21-11-2022

Giorno 7

Rappel

$\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ouvert convexe

$u : \Omega \to [-\infty, +\infty[$ est sous-harmonique si

① u est semi-continue supérieure (scs)

② $\forall K \subseteq \Omega$ compact $\forall h : K \to \mathbb{R}$ tq $h|_{\mathrm{Int}(K)}$ harmonique, $u \leq h|_{\partial K}$ alors $u \leq h$ sur K.

Thm u est sous-harmonique si $\forall z \in \Omega$ $\exists r_n \downarrow 0$ tq $u(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + r_n e^{i\theta}) \, d\theta$ et u est scs remarque :

u sous-harmonique

$\iff$

u scs $\forall z$ $\exists r_n \downarrow 0$

$$u(z) \leq \frac{1}{\pi r_n^2} \int_{|w| \leq r_n} u(z+w) \, d\,\mathrm{Leb}(w)$$

remarque : être sous-harmonique est une propriété locale.

Si $u : \Omega \to [-\infty, +\infty[$

$\Omega = \bigcup_{i \in I} \Omega_i$ $\quad \Omega_i$ ouvert et $u \in SH(\Omega_i)$

sous-harmonique

Alors $u \in SH(\Omega)$

Thm $f : \Omega \to \Omega'$ holomorphe et $u \in SH(\Omega')$. Alors $u \circ f \in SH(\Omega)$

démonstration

- f injective, alors $f : \Omega \to f(\Omega)$ biholomorphisme. $u|_{f(\Omega)}$ est sous-harmonique

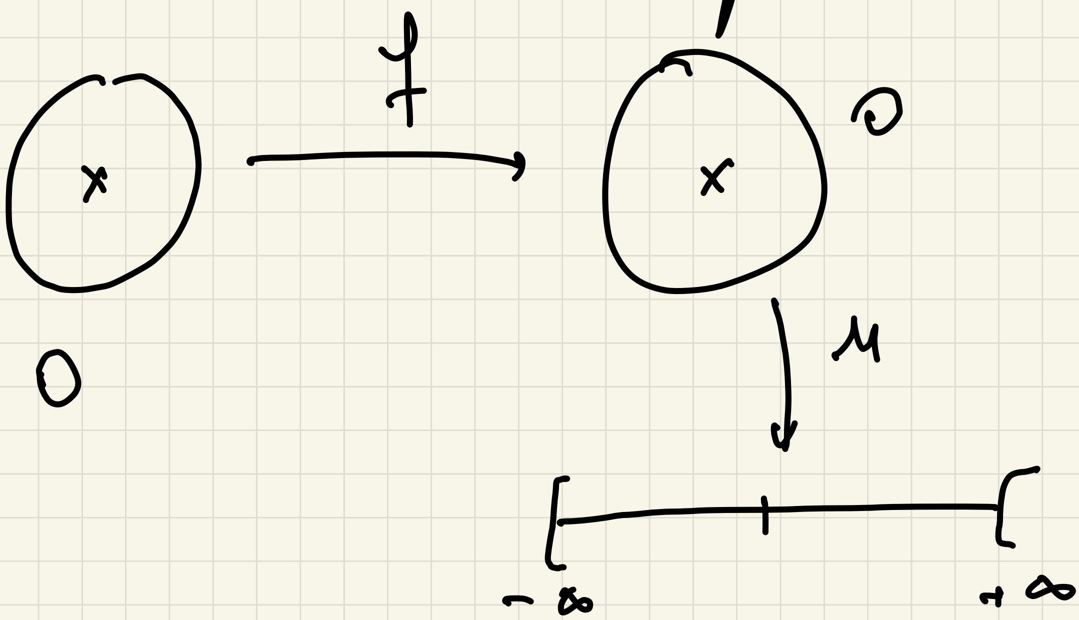
$\hat{h}$ est harmonique dans $f(\Omega)$ alors.

$\hat{h} \circ f$ est harmonique dans Ω.

d'une part $u \circ f$ est scs (car f est C^0).

d'autre part $u \circ f$ vérifie la condition (2)

• f quelconque : on peut supposer que f n'est pas constante (sinon $u \circ f$ est constante). On vérifie que $u \circ f$ est localement sous-harmonique.



