to \mathbb{C}$$

La dualité de Serre fournit une construction explicite de q_D (par exemple en termes de résidus)

$\Omega^1(-D)$ = faisceau des 1-formes méromorphes sur X telles que

$$\operatorname{div}(\omega) - D \geq 0$$

$$\Omega^1(-D) \text{ "=" } \underbrace{\Omega^1}_{\substack{\text{1-forme} \\ \text{hol. sur } X}} \otimes \underbrace{\mathcal{O}(-D)}_{\substack{\text{fcts méromorphes} \\ \operatorname{div}(f) - D \geq 0}}$$

$H^0(\Omega^1(-D)) = \{\omega$ 1-forme méromorphe sur X, $\operatorname{div}(\omega) \geq D\}$

ω_0 1-forme méromorphe fixée.

$H^0(K_{\omega_0} - D) \ni f \qquad \operatorname{div}(f) + \operatorname{div}(\omega_0) - D \geq 0$

$\omega_f := f\omega_0 \qquad \operatorname{div}(\omega_f) - D \geq 0$

$$H^0(K_{\omega_0}-D) \ni f \longmapsto f\omega_0 \in H^0(\Omega^1(-D))$$

$$H^0(K_{\omega_0}-D) \ni \frac{\omega}{\omega_0} \longleftarrow \omega \in H^0(\Omega^1(-D))$$

lemme $H^0(\Omega^1(-D)) \simeq H^0(K_{\omega_0}-D)$

donc $h^0(\Omega^1(-D)) = h^0(K_{\omega_0}-D)$

dualité de Serre $\Rightarrow h^0(\Omega^1(-D)) = h^1(\mathcal{O}(D))$

$H^0(\Omega^1(-D)) \times H^1(\mathcal{O}(D)) \to \mathbb{C}$ $\qquad \dim_{\mathbb{C}} H^1(\mathcal{O}(D))$

R-R $\quad h^0(D) - h^0(K_{\omega_0}-D) = \deg(D) + 1 - g$

$$\underset{\displaystyle h^0(\mathcal{O}(D))}{\overset{\displaystyle h^0(D)}{\|}} - h^1(\mathcal{O}(D)) = \deg(D) + \frac{1}{2}\chi(X)$$

dualité de Serre + R-R

$$\Rightarrow \boxed{\chi(\mathcal{O}(D)) = \deg(D) + \frac{1}{2}\chi(X)}$$

$$\chi(\mathcal{O}(D)) = h^0(\mathcal{O}(D)) - h^1(\mathcal{O}(D)) \qquad \frac{1}{2}\chi(X) = \frac{1}{2}(2-2g)$$

Remarque : cette formule se généralise aux variétés complexes compactes de toute dimension, et aux variétés algébriques.

Hirzebruch / Grothendieck / Atiyah-Singer

etc...

démonstration de la dualité de Serre

. On se ramène au cas où $D = 0$

$$H^0(\Omega^1) \times H^1(\mathcal{O}) \to \mathbb{C}$$

On suppose la dualité démontrée pour $D = 0$

D quelconque. (récurrence sur $|\deg(D)|$).

$p \in X$ $\quad D \rightsquigarrow D + (p) = D'$

$$0 \to \mathcal{O}(D) \xrightarrow{i} \mathcal{O}(D+p) \longrightarrow \mathcal{F} \to 0$$

$\operatorname{div}(f) + D \geq 0 \rightsquigarrow \operatorname{div}(f) + D + p \geq 0$

. $\mathcal{O}(D)_q = \mathcal{O}(D+p)_q$ si $q \neq p$

$\Rightarrow \mathcal{F}_q = 0$

. $\mathcal{F} = \mathbb{C}_p$ (gratte-ciel) exercice : construire le morphisme $\beta : \mathcal{O}(D+p) \to \mathbb{C}_p$ tel que la suite

$$0 \to \mathcal{O}(D) \xrightarrow{i} \mathcal{O}(D+p) \xrightarrow{\beta} \mathbb{C}_p \to 0$$

