Cours 2

02/11/2022

I. 2 Surfaces de Riemann

définition (provisoire)

Une surface de R. est la donnée

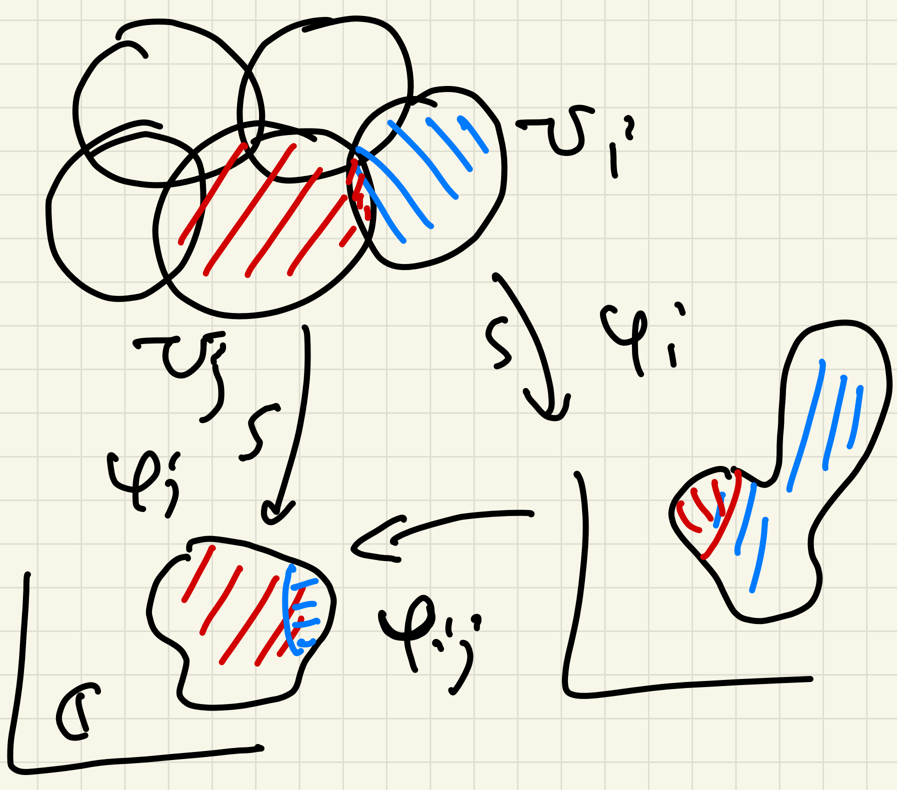
- un espace topologique S
  (Hausdorff / séparé)
- famille de paires (U_i, φ_i)

① $\{U_i\}_{i \in I}$ recouvrement ouvert de S

② $\varphi_i : U_i \to \mathbb{C}$ homéo sur leur image

(*) Condition de recollement
$\varphi_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ est hol. $\forall i, j$

dessin



$$\varphi_{ij} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

hol

⚠ différentes familles $\{(U_i, \varphi_i)\}$ définissent la même structure.

terminologie famille $\{(U_i, \varphi_i)\}$ vérifiant (*) est un atlas hol.

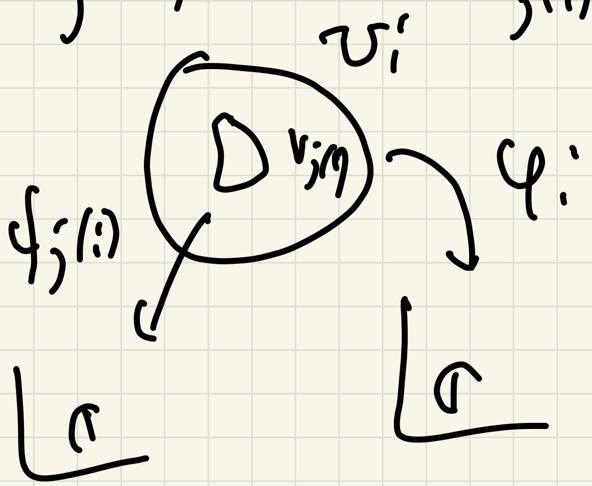
(sur S)

$\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}$ atlas hol.