On se ramène à traiter le cas

$f(z) = z^k$ $\quad k \geq 2$ (localement

$\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1 (z) = z^k$ $\quad \varphi_i$ bihol. locaux)

On doit démontrer que $u(z^k) = v(z)$ est sous harmonique.

On doit vérifier uniquement l'inégalité de sous moyenne en 0.

$$u(0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r^k e^{i\theta})\, d\theta$$

$u \in SH(\Omega)$

$$v(0) = \frac{1}{2\pi k} \int_0^{2\pi k} u(r^k e^{i\theta})\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r^k e^{ik\theta})\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} v(re^{i\theta})\, d\theta$$

///

Convention La fonction $u(z) = -\infty$ n'est pas sous-harmonique.

définition S une surface de Riemann connexe. Alors $u : S \to [-\infty, +\infty[$ est sous-harmonique ssi $\exists \mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}$ atlas holomorphe tq $u \circ \varphi_i^{-1}$ est sous-harmonique $\forall i$.

remarque : $u : S \to [-\infty, +\infty[$ est sous-harmonique ssi pour toute carte holomorphe (U, φ) $u \circ \varphi^{-1}$ est sous-harmonique.

Propriétés des fonctions sous-harmoniques.

S surface de Riemann connexe.

Principe du maximum. $u \in SH(S)$

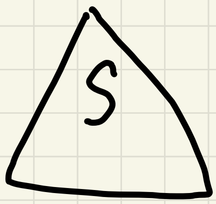
Si u atteint son maximum dans S, alors u est constante.

dém : $p \in S$ $\quad u(p) = \max u$.

inégalité de sous moyenne

$$u(p) \leq \frac{1}{\text{aire}(D)} \int_D u \implies u \text{ est constante au voisinage de } p$$

$\{u = u(p)\}$ ouvert, fermé. Par connexité, u est constante. ///



il existe des fonctions sous-harmoniques sur $\mathbb{C}$ non constantes telles que $u\big|_{D(0,1)} \equiv 0$.

Fait I : $SH(\Omega)$ est un cône positif.

Si $\lambda \geq 0$, $u, v \in SH(\Omega)$, alors $\lambda u + v \in SH$

dém : inégalité de sous-moyenne ///

Fait II : $(u_i)_{i\in I}$ une famille de fonctions sous-harmoniques. $u = \sup_{i \in I} u_i$

On suppose $u(p) < \infty$ pour tout $p \in \Omega$, et u est scs. Alors $u \in SH(\Omega)$.

dém : inégalité de sous-moyenne ///

ex $u_1 \dots u_n \in SH(\Omega)$

$\max\{u_1, \dots, u_n\} \in SH(\Omega)$.

Fait III $u_n \in SH(\Omega)$ $u_n \geq u_{n+1} \downarrow u$ ponctuellement. Si $u \not\equiv -\infty$, alors u est sous-harmonique.

dém : u est usc.

$$\{u < t\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\{u_n < t\}}_{\text{ouvert car } u_n \text{ est usc}}$$

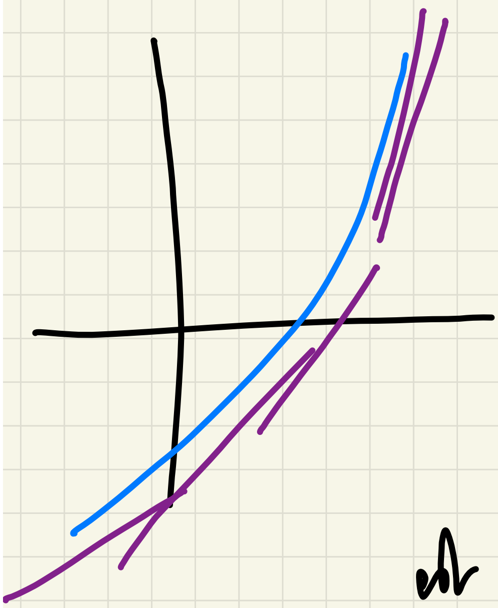
$$u_n(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_n(z + re^{i\theta})\, d\theta$$

$$u(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\;\;), \text{ convergence monotone}$$ ///

Fait IV $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et croissante.

$$u \in SH(S) \Rightarrow \varphi \circ u \in SH(S)$$

<u>démo</u> : $\varphi(x) = \sup\limits_{\substack{a \geq 0,\, b \in \mathbb{R} \\ ax+b \leq \varphi(x)}} ax+b$



$\varphi \circ u = \sup a u + b$

or φ est continue (car convexe), donc $\varphi \circ u$ est scs, $\varphi \circ u(p) < \infty$.