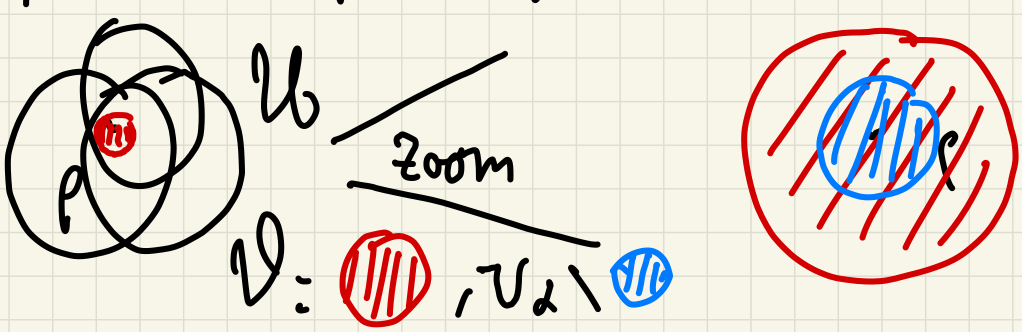
est exacte. (dépend de $n = v_p(D+p)$)

suite exacte longue

$$0 \to H^0(D) \to H^0(D+p) \to H^0(\mathbb{C}_p) \to H^1(D) \to H^1(D+p) \to H^1(\mathbb{C}_p) = 0$$

$\mathcal{U} \to \exists\, \mathcal{V} < \mathcal{U} \quad \mathcal{V} = (V_i)_{i \in I}$

tq $\#\{i,\ p \in V_i\} = 1$



$$\Rightarrow h^0(D) - h^0(D+p) + \underset{\substack{\| \\ 1}}{h^0(\mathcal{O}_p)} - h^1(D) + \underset{\substack{\| \\ 0}}{h^1(\mathcal{O}_p)}$$

$$\chi(\mathcal{O}(D)) + 1 = \chi(\mathcal{O}(D+p))$$

R-R à $\mathcal{O}(D)$ et $\mathcal{O}(D+p)$

récurrence à $\mathcal{O}(D)$ $\quad H^1(\mathcal{O}(D)) \times H^0(\Omega^1(-D)) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$

$$h^1(\mathcal{O}(D)) = h^0(\Omega^1(-D)) = h^0(K-D)$$

$$h^0(D) - h^1(D) + 1 = h^0(D+p) - h^1(D+p)$$

$$h^0(D) - \underset{\text{récurrence}}{\overset{\|}{h^0(K-D)}} + 1$$

$$\underset{\|\ RR}{} \deg(D) + 1 + 1 - g \overset{RR}{=} h^0(D+p) - h^0(K-D-p)$$

$\Rightarrow h^1(D+p) = h^0(K-D-p)$

$$H^1(D+p) \simeq H^0(\Omega^1(-D-p))$$

///

Le cas $D=0$.

$$\varphi : \underset{\omega}{H^0(\Omega^1)} \times H^1(\mathcal{C}) \to \mathbb{C}$$

• on interprète $H^1(X,\mathcal{C})$ comme un espace de 1-forme.

$\mathcal{C}$ = faisceau des fcts $\mathcal{C}^\infty$ sur X

$\mathcal{C}^{0,1}$ = (0,1)-formes $\mathcal{C}^\infty$ sur X

localement $h(z)\, d\bar{z}$ $\quad h \in \mathcal{C}^\infty$

Lemme $\boxed{0 \to \mathcal{O} \xrightarrow{i} \mathcal{E} \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{E}^{0,1} \to 0}$

$$f \text{ hol} \mapsto f\ \mathcal{C}^\infty$$
$$g\ \mathcal{C}^\infty \mapsto \bar\partial g$$

est bien définie $\bar\partial$ est **exacte**

$\bar\partial$ est bien défini

$$\begin{array}{ccc} U_i' & g_i \rightsquigarrow & \bar\partial g_i' = \dfrac{\partial g_i'}{\partial \bar z}\, d\bar z \\ \varphi_{ij}\downarrow & & \\ U_j' & g_j' = g_i' \circ \varphi_{ij}' \rightsquigarrow & \bar\partial g_j' = \dfrac{\partial g_i}{\partial \bar z} \circ \varphi_{ij}\ \overline{\varphi_{ij}'}\, d\bar z \end{array}$$

$$\bar\partial g_j' = \varphi_{ij}^*(\bar\partial g_i')$$

exactitude en $\mathcal{E}$; $\bar\partial g = 0$ ssi g est holomorphe lemme (Dolbeault)