$\mathcal{B} = \{(V_j, \psi_j)\}$

$\mathcal{B}$ raffine $\mathcal{A}$ ssi $\forall i \in I$

$\exists j(i) \in J \quad V_{j(i)} \subseteq U_i$



$\varphi_i \circ \psi_{j(i)}^{-1}$ est hol.

$\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ (deux atlas hol. sur S)

sont équivalents ssi $\exists\, \mathcal{B}$ atlas hol.

tq $\mathcal{B}$ raffine $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$

définition (surface de R.)

La donnée d'une classe d'équivalence d'atlas hol. sur un espace topologique séparé S.

"surface de R" = variété de dimension 2 réelle, applications de recollement sont hol.

terminologie $\mathcal{S}$, $\mathcal{O}$ surface de R
$\mathcal{L}$ atlas hol.
$\mathcal{O} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$

Une carte hol. centrée en $a \in \mathcal{S}$ est une paire (U, φ)

U ouvert $\ni a$ $(\varphi(a) = 0)$
$\varphi : U \to \mathbb{C}$ homéo sur $\varphi(U)$

tq $\forall i$ $\varphi \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U \cap U_i) \to \mathbb{C}$ est hol.

<u>Lemme</u> $\forall a \in \mathcal{S}$, $\forall V$ ouvert $\ni a$, il existe une carte hol. centrée (U, φ) en a tq $U \subseteq V$.

démo

$\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}$ $a \in U_i$

$U = V \cap U_i$ $\varphi = \varphi_i|_U$

///

exemple • $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ouvert

$\mathcal{A} = \{(\Omega, id)\}$

$\mathcal{A}' = \{(U, id)\}_{U \subseteq \Omega \text{ ouvert}}$

(atlas maximal)

• $S' \subseteq (S, \mathcal{A})$ ouvert $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}$

$\mathcal{A}' = \{(U_i \cap S', \varphi_i|_{U_i \cap S'})\}$

atlas hol. sur S'.

définition $(S, \mathcal{A})$ $(S', \mathcal{A}')$

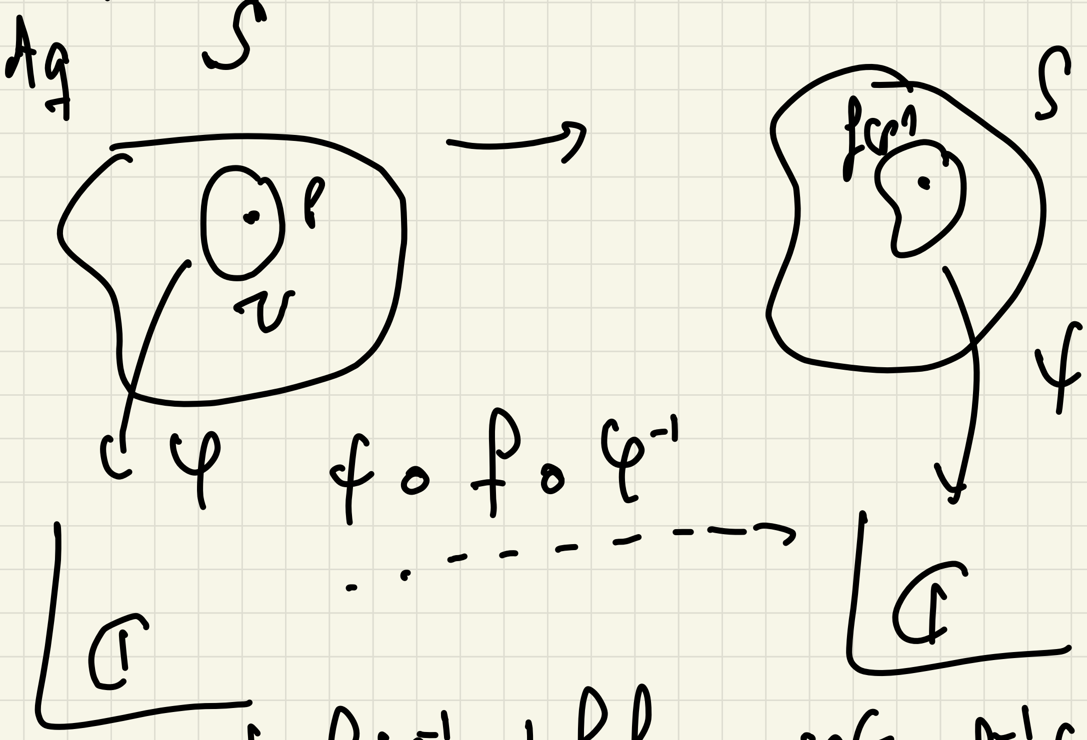
surfaces de R. $f : S \to S'$

On dit que f est <u>hol.</u> si

$\forall p \in S$ $\exists$ (U, φ) carte hol. centrée

en p, (V, ψ) carte hol. centrée en $f(p)$

Ag



$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est hol. sur $\varphi(U \cap f^{-1}(V))$