Par le fait II, $\varphi \circ u$ est sous-harmonique ///

Exemples de fonctions sous harmoniques.

$\Omega \subseteq \mathbb{C}$

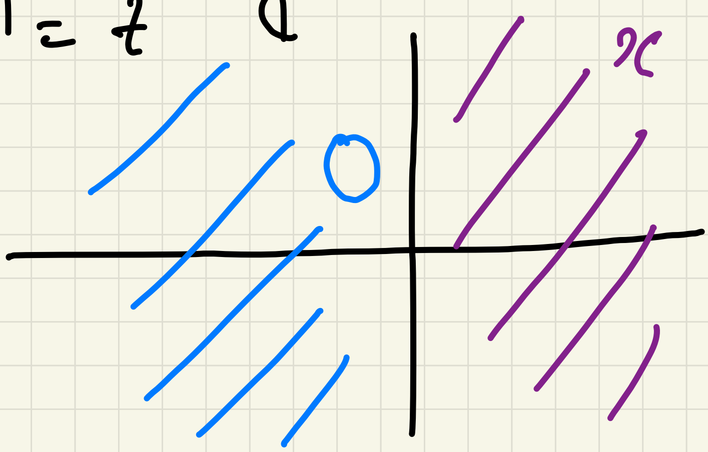
× harmonique !

$f \in \mathcal{O}(\Omega)$ $\quad Re(f)$ harmonique

$$\max\{Re(f), 0\} \in SH(\Omega)$$

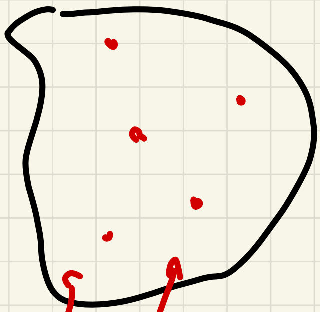
$\Omega = \mathbb{C} \quad f(z) = z \quad \mathbb{C}$

$u = \max\{Re(z), 0\}$



$f : \Omega \to \mathbb{C}$ hol. non constante

$\operatorname{Log}|f|$ est sous-harmonique.



Ω . $\operatorname{Log}|f| : \Omega \to [-\infty, +\infty[$ est continue.

$\{f=0\}$

démo : il faut vérifier que pour tout disque $D \subseteq \Omega$ et pour tout polynôme P $\mathbb{A}_q$

$\operatorname{Log}|f| \leq \operatorname{Re}(P)$ sur ∂D alors $\operatorname{Log}|f| \leq \operatorname{Re}(P)$ sur D.

$\operatorname{Log}|f| \leq \operatorname{Re}(P)$ sur ∂D $\iff$ $|f| \leq e^{\operatorname{Re}(P)} = |e^{P}|$ sur ∂D

$|e^{P}| = e^{\operatorname{Re}(P)}$

$\iff |f e^{-P}| \leq 1$ ∂D

max. $\iff |f e^{-P}| \leq 1$ sur D ///

exemples : $f_1 \dots f_n$ hol. dans Ω non identiquement nulles. $\alpha_i > 0$

$$\max \alpha_i \operatorname{Log}|f_i| \in SH(\Omega).$$

- $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ $\alpha > 0$ $|f|^\alpha \in SH(\Omega)$

