Documents disponibles sur

www.math.polytechnique.fr/∼ laszlo

Enseignants :

F. Golse (golse@math.polytechnique.fr),
Y. Laszlo (laszlo@math.polytechnique.fr),
C. Viterbo (viterbo@math.polytechnique.fr)

N'hésitez pas à contacter (difficultés, coquilles dans poly, questions scientifiques...) l'un de nous ou votre professeur de PC et surtout de passer au laboratoire (CMLS) pour discuter.

Les amphis 1 (topologie) et 7,8,9 (fonctions holomorphes) sont assurés par YL,
2,3,4 (intégration, Fourier) par FG et
5,6 (Hilbert) par CV.

Un peu de topologie

Henri Lebesgue

Georg Cantor

Émile Borel

Espaces métriques

Définition

Une distance d : $X \times X \to \mathbf{R}^+$ est une application symétrique vérifiant :
1) L'inégalité triangulaire.
2) $\mathrm{d}(x, y) = 0$ ssi $x = y$.
On dit que X est un espace métrique.

Exemple fondamental. X partie d'un evn, $\mathrm{d}(x, y) = ||x - y||$.

Importance du choix des normes : l'automobiliste choisira sur $X = C^0([0, T], \mathbf{R})$ la norme $N_\infty = \sup(\text{vitesse})$ (nombre de points) ou $N_2 = \sqrt{\int (\text{vitesse})^2}$ (consommation).

Ex $C^0(\mathbf{R})$ avec $\mathrm{d}_\infty(f, g) = \min(1, \sup |f - g|)$ distance de la *convergence uniforme*.

Adhérence

Comme pour les normés, on définit la notion d'ouvert, fermé et de convergence des suites. On se souviendra que

$$F \text{ fermé dans } X \iff X - F \text{ ouvert dans } X.$$

Terminologie

Une suite extraite de (x_n) est une suite de la forme $x_{\varphi(n)}$ avec $\varphi \nearrow\nearrow$. Les limites des suites extraites de la suite (x_n) sont ses valeurs d'adhérence.

Prop. (x_n) converge ssi elle a une unique valeur d'adhérence.

Définition

1) L'adhérence $\bar{Y}$ de $Y \subset X$ est l'ensemble des valeurs d'adhérence dans X des suite à valeurs dans Y : c'est le plus petit fermé de X contenant Y.
2) $Y \subset X$ dense dans X ssi $\bar{Y} = X$.

Ex $\mathbf{Q}$ dense dans $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}[t]$ dense dans $(C^0([0,1]), \sup_{[0,1]})$ mais pas dans $C^0(\mathbf{R})$ muni de $\mathrm{d}_\infty(f,g) = \min(1, \sup|f-g|)$ (exo).

Observation : x valeur d'adhérence de (x_n) ssi

$$\forall \epsilon > 0, \mathrm{card}(\{k | x_k \in B(x,\epsilon)\}) = \infty.$$

De même, $x \in \bar{Y}$ ssi

$$\forall \epsilon > 0,\ B(x,\epsilon) \cap Y \neq \varnothing.$$

Corollaire

L'ensemble des valeurs d'adhérences de la suite (x_n) est

$$\bigcap_n \overline{\{x_k, | k \geq n\}}.$$

Distance et adhérence

Pour $Y \subset X$, on pose

$$\mathrm{d}(x,Y) = \inf_{y\in Y} \mathrm{d}(x,y).$$

$$\text{On a } \mathrm{d}(x,Y) = 0 \Leftrightarrow x \in \bar{Y}.$$

L'inégalité triangulaire donne

$$|\mathrm{d}(x,Y) - \mathrm{d}(x',Y)| \leq \mathrm{d}(x,x')$$

et donc

$$x \mapsto \mathrm{d}(x,Y) \text{ est continue.}$$

Métriques complets

Définition

Une suite (x_n) de X est de Cauchy ssi

$$\forall \epsilon > 0\ \exists n \text{ tel que } \forall p,q > n\ \ \mathrm{d}(x_p,x_q) \leq \epsilon.$$

Toute suite convergente est de Cauchy :

$$\mathrm{d}(x_n,l) \leq \epsilon/2 \text{ pour } n \geq n_0 \Rightarrow \mathrm{d}(x_p,x_q) \leq \epsilon \text{ pour } p,q \geq n_0.$$

Prop.Une suite de Cauchy converge ssi elle a une suite extraite convergente

Faux sans la cond. Cauchy.

