TD de Géométrie Différentielle du Septembre 2009
UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT

Géodésiques

Exercice 1

Soit $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux applications différentiables telles que $(f')^2 + (g')^2 \neq 0$ et $f \neq 0$ en tout point.

- Montrer que l'application donnée en coordonnées par
$$\varphi(t, \theta) = (f(t)\,\cos\theta, f(t)\,\sin\theta, g(t))$$
est une immersion. Interpréter géométriquement la surface $\Sigma = \varphi(S)$.
- Montrer que la métrique induite par la métrique euclidienne sur Σ s'écrit $f^2\,dt^2 + ((f')^2 + (g')^2)\,d\theta^2$.
- En utilisant le fait qu'un champ est parallèle le long d'un chemin ssi sa dérivée est orthogonale au plan tangent à Σ, écrire les équations des géodésiques dans les coordonnées t, θ.
- Montrer que les parallèles $\{r = \text{cst}\}$ et les méridiens $\{\theta = \text{cst}\}$ sont des géodésiques.
- Montrer que si $s \mapsto c(s)$ est une géodésique, alors $|c'(s)|^2$ est constant, et que l'angle orienté $\beta < \pi$ formé entre la courbe et le parallèle vérifie $r\cos\beta = \text{cst}$ (Relation de Clairaut).
- Montrer que la plupart des géodésiques du paraboloïde de révolution $f = t$, $g = t^2$ s'intersecte une infinité de fois, et décrire les exceptions.

Exercice 2

Soit (M, g) une variété riemannienne et $c : [0, +\infty[\to M$ une chemin différentiable. On dit que c diverge ssi pour tout compact K il existe $t_0 > 0$ tel que $c[t_0, \infty[\cap K = \emptyset$. On note $L(c) = \int_0^\infty |c'(s)| ds \in [0, +\infty]$.

Montrer que (M, g) est une variété complète ssi toute courbe divergente est de longueur infinie.

Exercice 3

Une variété riemannienne est dite homogène ssi pour tout couple $p, q \in M$ il existe une isométrie f envoyant p sur q.

- Montrer que $S^n, \mathbb{R}^n, \mathbb{H}^n, \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ sont homogènes. Donner un exemple de variété non-homogène.
- Montrer que la variété grassmannienne $G(k, n)$ des k-plans de $\mathbb{R}^n$ peut être muni d'une métrique riemannienne pour laquelle elle est un espace homogène. [On pourra utiliser l'application $O(n) \to G(k, n)$ envoyant $e_1, .., e_k$ sur leur image par $g \in O(n)$, et appliquer les résultats de l'exercice 5 ci-dessous]
- Montrer que toute variété homogène est complète.

Exercice 4

Soit f une isométrie d'une variété riemannienne connexe (M, g) telle que $f(p) = p$ et $df(p) = \mathrm{Id}$. En considérant l'ensemble des points $q \in M$ tels que $f(q) = q$ et $df(q) = \mathrm{Id}$, montrer que $f = \mathrm{Id}$.

Groupe de Lie

Exercice 5

Soit G un groupe de Lie. On note $L_y(x) = yx$ et $R_y(x) = xy$ les multiplications à gauche et à droite. Une métrique riemannienne g sur G est invariante à gauche (resp. à droite) ssi $L_x^* g = g$ pour tout x (resp. $R_x^* g = g$). Une métrique est dite bi-invariante si elle est à la fois invariante à gauche et à droite.

On notera $\mathfrak{G} = T_e G$ l'espace tangent de G en son élément unité e.

- Montrer que la forme $(X, Y) \mapsto -\mathrm{Tr}\,(XY)$ induit une métrique définie positive sur $T_e G$ pour $G = \mathrm{O}(n), \mathrm{U}(n), \mathrm{SU}(n)$. En déduire que ces groupes possèdent une métrique bi-invariante.
- $(*)$ Montrer que la métrique précédemment construite est unique à multiplication par une constante positive près.
- $(*)$ Montrer que tout groupe de Lie compact possède une métrique bi-invariante (considérer G comme le quotient $(G \times G)/G$).
- Dans toute la suite, on suppose g est une métrique bi-invariante sur G. Soit $v \in \mathfrak{G}$, et c la géodésique partant de e à la vitesse v. Montrer que $c(-t) = c(t)^{-1}$. En déduire que c est définie sur tout $\mathbb{R}$ et que $c : (\mathbb{R}, +) \to (G, \cdot)$ est un homomorphisme de groupe.
- Montrer que les géodésiques de G sont les courbes intégrales de (n'importe quel) champ invariant à gauche de G. En déduire que pour tout $v \in \mathfrak{G}$, $\exp_e(v)$ (définie en termes de g) coïncide avec le flot au temps 1 du champ invariant à gauche et valant v en e.
- On suppose que G est compact. Montrer que $\exp_e : \mathfrak{G} \to G$ est surjective.
- Montrer que $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ n'admet pas de métrique bi-invariante [On rappelle que le flot au temps 1 du champ invariant à gauche valant v en e est donné par la multiplication par $\exp(v) = \sum \frac{v^k}{k!}$.

Exercice 6 (Groupe de Heisenberg)

Le groupe de Heisenberg $\mathcal{H}$ est constitué des matrices 3×3 de la forme:

$$\begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Montrer que $\mathcal{H}$ admet une struture de groupe de Lie pour lequel il est difféomorphe à $\mathbb{R}^3$.
- Montrer que les trois champs de vecteurs $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $X_2 = \frac{\partial}{\partial z} + x\,\frac{\partial}{\partial y}$, $X_3 = \frac{\partial}{\partial y}$ sont invariants à gauche. Calculer leur crochet de Lie.