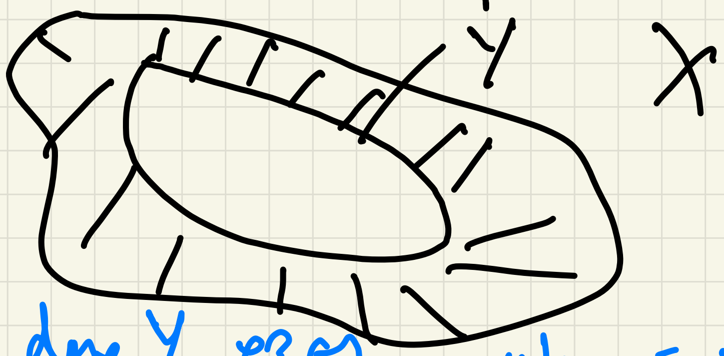
<u>dém :</u> $|f|^\alpha = \exp(\alpha \operatorname{Log}|f|)$

$$= \varphi(\operatorname{Log}|f|)$$

φ convexe et croissante

///

But (mercredi) aborder le problème de Dirichlet.



$f : \partial Y \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^0$

$\Downarrow ?$

$\exists u$ harmonique dans Y, $\mathcal{C}^0(\overline{Y})$ $u|_{\partial Y} = f$.

Exercices

Thm de Picard (c)

$\boxed{\begin{array}{l} f : \mathbb{D} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{C} \\ \text{si } f \text{ n'est pas méromorphe alors} \\ f(\mathbb{D} - \{0\}) \text{ évite au plus 2 pts.} \end{array}}$

si $f(\mathbb{D} - \{0\}) \subseteq \mathbb{C} - \{a, b\}$.

par (d). soit $\lim_{z \to 0} f(z) = \infty$ et la

fonction $1/f$ hol. ds $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ et

bornée donc f est méromorphe

. soit f est hol. au voisinage de 0. ///

Exercice 6 $u : \Omega \to [-\infty, +\infty[$

sous-harmonique.

$$\boxed{\limsup_{\zeta \to z,\ \zeta \neq z} u(\zeta) = u(z)}$$

- u est semi-continue supérieurement

$$\forall \zeta_n \longrightarrow z \quad \limsup_{n \to \infty} u(\zeta_n) \leq u(z)$$

donc $\displaystyle\limsup_{\zeta \to z} u(\zeta) \leq u(z)$ ///

- $$u(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + r e^{i\theta})\, d\theta \quad \forall r$$

$r = \frac{1}{n}$ $\quad \exists z_n \quad |z - z_n| = \frac{1}{n} \quad u(z_n) \geq u(z)$

$z_n \to z \quad u(z_n) \geq u(z)$ ///

exercice 7

$z_n \neq z_m \in \mathbb{D}(0,1)$

$\{z_n\}$ est dense.

- $\exists\, \alpha_n > 0$ tq $\sum \alpha_n \operatorname{Log}|z_n| > -\infty$

$$\alpha_n = \frac{-\operatorname{Log}|z_n|}{2^n}.$$

- $$u_n = \sum_{j \leq n} \alpha_j \operatorname{Log}\left(\frac{1}{2}|z - z_n|\right).$$

$u_n \longrightarrow u$ sous-harmonique.

$$u_{n+1} = u_n + \underbrace{\alpha_{n+1} \operatorname{Log}\left(\frac{1}{2}|z - z_{n+1}|\right)}_{\leq 0}.$$

La suite u_n est décroissante

$$u_{n+1} \leq u_n = \sum_{j \leq n} \alpha_j \log\left(\frac{1}{2}|z - z_j|\right)$$

$\alpha_j \to 0$

$u_n \in SH(\mathbb{D}(0,1))$.

$$\log\left(\frac{1}{2}|z - z_j|\right) = \log\frac{1}{2} + \log|z - z_j|$$

sous-harmonique

Par le cours

- soit $u = \lim\downarrow u_n$ est sous-harmonique
- soit $u \equiv -\infty$.

Or $u_n(0) = \sum_{j \leq n} \alpha_j \log\left(\frac{1}{2}|z_j|\right)$

$$\to \sum \alpha_j \log\left(\frac{1}{2}|z_j|\right) > -\infty$$

Donc $u(0) = \lim \downarrow u_n(0) > -\infty$

et $u \in SH(\mathbb{D})$.

$$\boxed{u(z) = \sum_{n \geq 0} \alpha_n \operatorname{Log}\left(\frac{1}{2}|z - z_n|\right)}.$$

$\{u = -\infty\} \supseteq \{z_n\}$. dense.