$\mathcal{E} \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{E}^{0,1}$ est surjectif

$\mathbb{D} = \{|z|<1\} \subseteq \mathbb{C}$

$\omega = h(z)\, d\bar z \quad h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{D})$

alors $\exists\, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{D}) \quad \frac{\partial g}{\partial \bar z} = h$

suite exacte longue

$$H^0(\mathcal{E}) \to H^0(\mathcal{E}^{0,1}) \to H^1(\mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{E}) = 0$$

$$H^1(\mathcal{O}) \simeq \{(0,1)\text{-formes sur } X\} / \bar\partial\, \mathcal{C}^\infty(X)$$

Remarque : $\mathcal{F} = \underline{\mathbb{C}}$

$$H^q(X, \underline{\mathbb{C}}) \simeq \{q\text{-formes fermées}\} / d(q-1 \text{ formes})$$

cohomologie de Rham

thm de De Rham

$$\boxed{H^1(X, \mathcal{O}) \simeq \{(0,1)\text{-formes}\} / \bar\partial\, \mathcal{C}^\infty}$$

Accouplement : $\omega \in H^0(\Omega^1) = (1,0)$ forme

$\alpha \in H^1(X, \mathcal{O})$ $\quad \alpha = (0,1)$-forme $\mathcal{C}^\infty$

localement $\omega = h(z)\, dz$ $\quad h$ hol

$\alpha = g(z)\, d\bar z$ $\quad g$ $\mathcal{C}^\infty$

$$q(\omega, \alpha) = \frac{i}{2} \int_X \omega \wedge \alpha \in \mathbb{C}$$

g est bien définie

$$\alpha' = \alpha + \bar\partial f \qquad f\ \mathcal{C}^\infty$$

$$g(\omega, \alpha') = \frac{i}{2}\int \omega \wedge \alpha'$$

$$= g(\omega,\alpha) + \frac{i}{2}\int \underbrace{\omega \wedge \bar\partial f}_{= -d(f\omega)}$$

car ω est holomorphe !

$$\overset{\text{Stokes}}{=} g(\omega,\alpha)$$

///

g est un accouplement parfait, $H^1(X,\mathcal{O})$ est de dimension finie et

$$H^0(\Omega^1) \xrightarrow{g^*} H^1(\mathcal{O})^* \text{ isomorphisme}$$

lemme : $\sigma : H^0(\Omega^1) \to H^1(\mathcal{G})$

$\sigma(\omega) = [\bar{\omega}]$ est surjectif.

$\uparrow$ (0,1) forme

$\Rightarrow \dim H^1(\mathcal{G}) < \infty$

ensuite. $\omega \in H^0(\Omega^1)$ non nul

$$\alpha \in H^1(\mathcal{G}) \mapsto g(\omega, \alpha) \in \mathbb{C}$$

$$g(\omega, \sigma(\omega)) = \frac{i}{2} \int_X \omega \wedge \bar{\omega} > 0$$

(localement $\omega = h(z)\, dz$

$\omega \wedge \bar{\omega} = |h|^2 dz \wedge d\bar{z}$)

$\omega \in H^0(\Omega^1) \mapsto \ell_\omega(\alpha) = g(\omega, \alpha)$

est injective

$$H^0(\Omega^1) \to H^1(\mathcal{O})^* \quad \text{injectif.}$$

$$\begin{array}{c} h^0(\Omega^1) \le \dim_{\mathbb{C}} H^1(\mathcal{O})^* \\ \parallel \\ h^1(\mathcal{O}) \\ \wedge\!\!/ \\ h^0(\Omega^1) \end{array}$$

$$\Rightarrow h^0(\Omega^1) = h^1(\mathcal{O})$$

et $q : H^0(\Omega^1) \times H^1(\mathcal{O}) \to \mathbb{C}$

est parfait.

