

Feuille d'exercices 8 (Fonctions holomorphes II et III)

Exercice 1. Montrer qu'une fonction holomorphe sur Ω à valeurs réelles est constante [Utiliser les relations de Cauchy ou considérer $\exp(if)$].

Exercice 2. Trouver toutes les fonctions holomorphes sur \mathbf{C} telles que

$$\forall z \in \mathbf{C}, |f(z)| \leq e^{\operatorname{Re}(z)}.$$

Exercice 3. Soit f holomorphe sur \mathbf{C} . On suppose qu'il existe $a, b \in \mathbf{R}, m \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall z \in \mathbf{C}, |f(z)| \leq a + b|z|^m.$$

a) Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, il existe $C \geq 0$ tel que pour tout $r > 0$ on a

$$|f^{(n)}(0)| \leq Cr^{m-n}.$$

b) En déduite que f est un polynôme de degré $\leq m$.

Exercice 4. Soit γ le cercle trigonométrique orienté. Donner la valeur, avec le minimum de calculs, des intégrales

$$\int_{\gamma} f(z) dz$$

pour les fonctions f de la variable complexe suivantes :

a) $f(z) = z^2; f(z) = |z|^2$.

b) $\frac{z+1}{z^4+16}; \frac{z^4+z}{z^3}; \operatorname{Re}(z^2)$.

c) $\frac{z+1}{16z^4+1}$.

Exercice 5. On désigne par Ω un ouvert non vide connexe de \mathbf{C} .

a) Montrer que si le produit de deux fonctions holomorphes sur Ω est nul, l'une des deux fonctions est nulle.

Soit D un disque ouvert de rayon fini, d'adhérence le disque fermé \bar{D} . Soient f, g deux fonctions continues sur \bar{D} , holomorphes sur D .

b) Montrer que si f, g est nulle sur le cercle $\partial\bar{D} = \bar{D} - D$, alors f ou g est nulle sur \bar{D} .

c) [Plus difficile] Montrer que si f est nulle sur un arc de cercle $\gamma \subset \partial\bar{D}$ de longueur positive, alors f est nulle sur \bar{D} .

Exercice 6. [Lemmes de Jordan]

Soit f continue sur le demi plan $\mathbf{H} = \{z | \operatorname{Im}(z) > 0\}$ et C_R le cercle (orienté) de centre 0 et de rayon R . On suppose

$$\lim_{\substack{z \in \mathbf{H} \\ |z| \rightarrow \infty}} zf(z) = 0.$$

a) Montrer qu'on

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0.$$

b) Énoncer et démontrer un résultat analogue quand R tend vers 0.

c) Calculer

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{dx}{1+x^{2n}}, \quad n \geq 1.$$

d) On suppose maintenant seulement

$$\lim_{\substack{z \in \mathbf{H} \\ |z| \rightarrow \infty}} f(z) = 0.$$

Montrer qu'on

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{iz} f(z) dz = 0.$$

e) Calculer la transformée de Fourier de $\frac{1}{1+x^4}$.

Exercice 7. [Lemme de Schwarz] Soit f holomorphe sur le disque unité ouvert D . On suppose $f(0) = 1$ et $f(z) \leq 1$ pour tout $z \in D$.

a) Montrer que

$$g : \begin{cases} D^* & \rightarrow & \mathbf{C} \\ z & \mapsto & f(z)/z \end{cases}$$

se prolonge uniquement en une fonction holomorphe sur D .

b) En considérant

$$\sup_{|z|=R} |g(z)|,$$

montrer qu'on a

$$\forall z \in D, \quad g(z) \leq 1.$$

c) En déduire $|f'(0)| \leq 1$.

d) Supposons $\exists z \in D$ tel que $|f(z)| = |z|$. Montrer qu'il existe α de module 1 tel que

$$\forall z \in D, \quad f(z) = \alpha z.$$

e) Supposons $|f'(0)| = 1$. Montrer

$$\forall z \in D, \quad f(z) = f'(0)z.$$

f) Soient $a \in U$. Montrer que

$\varphi_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ est un biholomorphisme de D . Quel est son inverse.

g) Trouver tous les biholomorphismes de D [Utiliser les e) et f)].