Définition

X est complet si toute suite de Cauchy converge.

Prop. Soit $Y' \subset X$ complet. Alors Y complet ssi Y fermé.

Ex.

$\mathbf{R}^n, \mathbf{C}^n$ normés sont complets, $(\mathbf{Q}, |\bullet|)$ ne l'est pas.

Un produit fini de métriques (X_i, d_i) complets, muni de la distance somme

$$\mathrm{d}((x_i),(y_i)) = \sum_i \mathrm{d}_i(x_i,y_i),$$

est un métrique complet .

$C^0([-1,1])$ muni de $N_\infty(f) = \sup|f|$ est complet.
$C^0([-1,1])$ muni de $N_2(f) = \sqrt{\int |f|^2}$ ne l'est pas (cf. poly).

Importance des normes en dimension infinie.

Critère de complétude des evn

Un evn est complet ssi toute série abs. convergente converge.

▶ $\Rightarrow$

$$\text{Si } \sum \|x_n\| < \infty, \text{ alors } \sum_{k=0}^{n} x_k$$

suite de Cauchy donc converge.

▶ $\Leftarrow$ Soit (x_n) de Cauchy. On construit par récurrence (x_{n_k}) extraite

$$\text{avec } \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \leq 2^{-k}.$$

La série

$$\sum (x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$$

est abs. convergente donc convergente et la suite extraite x_{n_k} converge et donc également x_n.■

Fermés emboîtés dans un complet

Définissons le diamètre d'une partie X d'un métrique par

$$\mathrm{diam}(X) = \sup_{x,y \in X} \mathrm{d}(x,y) \in \bar{\mathbf{R}}^+ = [0, \infty].$$

Théorème des fermés emboîtés

L'intersection d'une suite décroissantes de fermés non vides F_n d'un complet dont le diamètre tend vers 0 est réduite à un point.

▶Unicité : si

$$x, y \in \bigcap F_n, \text{ on a } \mathrm{diam}(F_n) \geq \mathrm{d}(x,y)$$

et donc $\mathrm{d}(x,y) = 0$.■

▶Existence : on choisit $x_n \in F_n$. Si $p \leq q$,

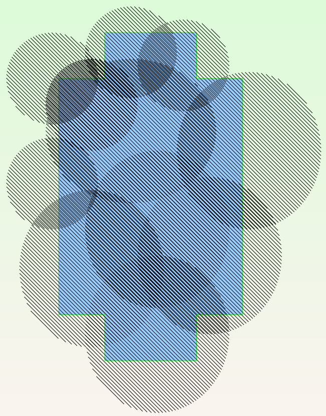
$$x_p, x_q \in F_p \text{ donc } \mathrm{d}(x_p, x_q) \leq \mathrm{diam}(F_p) \to 0.$$

Ainsi, (x_n) de Cauchy converge vers $x \in X$.
Fixons p. On a

$$x = \lim_n x_{n+p}, \text{ limite d'une suite d'éléments de } F_{n+p} \subset F_p.$$

Donc $\forall p, x \in F_p$ car F_p fermé.

Le problème des sous-recouvrements ouverts finis



Mais

$$]0,1[= \bigcup_{n>0}]1/n, 1-1/n[$$

n'a pas de sous-recouvrement fini.

Compacité

Définition

Un espace métrique X est compact
1) Si de tout recouvrement ouvert on peut extraire un recouvrement fini, ou (équivalent, passer au complémentaire)
1') Si toute famille de fermés d'intersection vide admet une sous famille FINIE d'intersection vide.

a) Si $Y \subset X$ et X compact alors Y compact ssi X fermé.