Reste à démontrer $\left\langle \begin{array}{l} H^1(\mathcal{E}) = 0 \ \text{(facile)} \\ \sigma : H^0(\Omega^1) \to H^1(\mathcal{O}) \\ \text{est surjectif. (difficile)} \end{array} \right.$

fait faisceau de formes lisses $\mathcal{F} =$

$\mathcal{E}, \mathcal{E}^1, \mathcal{E}^2, \mathcal{E}^{(0,1)}, \mathcal{E}^{(1,0)}$

$$\boxed{H^q(X, \mathcal{F}) = 0 \quad \forall q \geq 1}$$

raison : il existe des partitions de l'unité lisses.

$\boxed{H^1(X, \mathcal{E}) = 0}$ $\quad f \in H^1(X, \mathcal{E})$

$\mathcal{U} = (U_\alpha) \quad f_{\alpha\beta} \in \mathcal{C}^\infty(U_\alpha \cap U_\beta)$

$\rightsquigarrow \chi_\alpha \in \mathcal{C}^\infty(U_\alpha)$ support compact

$$\sum \chi_\alpha = 1$$

$$g_\alpha = \sum_{\beta \neq \alpha} \chi_\beta f_{\alpha\beta} \in \mathcal{C}^\infty(U_\alpha)$$

$$g_\alpha - g_\beta = f_{\alpha\beta}$$

$$(f_{\alpha\beta}) \in \mathcal{Z}^1(\mathcal{E}, \mathcal{U})$$

$$(f_{\alpha\beta}) = \delta^1(g_\alpha) \qquad g_\alpha \in \mathcal{C}^0(\mathcal{E}, \mathcal{U})$$

///

lemme de Dolbeault :

- Hörmander Introduction to several complex variables, § I
- Forster, Riemann surfaces,

lemme $\sigma(\omega) = [\bar{\omega}]$ est surjectif de $H^0(\Omega^1)$ dans $H^1(\mathcal{O})$

- Donaldson Riemann surfaces

Indication de démonstration :

$\beta \in H^1(X, \mathcal{O})$ $\quad \beta = (0,1)$ forme lisse

on cherche $\omega \in H^0(\Omega^1)$ tq

$$[\overline{\omega}] = [\beta] \text{ dans } H^1(X, \mathcal{O})$$

on cherche $f \in \mathcal{C}^\infty(X)$ tq

$$\boxed{\overline{\omega} = \beta + \bar{\partial} f.} \qquad (h = \bar{f})$$

$\Leftrightarrow$ on cherche $h \in \mathcal{C}^\infty(X)$

$\bar{\beta} + \partial h$ est holomorphe

$(1,0)$ forme hol ssi $\bar{\partial}(\bar{\beta} + \partial h) = 0$

Lemme

$$\boxed{\exists\, h \in \mathcal{C}^\infty \text{ tq } \bar{\partial} \partial h = \underbrace{\partial \bar{\beta}}_{(1,1)\text{-forme}}.}$$

Lemme ω 2-forme $\mathcal{C}^\infty$ sur X

$\exists h \in \mathcal{C}^\infty$ tq $\omega = \bar\partial \partial h$ ssi

$$\int_X \omega = 0.$$

$\Leftarrow$ Stokes

$\Rightarrow$ Donaldson on construit une solution L^2 ; ensuite Weyl si $\bar\partial\partial h$ est lisse avec $h \in L^2$ alors h est lisse.

$$\left[\text{si } \omega = \bar\partial \bar\beta \qquad \int \omega = \int \bar\partial \bar\beta = \int d\bar\beta = 0 \right]$$

$\bar\beta$ (1,0) forme.