observation si $f : S \to S'$ est hol.,
pour toutes cartes hol. centrées en p et
$f(p)$ (U, φ) et (V, ψ) on a

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \text{ est hol.}$$

[car la composée de 2 fonctions hol.
reste hol.]

lemme $f : S \to S'$, $g : S' \to S''$
deux fonctions hol. Alors $g \circ f$ est
hol.

démo $p \in S$ (φ, U) (ψ, V) (ξ, W)
centrée en p $f(p)$ $gf(p)$

$$\xi \circ g \circ f \circ \varphi^{-1} = (\xi \circ g \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \text{ hol} \quad ///$$

<u>terminologie</u> $f : S \to S'$ est un biholomorphisme ssi f est hol. et bijective.

<u>remarque</u> si c'est le cas alors f^{-1} est automatiquement hol. (exercice)

<u>exemple</u> $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}$ atlas hol.

$\varphi_i : U_i \to \varphi(U_i)$ est un biholomorphisme.

$U_i \subset S$, $\varphi(U_i) \subset \mathbb{C}$

Thm (forme locale des applications hol.)

$f : S \to S'$ hol. non constante, $p \in S$ connexe

$\exists$ cartes hol. (U, φ) centrées en p, (V, ψ) en $f(p)$ tq

$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(z) = z^k$ $\quad k \in \mathbb{N}^\times$

I.3 Premiers exemples

- La sphère de Riemann

$S^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

topologie ouverts $\left[\begin{array}{l} = U \text{ ouvert de } \mathbb{C} \\ = \{\infty\} \cup \mathbb{C} \setminus K \\ \quad \text{avec } K \text{ compact} \end{array}\right.$

exercice : S^1 est homéomorphe à S^2

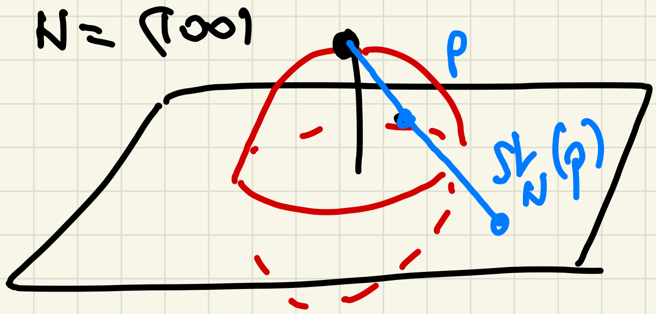
2 cartes $U_0 = \mathbb{C}$ $\qquad U_1 = \mathbb{C}^\times \cup \{\infty\}$

$\varphi_0(z) = z$ $\qquad \varphi_1(z) = 1/z$, $\varphi_1(\infty) = 0$

$\varphi_1 : U_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$ homéo

(*) $\varphi_{10} = \varphi_1 \circ \varphi_0^{-1} : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}$

$\varphi_{01}(z) = 1/z$ hol.



$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$

$$st_N : \underset{\underset{\mathbb{R}^3}{\cap}}{S^2} \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

$$\begin{cases} p=(u,v,w) \mapsto \dfrac{u}{w-1} + i\,\dfrac{v}{w-1} \\ st_N(100) = \infty \end{cases}$$

<u>exercice</u> : st_N est un homéomorphisme

On note la sphère de R. soit $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$
soit $\hat{\mathbb{C}}$ (ou $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$)
mais ~~pas S^2~~ !

· Courbes elliptiques

$\omega \in \mathbb{H} = \{ z \in \mathbb{C} , \operatorname{Im}(z) > 0 \}$

demi-plan de Poincaré

$\Lambda = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega = \{ n + m\omega , n, m \in \mathbb{Z} \}$

$\subseteq (\mathbb{C}, +)$

sous-groupe de $(\mathbb{C}, +)$ discret de rang 2.