Cor. Une intersection décroissante $\bigcap K_i$ de compacts non vides est non vide.Sinon

$$\bigcap_{J\ FINI} K_j = \varnothing \text{ et } K_N = \bigcap_{J\ FINI} K_j \text{ avec } N = \sup(J\ FINI).$$

b) L'image continue d'un compact est compacte.

Théorème de Dini

Toute suite décroissante $f_n \in C^0(X, \mathbf{R}), n \geq 0$ de fonctions continues à support compact convergeant en tout point vers 0 converge uniformément, ie $\lim_n \sup_X |f_n(x)| = 0$.

▶

$$\text{Pour } \epsilon > 0, \text{ posons } F_n = \{x \in F | f_n(x) \geq \epsilon\}.$$

La suite F_n décroît comme f_n et F_n (fermé dans le compact support de f_0) est compact.

Comme $\lim f_n(x) = 0$ pour tout x, on a $\bigcap F_n = \varnothing$ et donc

$$\exists N |\ F_N = \varnothing$$

(une intersection décroissante de compacts $\neq \varnothing$ est $\neq \varnothing$).

On a donc $\forall n \geq N\ F_n = \varnothing$ et donc $0 \leq \sup f_n \leq \epsilon$.■

Théorème de Borel-Lebesgue

Soit X métrique. Alors X est compact ssi toute suite a une suite extraite convergente. En particulier un compact est complet.

▶ $\Rightarrow$ On doit montrer : l'intersection décroissante de compacts

$$\bigcap_{n \geq 0} \overline{\{x_k, k \geq n\}}$$

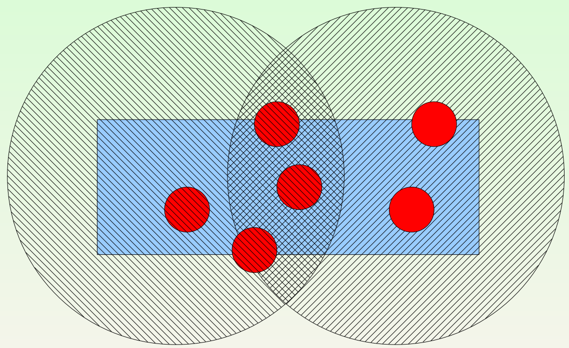
est non vide. Sinon, comme X est compact,

$$\exists N | \overline{\{x_k, k \geq N\}} = \varnothing,$$

une contradiction.
$\Leftarrow$ On montre le lemme clef :

Nombre de Lebesgue

Soit U_i recouvrement ouvert de X séquentiellement compact. Il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x \in X \exists i,\ B(x, \delta) \subset U_i$.



Boules de Lebesgue d'un recouvrement ouvert d'un compact

▶ Sinon, on construit x_n tel que

$$\forall n \forall i \; B(x_n, 1/n) \not\subset U_i.$$

Si $x = \lim x_{\varphi(n)}, \varphi \nearrow\nearrow$, on a $x \in U_j$ et donc $B(x, 1/N) \subset U_j$ pour $N >> 0$.

Comme

$$\lim x_{\varphi(n)} = x \text{ et } \lim 1/\varphi(n) = 0, \text{ on a}$$

$$B(x_{\varphi(n)}, 1/\varphi(n)) \subset B(x, 1/N) \text{ si } N >> 0,$$

une contradiction.

Si toute union finie des U_i est $\neq X$. Soit δ un nombre de Lebesgue. On construit (récurrence) x_n telle que (abus)

$$B(x_n, \delta) \subset U_n \text{ et } x_n \not\in U_1, \cdots, U_{n-1}.$$

Si $\mathrm{d}(x_m, x_n) < \delta$ pour $m < n$, on aurait $x_n \in B(x_m, \delta) \subset U_m$.

On a donc $\mathrm{d}(x_m, x_n) \geq \delta$ pour $m \neq n$ et donc x_n n'aurait pas de suite extraite convergente.■

Appl.
a) Un compact est complet.
b) Un produit fini de métriques compacts est un métrique compact (avec la distance somme).