Résumé :

- thm uniformisation (sous harmonique)
- thm Riemann-Roch

autre approche à R.R

- $h^1(\mathcal{O}) < \infty$ pas facile — lemme de Schwarz (Reyssat) / théorie de Hodge (Donaldson)
- $\chi(\mathcal{O}[D]) = 1-g + \deg D$ (suite exacte longue) avec $g = \dim h^1(\mathcal{O})$
- dualité de Serre (à l'aide des résidus)

$\Rightarrow g =$ genre topologique de X

Exercices :

X surface de R. connexe compacte

$f : X \to \hat{\mathbb{C}}$ surjective hol.

$\deg(f) = n$

$$[\mathcal{M}(G) : \mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}})] = [\mathcal{M}(G), \mathbb{C}(f)] = n$$

$\leq n$ (voir cours 13 ?)

$\geq n$ $\quad z \in \hat{\mathbb{C}} \quad z \neq \infty \quad z \in f(\mathrm{Ram} f)$

$f^{-1}(z) = \{w_1, \dots, w_n\}$ $\quad g \in \mathcal{M}(G)$

$g(w_i) \neq g(w_j) \quad i \neq j.$

$P \in \mathbb{C}(f)[T]$ polynôme minimal de g

$\deg(P) \geq n$.

$$P(T) = \alpha_0(f)\,T^h + \alpha_1(f)\,T^{h-1} + \dots + \alpha_h(f)$$

$$\alpha_i(f) = \alpha_i \circ f \qquad \alpha_i \in \mathbb{C}(T)$$

$$P(g) = 0$$

$$\alpha_0(f)\,g^h + \dots + \alpha_h(f) = 0$$

on applique à $w_1 \dots w_n$

$g(w_i)$ est un zéro du polynôme $\mathbb{C}$

$$\underset{\mathbb{C}}{\underset{\uparrow}{\alpha_0(f(z))}}\,T^h + \dots + \underset{\mathbb{C}}{\underset{\uparrow}{\alpha_h(f(z))}}$$

$\Rightarrow k \geq n$ ///

$\deg(f) = 2 \qquad f : X \to \widehat{\mathbb{C}}$

(X est hyperelliptique).

on choisit $g \in \mathcal{M}(X) \setminus \mathbb{C}(f)$

$[\mathcal{M}(X) : \mathbb{C}(f)] = 2$

$\Rightarrow \mathcal{M}(X) = \mathbb{C}(f)\, g \oplus \mathbb{C}(f)$

$g^2 = b(f)\, g + c(f) \qquad b, c \in \mathbb{C}(T)$

$\tilde{g} = g - \frac{1}{2} b(f) \qquad \tilde{g} \notin \mathbb{C}(f)$

$\tilde{g}^2 = c(f) = \dfrac{P(f)}{Q(f)}$

$\hat{g} = Q(f)\, \tilde{g} \notin \mathbb{C}(f) \qquad \hat{g}^2 = P(f)\, Q(f) \in \mathbb{C}[f]$

On a trouvé $\hat{g} \in \mathcal{O}(X) \setminus \mathbb{C}(f)$

$$\hat{g}^2 = \hat{P}(f) \qquad \hat{P} \in \underset{\text{unitaire}}{\mathbb{C}[T]}$$

$$\hat{P}^{-1}(0) = \{ z_1 \dots z_m \}$$

$$\hat{P}(z) = \prod_{i=1}^{m} (z - z_i)^{\alpha_i} \qquad \alpha_i \in \mathbb{N}^*$$

$$= \left(\prod_{\alpha_i \text{ impair}} (z - z_i) \right) \times \prod_{\alpha_i \text{ impair}} (z - z_i)^{\alpha_i - 1} \prod_{\alpha_i \text{ pair}} (z - z_i)$$

$$= \prod_{\alpha_i \text{ impaire}} (z - z_i) \qquad Q^2(z)$$

$$Q \in \mathbb{C}[T].$$

On pose $g_* = \dfrac{\hat{g}}{Q(f)} \notin \mathbb{C}(f)$

On a trouvé $g_* \in \mathcal{O}(X) \setminus \mathbb{C}(f)$

et $z_1 \dots z_n$ distincts tels que

$$\boxed{g_*^2 = \prod_{i=1}^{n} (f - z_i)}$$

On regarde $G = \{ (z,w) \in \mathbb{C}^2$ tq
$$w^2 = \prod_{i=1}^{n} (z - z_i) \}$$