(réseau).

$\mathbb{C} \ni z, z'$ $z \sim z'$ ssi $z - z' \in \Lambda$

$E = \mathbb{C}/\Lambda = \{$ classes d'équivalence pour $\sim \}$.

obs : E est un groupe

Thm $E = \mathbb{C}/\Lambda$ muni de la topologie quotient est muni d'une unique structure de surface de R. tq

$\pi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}/\Lambda$ est hol.

remarque :

① loi d'addition sur $\mathbb{C}/\Lambda$ est hol.

$E \ni z \longmapsto z + z_0 \in E$ hol. $\forall z_0 \in E$

② courbe elliptique $\stackrel{\text{def}}{=}$ surface de R. compacte munie d'une structure de groupe hol.

démonstration

$\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Lambda$

a) $\mathbb{C}/\Lambda$ est métrisable

$z, z' \in \mathbb{C}$

$$d(\pi(z), \pi(z')) = \inf_{\lambda \in \Lambda} |z - z' + \lambda|$$

inf est atteint :

$$\{\lambda,\ |z-z'+\lambda| \leq |z-z'|\} \subseteq \{|\lambda| \leq 2|z-z'|\}_{\lambda \in \Lambda}$$

fini

$d(p, p') = 0$

$p = \pi(z)$
$p' = \pi(z')$

$$d(\pi(z), \pi(z')) = 0 \Rightarrow \exists \lambda \in \Lambda$$
$$|z - z' + \lambda| = 0$$
$$\Rightarrow z \sim z'.$$
$$\Rightarrow p = p'.$$

b) construction d'un atlas hol.

$$\rho < \frac{1}{4} \min \{ |\lambda| , \lambda \in \Lambda \setminus \{0\} \}$$

lemme : $z \in \mathbb{C}$ $\pi : B(z,\rho) \to \pi(B(z,\rho))$

est une isométrie.

démo : $d(\pi(z+\alpha), \pi(z+\alpha')) =$

$|\alpha|, |\alpha'| < \rho$

$$= \inf_{\lambda \in \Lambda} |(z+\alpha) - (z'+\alpha') + \lambda|$$

$$= \inf_{\Lambda} |\alpha - \alpha' + \lambda|$$

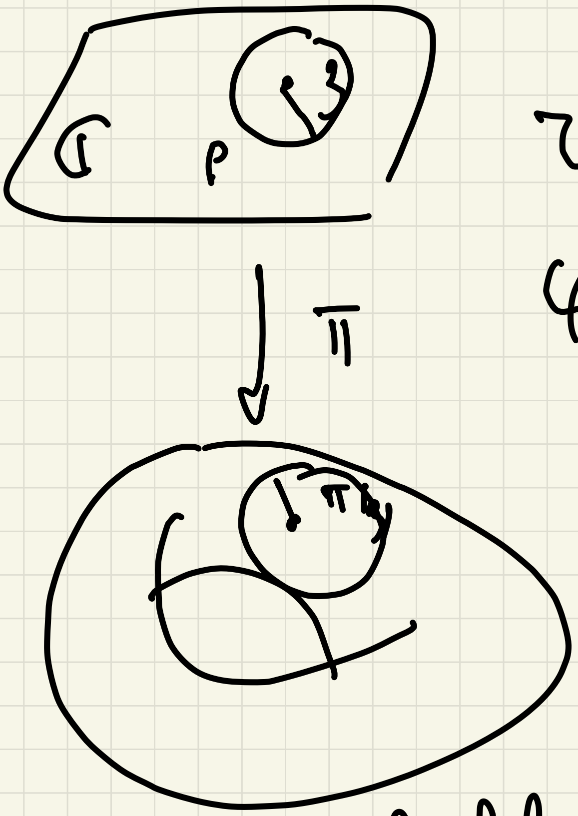
$$\underset{(\lambda=0)}{\leq} |\alpha - \alpha'| \leq 2\rho$$

$\lambda \neq 0$

$$|\alpha - \alpha' + \lambda| \geq |\lambda| - |\alpha - \alpha'| > 4\rho - 2\rho = 2\rho$$

$$\Rightarrow d(\pi(z+\alpha), \pi(z'+\alpha')) = |\alpha - \alpha'| \qquad ///$$