Ex. $[-A, A]$ compact (dichotomie), donc également

$$([-A, A]^N, N_1(x) = \sum |x_i|).$$

Appl. : $f \in C^0(\text{compact}, \mathbf{R})$ bornée et atteint ses bornes.

Compacts de $\mathbf{R}^N$

Lemme. Les compacts de $(\mathbf{R}^N, N_1)$ sont les fermés bornés.

▶ Un compact est fermé et borné (contenu dans un nombre fini de boules).
Réci., si $X \subset \mathbf{R}^N$ est fermé borné, pour A assez grand on a

$$X \subset [-A, A]^N \text{qui est compact.}■$$

Corollaire du lemme

Tous les normes de $\mathbf{R}^N$ sont équivalentes.

(Bolzano-Weierstraß) Les compacts de l'evn $\mathbf{R}^n$ sont les fermés bornés.

Faux pour les normés de dim infinie et pour les distances.

preuve de l'équivalence des normes

Applications de la compacité vers la mesure

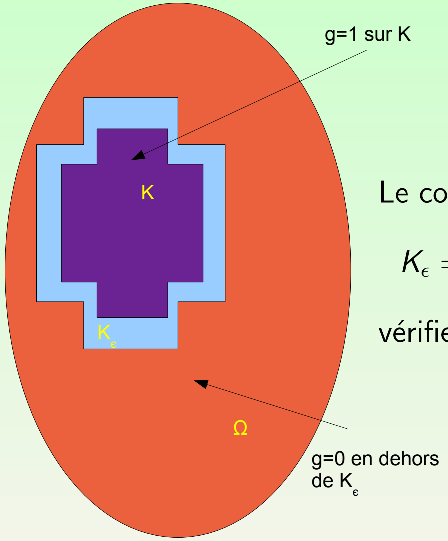
Soit Ω ouvert de $\mathbf{R}^N$ et $C_c(\Omega)$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des fonctions continues à support compact et $\Lambda : C_c(\Omega) \to \mathbf{R}$ une forme linéaire positive, ie

$$f \geq 0 \Rightarrow \Lambda(f) \geq 0.$$

Application fondamentale de Dini

Soit $f_n \in C^0(\Omega, \mathbf{R}), n \geq 0$ suite décroissante de fonctions continues à support compact convergeant en tout point vers 0. Alors $\lim \Lambda(f_n) = 0$.

▶ Soit $\Omega \supset K$ compact en dehors duquel f_0 (et donc tous les f_n par décroissance de (f_n)) est nul.



Le compact

$$K_\epsilon = \{\xi \in \mathbf{R}^N | \, \mathrm{d}(\xi, K) \leq \epsilon\}$$

vérifie pour $0 < \epsilon << 1$

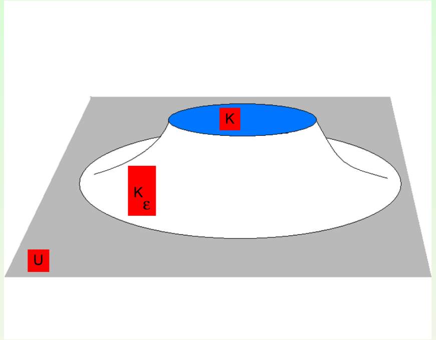
$$K \subset K_\epsilon \subset \Omega \text{ pour } .$$

Détails.

