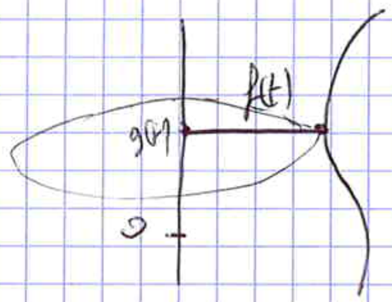
1/

Exo 1

① $d\varphi = \begin{bmatrix} f'\cos\theta & -f\sin\theta \\ f'\sin\theta & f\cos\theta \\ g' & 0 \end{bmatrix}$

$\|.\|^2 = (f')^2 + (g')^2 \qquad \|.\|^2 = f^2$




② $g_{can} = \varphi^*(dx^2 + dy^2 + dz^2)$

③ $\underbrace{s \mapsto (t(s), \theta(s))}_{c} \to (f(t)\cos\theta, f(t)\sin\theta, g(t))$

$\ddot{c}(s) \perp T\Sigma$.

ie $\begin{cases} (g'g'' + f'f'')\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 - (ff')\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 + [(f')^2 + (g')^2]\frac{d^2t}{ds^2} = 0 \\ 2ff'\frac{dt}{ds}\frac{d\theta}{ds} + f^2\frac{d^2\theta}{ds^2} = 0. \end{cases}$

④ $s \mapsto (t(s), \theta_0)$ (2) est vérifié.

(1) $\frac{d^2t}{ds^2} = \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 \left[\frac{g'g'' + f'f''}{(f')^2 + (g')^2}\right]$.

$s \mapsto (t_0, \theta(s))$ $\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 ff' = 0$ or $\theta' \neq 0$.

soit $f(t_0) = 0$ soit $f'(t_0) = 0$.

⑤ $-|c'|^2 = cst$ car $\nabla_{\dot c}\dot c = 0$

or $|c'|^2 = [(f')^2 + (g')^2]\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + f^2\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2$

$-f\cos\beta = f\,\dot c \cdot \begin{pmatrix} f\sin\theta \\ f\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} / |\dot c|\,|\cdot| = f^2\frac{d\theta}{ds}$.

$\frac{d}{ds}(f\cos\beta) = 2ff'\frac{d\theta}{ds} + f^2\frac{d^2\theta}{ds^2} = 0$.

(5) unique parallèle qui est une géodésique est $\Theta$. $\Sigma'$ est complète.

$\gamma$ géodésique $\neq 0$ $\neq$ méridien. on note $r \cos\beta = C = C(\gamma)$.

On note $p_0 = (r_0, \theta_0)$ le pt pour lequel $r$ est minimal. On

~~Par symétrie~~ paramètre $\gamma$ de telle sorte que $\gamma(0) = p_0$.

- Comme la symétrie orthogonale $\sigma$ % le plan contenant $p_0$ et l'axe des $z$ est une isométrie de la surface : On suppose $\theta'(0) > 0$.

$$\sigma\gamma(s) = \gamma(-s)$$

- il faut donc montrer $\lim_{s\to\infty} \theta(s) = +\infty$. On a $\theta' > 0$ sinon $\gamma$ tangente à un méridien.

de $|\dot{c}|^2 = \ldots$ on tire

$$\theta(s) - \theta(0) = \underbrace{\int_{\gamma}^{s}}_{\int \text{le long du chemin } \gamma} \frac{1}{f} \sqrt{(f')^2 + (g')^2}\, dt = \int_{\gamma} \frac{\sqrt{1+4r^2}}{r}\, dr$$

Or l'éq. de Clairaut donne $r(s)\cos\beta(s) = \text{cst}$

donc $r \to \infty$.

Contradiction $\frac{\sqrt{1+4r^2}}{r} \to 2$.