$\mathcal{A} = \{ (U_z, \varphi_z) \}_{z \in \mathbb{C}}$



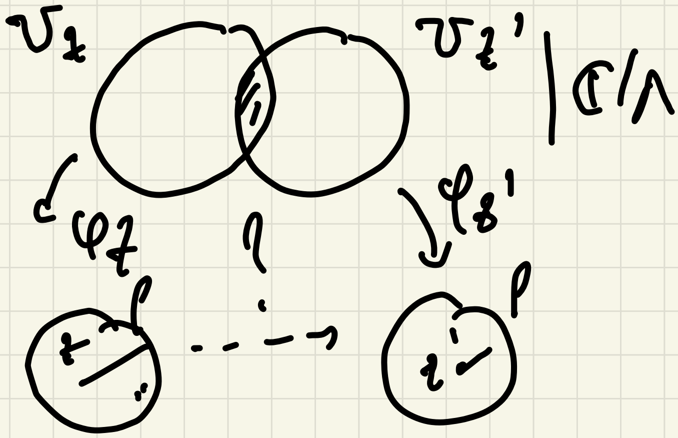
$U_z = \pi(B(z,\rho))$

$\varphi_z = \pi^{-1}\big|_{B(z,\rho)}$

$\varphi_z : U_z \xrightarrow{\sim} B(z,\rho) \subset \mathbb{C}$

c) $\mathcal{A}$ est un atlas hol.

$U_z \cap U_{z'} \neq \emptyset$



$\exists w_0 \in \mathbb{C} \ \exists \lambda_0 \in \Lambda$

$|z - w_0| < \rho$

$|z' - w_0 - \lambda_0| < \rho$

On calcule $\varphi_{z'} \circ \varphi_z^{-1}(w) = w' =$ unique

point de $\mathbb{C}$ tq $\begin{cases} |w' - z'| < \rho \\ w' - w = \lambda \in \Lambda \end{cases}$

en fait $\underline{w' = w + \lambda_0}$

alors $\varphi_{z'} \circ \varphi_z^{-1}(w) = w + \lambda_0$ est lol !

$$|\lambda - \lambda_0| = |\underbrace{(w' - z')}_{< \rho} + \underbrace{(z' - w_0 - \lambda_0)}_{< \rho} + \underbrace{(w_0 - \underbrace{w' + \lambda}_{w})}_{< \rho}|$$

$$< 3\rho \quad \Rightarrow \lambda = \lambda_0$$

///

d) $\mathbb{C}/\Lambda$ est homéomorphe à $S^1 \times S^1$

!

exercice

ex $\omega = i$ $\quad \mathbb{C}/\mathbb{Z}[i] \simeq \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$

$$\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \xrightarrow[\cong]{e^{2i\pi},\, e^{2i\pi}} S^1 \times S^1$$

cas général $\quad L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}$-linéaire $\quad$ tq $\begin{cases} L(1,0) = (1,0) \\ L(\omega) = i \end{cases}$

⚠ $\mathbb{C}/\Lambda$ n'est pas en général biholomorphe à $\mathbb{C}/\Lambda$.

Sous-variétés affines

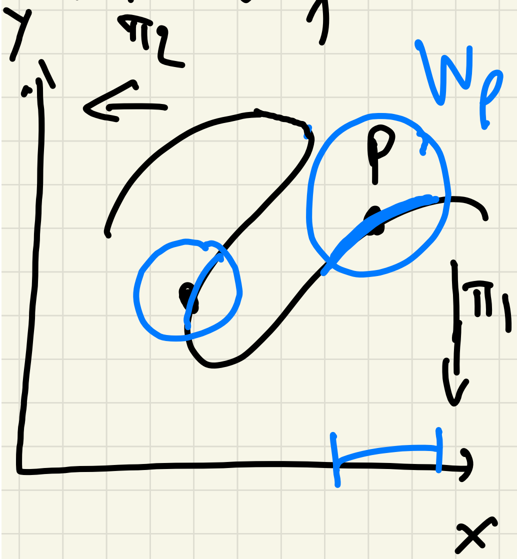
$$P(x,y) = \sum a_{ij} x^i y^j \qquad a_{ij} \in \mathbb{C}$$

$$\in \mathbb{C}[x,y] \quad \text{non constant}$$

$$\pi_1 : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C} \qquad\qquad \pi_2 : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$$
$$(x,y) \mapsto x \qquad\qquad (x,y) \mapsto y.$$