La fonction continue

$$\xi \mapsto g(\xi) = \sup(1 - \mathrm{d}(\xi, K)/\epsilon, 0)$$

vaut 1 sur K et 0 en dehors du compact $K_\epsilon \subset \Omega$. Donc



On a donc $g \in C_c(\Omega)$ et $f_n = gf_n$. Ainsi,

$0 \leq \Lambda(f_n) = \Lambda(gf_n) \leq \sup(f_n)\Lambda(g)$ et on applique Dini. ■

Quelques mots sur la dénombrabilité

On dit qu'un ensemble X est dénombrable s'il est en bijection avec une partie de $\mathbf{N}$, *i. e.* si on peut numéroter

$$X = \{x_1, \cdots, x_n, \cdots \; n \leq \mathrm{card}(X)\}$$

pour $\mathbf{N} \supset X \neq \varnothing$ [poser

$$x_1 = \inf(X), x_{n+1} = \inf_{x \in X}\{x > x_n\}) \text{ pour } 1 \leq n < \mathrm{card}(X).]$$

Propriété

Une partie d'un dénombrable, l'image d'un dénombrable sont dénombrables.

Preuve

Applications :

1)

Un produit fini de deux dénombrables est dénombrable.

Il suffit (récurrence) de prouver que $\mathbf{N}^2$ est dénombrable. Mais $(n, m) \mapsto 2^n 3^m$ l'identifie à une partie de $\mathbf{N}$.

2)

Une réunion dénombrable $\cup X_n$ de dénombrables est dénombrable.

Il suffit d'écrire

$$X_n = \{x_{n,i}, i \geq 0\} \text{ et de considérer } (n, i) \mapsto x_{n,i}.$$

3)

$\mathbf{Z} \xrightarrow{\sim} \pm 1 \times \mathbf{N}^* \cup \{0\}$ et $\mathbf{Q} = \cup_{n \in \mathbf{N}^*} \frac{1}{n}\mathbf{Z}$ sont dénombrables.

Dénombrabilité et topologie de $\mathbf{R}$

Un ouvert U de $\mathbf{R}$ est réunion dénombrable disjointe d'intervalles ouverts disjoints.

▶ Pour $x \in U$, soit I_x la réunion des intervalles ouverts contenant x : c'est le plus grand intervalle ouvert contenant x.

Si $I_x \cap I_y \neq \varnothing$, on a $J = I_x \cap I_y$ intervalle ouvert contenant I_x, I_y et donc (maximalité)

$$J = I_x = I_y.$$

Ainsi, les I_x sont disjoints ou confondus 2 à 2.

Considérons l' ensemble de parties de U

$$\mathcal{F} = \{I_x, x \in U\}. \text{ On a}$$

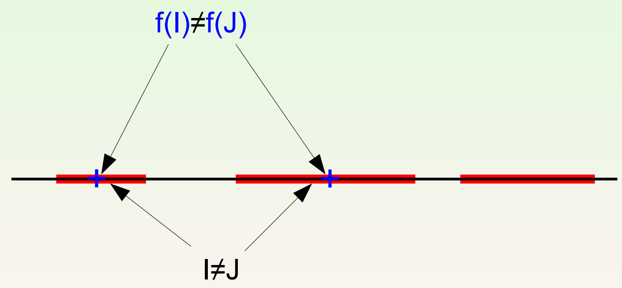
$$U = \bigsqcup_{I \in \mathcal{F}} I \text{ (union disjointe).}$$

Mais $\mathcal{F}$ dénombrable : pour tout $I \in \mathcal{F}$,

choisissons un rationnel $f(I) \in \mathbf{Q} \cap I$

(densité des rationnels).

L'application $f : \mathcal{F} \to \mathbf{Q}$ est injective et donc $\mathcal{F}$ dénombrable.■



▸ injectivité de f

Argument diagonal de Cantor

$I = [0, 1[$ (et donc $\mathbf{R}$) n'est pas dénombrable.

▶ On suppose $I = \{x_n, n \geq 0\}$. On écrit le développement (propre) en base 10

$$x_n = \sum_{k \geq 1} a_{k,n} 10^{-k}.$$

On pose $a_n = 2$ si $a_{n,n} = 1$ et $a_n = 1$ sinon :$\forall n,\ a_n \neq a_{n,n}$.

$$\text{On pose } x = \sum_{k \geq 1} a_k 10^{-k} = x_n \text{ dév. propre.}$$

Si $\exists n$ tel que $x = x_n$, on a $a_n = a_{n,n}$, contradiction.■

Fin de l'amphi.