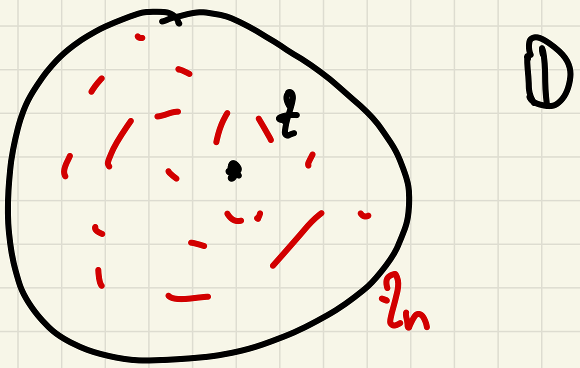
$\{u < -N\}$ = ouvert car u scs.

= dense car $\supseteq \{z_n\}$.

Par le thm de Baire.

$\bigcap_{N \in \mathbb{N}} \{u < -N\} = \{u = -\infty\}$ G_δ-dense

non dénombrable.



exercice 12 $\quad u : \underset{\mathbb{C}}{\underset{\cap}{\Omega}} \to [-\infty, +\infty[$

u sous-harmonique. Alors $\int_K |u| \, d\,\mathrm{Leb} < \infty$ pour tout compact $K \subseteq \Omega$.

corollaire $\{u = -\infty\}$ est de mesure de Lebesgue nulle (dans $\mathbb{C}$).

observation: $K \subseteq \Omega$ compact.

u est scs. elle atteint son max sur K.

on peut supposer que $u \leq 0$

donc on peut définir

$$\int_K |u| \, d\mathrm{Leb} = \int_K \underbrace{(-u)}_{\geq 0} \, d\mathrm{Leb} \in [0, +\infty]$$

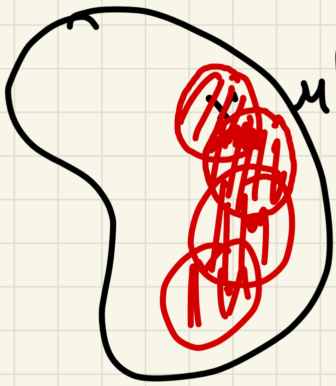
• point-clef : inégalité de la moyenne.

si $u(z) > -\infty$ $\quad u(z) \leq \frac{1}{\pi r^2} \int_{|w| \leq r} u(z+w) \, d\mathrm{Leb}(w)$

$\bar{D}(z,r) \subseteq \Omega$.

donc $\int_{\bar{D}(z,r)} |u| \, d\mathrm{Leb} < \infty$!!!

dès que $\bar{D}(z,r) \subseteq \Omega$



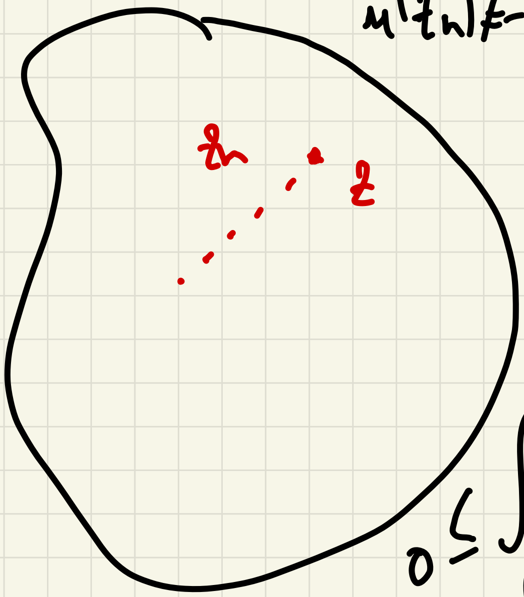
$u(z) \neq -\infty$

On définit

$E = \{ z_0 \in \Omega \text{ tq } \exists r > 0$
$\int_{D(z_0,r)} |u| \, d\mathrm{Leb} < \infty \}$.

par construction E est ouvert.

mais E est aussi fermé.