Thm Le lieu $\underbrace{(P=0)}_{C_P} \setminus \left\{ \frac{\partial P}{\partial x} = 0, \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \right\}$ est muni d'une unique structure de surface de R. tq $\pi_1 : C_P \to \mathbb{C}$ et $\pi_2 : C_P \to \mathbb{C}$ ont holomorphes.

démᵒ : conséquence "directe" du thm des fonctions implicites analytiques.



$\{P=0\}$

on suppose

$(P=0) \cap \{ \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \} = \emptyset$

• $p \in \{P=0\}$ $\quad \frac{\partial P}{\partial y}(p) \neq 0$

TFI analytique $\exists W_p$ vab. de p (ds $\mathbb{C}^2$)

Aq $(P=0) \cap W_p = \{ (x, \theta_p(x)) \}$

avec θ_p hol.

• $\frac{\partial P}{\partial x}(p) \neq 0$ $\quad (P=0) \cap W_p = \{ (\eta_p(y), y) \}$

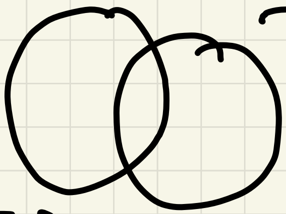
η_p hol.

$\mathcal{A} = \{(U_p, \varphi_p)\}_{p \in \{f=0\}}$

$U_p = W_p \cap \{f=0\}$.

$\left[\begin{array}{ll} \text{si } \dfrac{\partial f}{\partial x}(p) \neq 0 & \varphi_p(x,y) = \pi_2(x,y) = y. \\ & \varphi_p^{-1}(y) = (\eta_p(y), y) \\ \text{si } \dfrac{\partial f}{\partial y}(p) \neq 0 & \varphi_p(x,y) = \pi(x,y) = x \\ & \varphi_p^{-1}(x) = (x, \theta_p(x)) \end{array}\right.$

$\mathcal{A}$ = atlas hol.



$U_{p'}$ $\quad \varphi_p \circ \varphi_{p'}^{-1} = \,?$

$U_p \qquad \dfrac{\partial f}{\partial x}(p') \neq 0 \quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(p) \neq 0$

$\varphi_p \circ \varphi_{p'}^{-1}(y) = \varphi_p(\eta_{p'}(y), y) = \eta_{p'}(y)$ ///

remarque TFI analytique se ramène au TFI réel

$P : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ | $x = x_1 + i x_2$

$\quad\ \ \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ | $y = y_1 + i y_2$

$(x_1\ x_2\ y_1\ y_2) \longrightarrow (Q, R)$ | $P = Q + iR$

$$dP = \begin{pmatrix} Q_{x_1} & Q_{x_2} & Q_{y_1} & Q_{y_2} \\ R_{x_1} & R_{x_2} & R_{y_1} & R_{y_2} \end{pmatrix}$$

on veut rang $(dP) = 2$ si $\frac{\partial P}{\partial x} \neq 0$

$$\left|\frac{\partial P}{\partial x}\right|^2 = \left(Q_{x_1} R_{x_2} - R_{x_1} Q_{x_2}\right)$$

$$(P=0) \cap W_p = \left\{ (x_1, x_2, Q_p^{(1)}(x), Q_p^{(2)}(x)) \right\}$$

On pose $\theta_p(x) = \theta_p^{(1)}(x_1, x_2) + i\,\theta_p^{(2)}(x_1, x_2)$

$$\Phi(x, \theta_p(x)) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \Phi(x, \theta_p(x)) = 0$$

$$= \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, \theta_p(x)) \cdot \frac{\partial \theta_p}{\partial \bar{x}}(x)$$

invertible !

$= 0$

///

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ hol. bijective

$f(z) = az + b$

1. $g(z) = \dfrac{1}{f(1/z)} : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}$

$g|_{D(0,1)}$ est bornée car f est bijectif $\Rightarrow g$ hol. sur $\mathbb{C}$

$\Rightarrow |f(z)| \leq A|z| + B$

$\Rightarrow f(z) = az + b$

2. $k = \mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ p premier

$f(z) = z^p$ $\quad f : \mathbb{F}_p \to \mathbb{F}_p$ injectif !