On a vu que G est une surface de R.

alors $p = (z,w)$ $z \neq z_i$ carte z

$p = (z_i, 0)$ carte w

n est impair. (hypothèse)

$\overline{G} = G \cup \{\infty\}$

carte à l'∞ est donnée.

$$
\begin{tikzcd}
C \cap \{|t|>R\} \arrow[dr, "\frac{1}{z}"'] & & \{|t|<\frac{1}{\sqrt{R}}\} \arrow[ll, "\sim"', "\varphi"] \arrow[dl, "t^2"] \\
& \{|t|<\frac{1}{R}\} &
\end{tikzcd}
$$

$R \gg 0$ $\qquad (z,w) \mapsto \frac{1}{z}$ $\qquad$ revêt. connexe $2:1$ $\qquad t \mapsto t^2$

φ est la carte à l'infini.

$$\varphi(t) \overset{?}{=} (z(t), w(t)) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cdot\ w^2(t) = \prod_{i=1}^{n} (z(t) - z_i) \\ \cdot\ \frac{1}{z(t)} = t^2 \end{array} \right.$$

$$\varphi(t) = \left(\frac{1}{t^2}, \prod \left(\frac{1}{t^2} - z_i \right)^{1/2} \right)$$

$$\left(\prod_{i=1}^{m} \left(\frac{1}{t^2} - z_i\right)\right)^{1/2}$$

$$= \frac{1}{t^m} \left(\prod_{i=1}^{m} \left(1 - z_i t^2\right)\right)^{1/2}$$

bien définie dès que $|z_i t^2| < 1 \quad \forall i$

$$\varphi(t) = \left(\frac{1}{t^2}, \frac{1}{t^m}\left[\prod_{i=1}^{m} (1 - z_i t^2)\right]^{1/2}\right)$$

$g_\alpha : X \to \hat{\mathbb{C}}$. On veut construire

$\varphi : X \to \overline{G}$ un biholomorphisme.

$$\overline{G} = \left\{ w^2 = \prod_{i=1}^{m} (t - z_i) \right\} \cup \{\infty\}$$

$$\varphi(p) = (z(p), w(p)) \in \mathbb{C}^2$$

$p \in X$ $\quad \begin{cases} w(p) = g_*(p) \\ z(p) = f(p) \end{cases}$

1. $\varphi : X \setminus \{\text{ens. fini}\} \to G$

pôle de f = f pôle deg $\qquad G = \{w^2 = \prod(z - z_i)\} \subset \mathbb{C}^2$