$u(z'_n) \neq -\infty$ $\quad z_n \in E \to z$

$z'_n \in E \to z$

$r \ll r$ pour $n \gg 0$

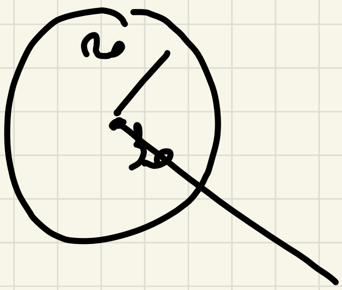
$$D(z'_n, r) \supseteq D(z, \tfrac{r}{2})$$

$$0 \leq \int_{D(z,\frac{r}{2})} |u| \, d\mathrm{Leb} \leq \int_{D(z'_n, r)} |u| \, d\mathrm{Leb} < +\infty$$

$\Rightarrow E = \Omega$ (car $u \not\equiv -\infty$)

///

$z_0 \in E \quad \exists r_0 \quad \int_{D(z_0, r_0)} |u| \, d\mathrm{Leb} < \infty.$



r tq $D(z_0, r) \subseteq \Omega$

$\exists z' \in \Omega \quad |z - z'| \ll r$

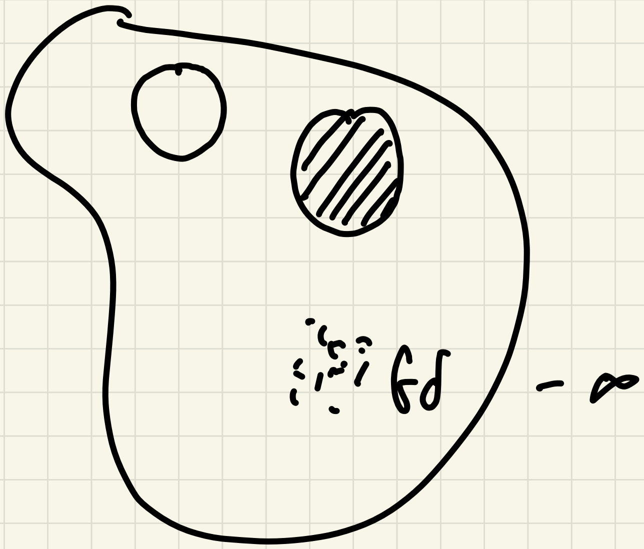
$r \quad u(z') > -\infty.$

$$\bar{D}(z, r) \subseteq \bar{D}(z', r') \subseteq \Omega$$

$$-\infty < u(z') \leq \frac{1}{\pi (r')^2} \int_{\bar{D}(z', r')} u \, d\mathrm{Leb}.$$

• pour tout cercle de rayon positif.

$$\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta > -\infty.$$



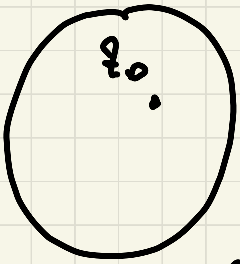
où $u(z) > -\infty$ $\quad u(z) \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta$

$$\int_{\partial D(z,r)}$$

en général $\int_{D(z,r)} u \, d\mathrm{Leb} > -\infty$

donc $\exists\, z_0 \in D(z,r)$ $u(z_0) > -\infty$

bihol.



$\varphi : D(z,r) \to D(z,r)$

tq $\varphi(z) = z_0$

$$\left(z=0 \quad r=1 \quad \varphi = \frac{w + z_0}{1 + \bar{z}_0 w} \right).$$

$u \circ \varphi$ est sous-harmonique

holomorphe. $\varphi : \partial D(z,r) \circlearrowleft \mathcal{C}^1$-diff.

sous-harmonique

$$u \circ \varphi(z) = u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u \circ \varphi(z + r e^{i\theta})\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} u(z + r e^{i\theta}) \, (\varphi^{-1})'(\,)\, d\theta$$

$u(z_0) > -\infty \Rightarrow \int_{\partial D(z,1)} u \circ \varphi > -\infty$

changement de variable $\Rightarrow \int_{\partial D(z,1)} u > -\infty$

$u \leq 0$

$u \in SH(\Omega) \rightsquigarrow u \in L^1_{loc}$.

(thm) (distribution)

Δu est une mesure positive.

si $u \in L^1_{loc}$ et $\Delta u \geq 0 \Rightarrow \exists v \in SH(\Omega)$ tq $u = v$ p.p.