$\mathrm{Aut}(\mathbb{H}) = PSL(2,\mathbb{R})$

$\mathrm{Aut}(\mathbb{C}) = \mathrm{Aff}(\mathbb{C}) = \{az+b\}$

$\mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}}) = \ ?$

- $f : \widehat{\mathbb{C}} \xrightarrow{hol.} \widehat{\mathbb{C}}$. Montrer que

$f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ avec $P, Q \in \mathbb{C}[z]$.

. $P, Q \in \mathbb{C}[z]$ $Q \not\equiv 0$

$\dfrac{P}{Q} : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ hol. ?

$f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ hol. (non constante)

- $f^{-1}(\infty)$ discret, $\hat{\mathbb{C}}$ compact

$\Rightarrow f^{-1}(\infty)$ fini

- $f^{-1}(\infty) = \{z_0, \dots, z_\ell\}$

au voisinage de z_0 $f : (\mathbb{C}, z_0) \to (\hat{\mathbb{C}}, \infty)$

$$\frac{1}{f(z_0+h)} = \sum_{n \geq 1} a_n h^n \qquad \begin{array}{c} \sum |a_n| r^n < \infty \\ \exists r > 0 \end{array}$$

$$= a_k h^k \left(1 + \sum \alpha_j h^j\right)$$

$$\left| \frac{1}{f(z_0+h)} \right| \geq C \, |h|^k \quad \text{pour } |h| \ll 1$$

$g(z) = f(z)\,(z-z_0)^k$ est hol. en z_0

$h = z - z_0$

$$g(z) = \frac{1}{\frac{1}{f(z_0+h)}} \times h^k = \frac{h^k}{a_k h^k \left(1 + \sum \alpha_j h^j\right)}$$

$$\longrightarrow \frac{1}{a_k}.$$

$$\hat{g}(z) = f(z) \times \prod_{i=0}^{e} (z - z_i)^{k_i}$$

est hol. $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

et hol. $\hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$

Lemme $\hat{g} : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ hol. telle que $\hat{g}(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{C}$. Alors $\hat{g}$ est un polynôme.

<u>démo</u> $\hat{g}(\infty) = \infty$

$$h(z) = \frac{1}{g\left(\frac{1}{z}\right)} \quad \text{hol.}$$

$$= a_k z^k \left(1 + \sum_{j \geq 1} \alpha_j z^j\right)$$

$$|h(z)| \geq \frac{|a_k|}{2} |z|^k$$

$|z| \leq r \ll 1$

$$|w| \geq \frac{1}{2} \quad |g(w)| \leq \frac{2}{|a_k|} |w|^k$$

$w = 1/z$

estimées de Cauchy $\Rightarrow$ $\hat{g}$ est un polynôme de degré $\leq h$.

$$\mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}}) = \{ g : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}} \text{ hol. bijective} \}$$

$$= \left\{ \frac{P}{Q} : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}} \text{ bijective},\ P, Q \in \mathbb{C}[z],\ P^{-1}(0) \cap Q^{-1}(0) = \emptyset,\ Q \not\equiv 0 \right\}$$

$$\cup \quad \cap$$

$$= \left\{ z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d},\ ad-bc \neq 0,\ a,b,c,d \in \mathbb{C} \right\}$$

$g \in \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$

- $g(\infty) = \infty$

  $\hookrightarrow g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ hol. bijective

  $g(z) = az + b$

- $g(\infty) = z_0 \in \mathbb{C}$

  $$h(z) = \frac{1}{z - z_0} \in \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$$

  $h \circ g(\infty) = h(z_0) = \infty$

  $g = h^{-1}(az+b)$ Möbius!

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\mathrm{Aut}(\mathbb{H}) &= PSL(2,\mathbb{R}) \\
\mathrm{Aut}(\mathbb{C}) &= \mathrm{Aff}(\mathbb{C}) \\
\mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}}) &= PGL(2,\mathbb{C}) \\
&= GL(2,\mathbb{C}) / \{\pm \mathrm{id}\}
\end{aligned}
}
$$

$$
\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \to \left\{ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \right\}
$$