$$\left[g_*^2 = \prod_{i=1}^{n} (f - z_i) \right]$$

2. φ est holomorphe. en effet

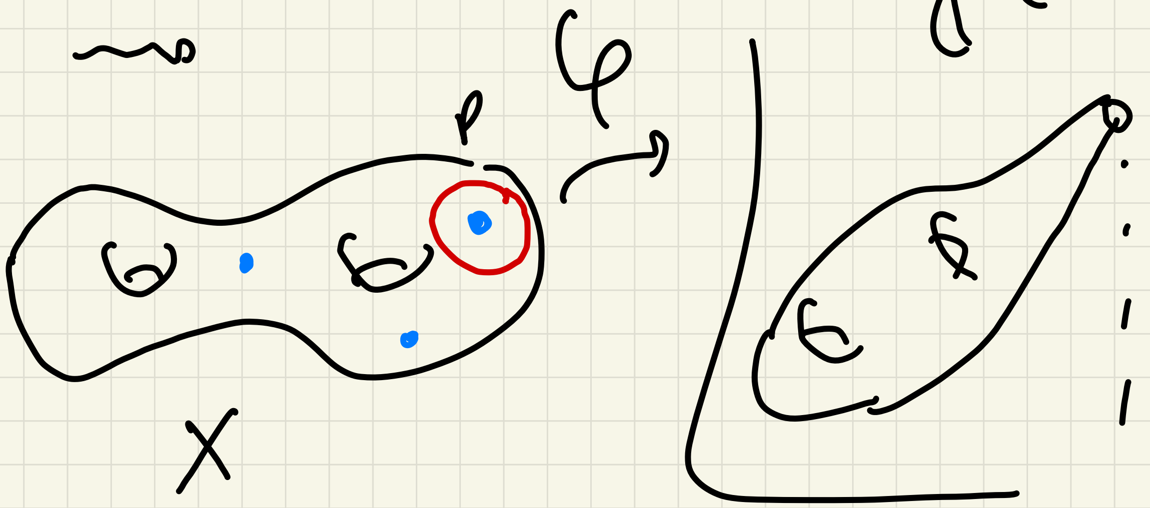
$z \circ \varphi = f$ hol. sur $X \setminus \{\text{ens fini}\}$

$w \circ \varphi = g_*$

3. φ s'étend de X à $\overline{\mathbb{C}}$

$\varphi(p) = \infty$ si $f(p) = g_*(p) = \infty$

$\rightsquigarrow$



• φ n'a pas de "singularité essentielle" ∞ car $\varphi = (f, g(x))$ est méromorphe.

• carte en p (s) $\quad f(s) = \alpha s^{-k}(1+\dots)$

carte en ∞ $\quad g_*(s) = \beta s^{\ell}(1+\dots)$

$\varphi(f) = (1/f^2,\ 1+\dots/f^m)$

$$\varphi(s) = \left(\alpha s^{-k}(1+\dots),\ \beta s^{-\ell}(1+\dots)\right)$$

$$\psi(t) = \left(\frac{1}{t^{2}},\ \frac{1+\dots}{t^{m}}\right)$$

$\psi^{-1} \circ \varphi(s)$ est holomorphe.

$$\frac{1}{t^{2}} = \alpha s^{-k}(1+o(1))$$

$$\Rightarrow t^{2} = \frac{1}{\alpha} s^{k}(1+o(1))$$

si $t = \psi^{-1} \circ \varphi(s)$ alors

$$t^{2} = \frac{1}{\alpha} s^{k}(1+o(1))$$

$\Rightarrow \psi^{-1} \circ \varphi(s)$ est C^{0} en 0 et

hol. sur $U - \{p\} \Rightarrow \psi^{-1} \circ \varphi$ est hol. ////

4. $\deg(\varphi) = 1$

$g_\infty \in \mathcal{M}(X) \setminus \mathbb{C}(T)$

$\mathcal{M}(X) = \mathbb{C}(T)\, g_\infty \oplus \mathbb{C}(T)$

$\varphi(p) = (f(p), g_\infty(p)) : X \to \overline{G}$

- φ est non constante $\Rightarrow$ φ est surjective car X et $\overline{G}$ sont des surfaces de R. compacts.

- $\deg(\varphi)$ est bien définie $\in \mathbb{N}^\times$

$\varphi(p_1) = \varphi(p_2) \neq \infty$ $\quad g_\infty(p_1) = g_\infty(p_2)$

$f(p_1) = f(p_2)$

si $p_1 \neq p_2$ $\exists h \in \mathcal{M}(X)$ $\quad h(p_1) \neq h(p_2)$

Or $h = g_* a(f) + b(f)$

$$h(p_1) = g_*(p_1)\, a(f(p_1)) + b f(p_1)$$

$$= g_*(p_2)\, a(f(p_2)) + b f(p_2)$$

$$= h(p_2) \quad \text{absurde}.$$

Thm X hyperelliptique.