- On munit $\mathcal{H}$ de la métrique riemannienne g telle que les trois champs X_1, X_2, X_2 forment une base orthonormée en tout point. Cette métrique est-elle invariante à gauche, bi-invariante?
- Exprimer la connection de Levi-Civita en termes des champs X_i. En déduire l'équation satisfaite par les géodésiques, puis montrer que les géodésiques ne sont pas en général des sous-groupes de $\mathcal{H}$.
- Soit H_0 le sous-groupe des matrices de la forme
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
Montrer que H_0 est un sous-groupe normal et que H/H_0 est isomorphe à $\mathbb{R}^2$.
- En déduire une application $\pi : (H, g) \to (\mathbb{R}^2, g_{\text{can}})$ vérifiant les conditions suivantes:
  - pour tout $p \in H$, $d\pi$ est une isométrie de l'orthogonal de $\ker d\pi$ sur $T\mathbb{R}^2$;
  - toute géodésique tangente à une fibre $\pi^{-1}(q)$ est contenue dedans.

  Décrire les géodésiques non contenues dans les fibres de π.

Champ de Jacobi

Exercice 7

Soit (M, g) une variété riemannienne. On fixe $p \in M$. Soit Π un 2-plan de T_pM, e_1, e_2 une base orthonormée de Π. On note $(r, \theta) \in [0, +\infty[\times S^1$ les coordonnées polaires dans Π, et on pose $H(r, \theta) = \exp_p(r(\cos\theta\, e_1 + \sin\theta\, e_2))$.

- Soit $C_r(\theta) = H(r, \theta)$. Montrer que $L(C_r) = \int_0^{2\pi} |V_\theta(r)| d\theta$ où V_θ désigne le champ le long de la géodésique $r \mapsto H(r, \theta)$ obtenu à partir de la variation H.
- En utilisant le fait que H est une variation de chemins géodésiques, calculer $V_\theta(0)$, $V'_\theta(0)$, $V''_\theta(0)$, et $V'''_\theta(0)$.
- Appliquer la formule de Taylor-Young pour en déduire que $|V_\theta(r)| = r - \frac{K(\Pi)}{6} r^3 + O(r^4)$. Montrer que $L(C_r) = 2\pi r(1 - \frac{K(\Pi)}{6} r^2) + O(r^3)$.
- En déduire que la courbure sectionnelle $K(\Pi)$ est égale à la courbure de Gauss en p de la surface $\exp_p(\Pi)$ munie de la métrique induite.
- On fixe maintenant une base orthonormée e_i de T_pM. Pour $2 \leq i \leq n$, on note Y_i le champ de Jacobi le long de la géodésique $\exp_p(te_1)$ tel que $Y_i(0) = 0$ et $Y'_i(0) = e_i$. On introduit v_g la forme volume associée à g.

  Calculer la forme volume associée à la métrique euclidienne sur T_pM en coordonnées polaires $(r, \theta) \in [0, +\infty[\times S^{n-1}$. Montrer que $\exp_p^* v_g = \sqrt{\det g(Y_i(t), Y_j(t))}\, dr\, dv_{\text{can}}$ où dv_{can} désigne la forme volume de la métrique canonique sur S^{n-1}.
- Montrer que pour toute application différentiable $t \mapsto A(t) \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, on a $\frac{d}{dt} \det(A(t)) = (\det A) \operatorname{tr}(A^{-1} \frac{dA}{dt})$.

- En déduire que $\exp_p^* v_g(te_1) = v_{\text{eucl}}(1 - \frac{t^2}{6}\text{Ric}(e_1, e_1) + O(t^3))$.
- Montrer finalement qu'il existe une constante C ne dépendant que de n telle que $\text{Vol}_g(B(0,r)) = C\, r^n(1 - \frac{s(p)}{6(n+2)} r^2 + O(r^3))$ où $B(0,r)$ désigne l'image par $\exp_p$ de la boule de centre 0 et de rayon r dans T_pM.

Exercice 8 (Théorème de Synge-Weinstein)

Soit (M, g) une variété riemannienne compacte orientée de dimension paire $2n$ dont la courbure sectionnelle est strictement positive. On fixe f une isométrie de M qui préserve l'orientation.

- Montrer qu'il existe un segment géodésique $c : [0,1] \to M$ tel que $c(1) = f(c(0))$, $L(c) = d(c(0), c(1))$ et $L(c) = \min\{d(p, f(p)),\ p \in M\}$.
- On note $p = c(0)$. Montrer que $A : T_pM \to T_pM$ défini en composant df_p avec le transport parallèle le long de c est une isométrie.
- Montrer que $c'(0)$ est fixé par A (on pourra considérer le chemin composé de c puis de $c \circ f$ joignant p à $f(f(p))$).
- Montrer que A fixe un vecteur $e_1 \in T_pM$ orthogonal à $c'(0)$.
- Calculer $\frac{d^2E}{ds^2}(0)$ pour la variation de c donnée par $\Gamma(s,t) = \exp_{c(t)}(se_1(t))$ où $e_1(t)$ est le transportée parallèle de e_1 le long de c.
- Conclure que f fixe nécessairement un point.
- Montrer que M est simplement connexe.
- Montrer que les seules variétés complètes à courbure constante égale à 1 et de dimension paire sont S^n et $\mathbb{R}P^n$.
- Que dire dans le cas n impair? Généraliser les deux questions précédentes dans ce cas.