$\exists\, z_1 \dots z_n$ distincts et un biholomorphisme

$\varphi : X \to C \cup \{\infty\}$ avec

$$C = \left\{ w^2 = \prod_{i=1}^{n} (z - z_i) \right\}$$

genre $(X) = \frac{n-1}{2}$ (n impair)

but : construire une base de 1-formes holomorphes (trouver $\frac{n-1}{2}$ formes hol. indépendantes). on $\overline{C_1} = \{w^2 = \prod_{i=1}^{n} (z - z_i)\}$

$\omega = \frac{dz}{w}$ est holomorphe dans $\overline{C}$.

- $p \in \overline{C}$ carte $\underset{D}{\overset{\text{hol}}{\underset{\cap}{A}}} \xrightarrow{\varphi} (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$

$(\varphi_1(0), \varphi_2(0)) = p$

$$\boxed{\forall p \quad \varphi_p^*\left(\frac{dz}{w}\right) = \frac{\varphi_1' \, dt}{\varphi_2}}$$

est hol.

• $p \in C \setminus \{(z_i, 0)\}$

carte $\boxed{z}$ $\qquad w^2 = \prod (z - z_i)$

$$w = \prod (z - z_i)^{1/2}$$

bien définie localement.

$$\begin{cases} \varphi_1(t) = t \\ \varphi_2(t) = \prod (t - z_i)^{1/2} \end{cases}$$

$$\varphi^* \left| \frac{dz}{w} \right| = \frac{dt}{\prod (t - z_i)^{1/2}}$$

hol. non nul.

• $p = (z_i, 0)$ $\quad$ carte $\boxed{w}$

$$\left| \begin{array}{l} \varphi_1(t) = z_i + \\ \varphi_2(t) = t \end{array} \right.$$

$$(z - z_i) \prod_{j \neq i} (z - z_j) = w^2$$

$$\| \\ t^2$$

$$(z - z_i') = \frac{w^2}{\prod_{j \neq i} (z - z_j')} = \frac{t^2}{\prod (z_i' + \alpha_1 t \ldots - z_j')}$$

$$z(t) = z_i' + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \ldots$$

$$\Rightarrow \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \ldots = \frac{t^2}{\prod (z_i' - z_j' + \alpha_1 t + \ldots)}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = 0 \qquad \alpha_2 = \frac{1}{\prod_{i \neq j} (z_i - z_j')}$$

$$z(t) = z_i' + \alpha_2 t^2 + \ldots$$

$$\varphi_p^* \left(\frac{dz}{w} \right) = \frac{d(z_i' + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3 + \ldots)}{t}$$

$$= \frac{2\alpha_2 \cancel{t}\, dt + 3\alpha_3 t^{\cancel{2}} dt + \ldots}{\cancel{t}}$$

$\varphi_p^{*}\left(\frac{dz}{w}\right)$ hol non nul

+ en ∞ $\varphi_\infty(t) = \left(\frac{1}{t^2}, \frac{1}{t^n}(1+\dots)\right)$

$$\varphi_\infty^{*}\left(\frac{dz}{w}\right) = \frac{-2t^{-3}\,dt}{t^n(1+\dots)}$$

n impair $(n \geq 3)$ hol. au vois. de φ'_∞

zéro d'ordre $n-3$.

$\omega = \frac{dz}{w}$ hol. sur $\bar{C}$ unique zéro d'ordre $n-3$

$$K_\omega = (n-3)(\infty)$$

$$2g-2 \underset{RH}{=} \deg(K_\omega) = n-3$$

mal calculé.

Une base de $H^0(\Omega^1_{C_1})$ est donnée par $\underset{\omega_k}{\underbrace{z^k \frac{dz}{w}}}$ avec $0 \leq k \leq n-3$.

$$z \frac{dz}{w} \rightsquigarrow \text{la forme à l'}\infty$$

$$\frac{t^{-2}\ t^{-3}\, dt}{t^{n}(1+t\ldots)}$$

$$\text{ordre}(\infty) = n-5$$

Liberté : il faut calculer les zéros de ω_k et montrer que $\{\omega_k\}$ sont libres.

(on regarde ω_k à l'infini).

$\sum a_k \omega_k = 0$