Opérateurs des espaces de Hilbert

Extension des opérateurs définis sur un sous-espace dense :

On considère un espace de Hilbert $(H, <, >)$, et $A : H \longrightarrow H$ une application linéaire continue.

Proposition

Soit $u : F \longrightarrow K$ une application linéaire définie sur un sous-espace dense F de H.
Soit $N_F(u) = \sup_{x \in F, |x|=1} \|u(x)\|$. Si $N_F(u) < +\infty$, alors u se prolonge en une application linéaire continue de H dans K telle que $\|u\| = N_F(u)$.

Application : Transformée de Fourier L^2

Proposition

Soit Φ la transformée de Fourier normalisée, définie par

$$\Phi(f)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x) dx$$

Alors Φ s'étend en une isométrie bijective de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ dans lui-même. Il en est de même pour $\Psi(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} f(x) dx$ et son extension vérifie $\Phi \circ \Psi = \Psi \circ \Phi = Id$.

Rappel : En dimension infinie, il existe des applications préservant la norme qui ne sont pas bijectives.

Démonstration : On a montré (cf. Amphi d'intégration) que posant $\Psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} f(x) dx$, on a $\Phi\Psi = \Psi\Phi = Id$ sur $L^1 \cap C^0$.
Par ailleurs, Ψ est « l'adjoint de Φ »pour le produit scalaire L^2.

$$< \Phi f, g > = < f, \Phi G g >$$

En effet,

$$< \Phi f, g > = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \bar{f}(x) dx \right) g(\xi) d\xi =$$
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \bar{f}(x) g(\xi) e^{-ix\xi} dx d\xi =$$
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \bar{f}(x) \int_{\mathbb{R}} g(\xi) e^{-ix\xi} dx d\xi = < f, \Psi g >$$

On en déduit

$$\langle \Phi f, \Phi g \rangle = \langle f, \Psi \Phi g \rangle = \langle f, g \rangle$$

et de manière analogue $\langle \Psi f, \Psi g \rangle = \langle f, g \rangle$
Conclusion : Φ et Ψ s'étendent à l'espace $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, les extensions sont des isométries, et $\Phi \circ \Psi = Id$, par densité. La formule d'inversion de Fourier est donc encore valable pour les fonctions L^2 auxquelles on a étendu la transformation de Fourier par densité. $\square$

Inégalité de Heisenberg

Il s'agit de l'inégalité suivante

$$\left(\int_{\mathbb{R}} x^2|f(x)|^2dx\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}} |\frac{d}{dx}f(x)|^2d\xi\right)^{1/2} \geq \frac{1}{4}\|f\|_{L^2}^2$$

Elle est équivalente à celle, vraie pour toute fonction mesurable (bien que les termes de droite ne soient finis que si xf et f' sont dans L^2)

$$\left(\int_{\mathbb{R}} x^2|f(x)|^2dx\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}} \xi^2|\widehat{f}(\xi)|^2d\xi\right)^{1/2} \geq \frac{1}{4}\|f\|_{L^2}^2$$

ou encore

$$\|xf\|_{L^2}\|\xi\widehat{f}\|_{L^2} \geq \frac{1}{4}\|f\|_{L^2}^2$$

Démonstration.

Formule de Poisson

Soit f une fonction de $C^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ telle que $|f(t)| \leq \frac{C}{1+t^2}$. Elle est donc dans $L^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$

On lui associe la fonction $g(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+2\pi n)$ qui est périodique de période 2π.

En utilisant Fubini, on montre que c'est une fonction de $L^2(S^1,\mathbb{R})$.

Considérons la transformée de Fourier de f d'une part, et les coefficients de Fourier de g de l'autre. On a

$$c_k(g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_n f(t+2\pi n)e^{-ikt}dt =$$

$$\frac{1}{2\pi}\sum_n\int_0^{2\pi} f(t+2\pi n)e^{-ikt}dt =$$

$$\frac{1}{2\pi}\sum_n\int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} f(t)e^{-ikt}e^{i2\pi kn}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-ikt}dt = \frac{1}{2\pi}\widehat{f}(k)$$

On a alors $g(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(g)e^{ikt}$ dans L^2, soit

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+2\pi n) = 2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(k)e^{ikt}$$

En particulier, si f est C^2, la convergence des deux séries est uniforme, et donc

$$g(0) = \sum\widehat{g}(k)$$

et comme $g(0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(2\pi n)$, on a

Formule de Poisson

Si $f \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est telle que $|f(t)| \leq \frac{C}{1+t^2}$, on a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(2\pi n) = 2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(k)$$

Théorème d'échantillonnage de Shannon-Nyquist.

On voit que si on vérifie les hypothèses de la formule de Poisson, et si le support de f est dans $]-\pi,\pi[$, on a pour $t \in]-\pi,\pi[$

$$g(t) = f(t) = 2\pi\sum_k\widehat{f}(k)e^{ikt}$$

Il suffit donc de connaître les $\widehat{f}(k)$ pour reconstituer f. En utilisant l'involutivité de la transformation de Fourier, la formule se réécrit, si $\widehat{h}(t)$ est à support dans $]-\pi,\pi[$

$$\widehat{h}(t) = 2\pi\sum_k h(k)e^{ikt}$$

La connaissance des $h(k)$ permet de reconstituer $\widehat{h}$ et donc h.

Théorème de Shannon-Nyquist

Pour un signal dont les fréquences sont contenues dans $]-\pi,\pi[$, l'échantillonage $h(k)$ permet de reconstituer le signal.

Introduction à la théorie spectrale

Existe-t-il une théorie semblable à celle des valeurs propres et vecteurs propres en dimension finie ? On rappelle :

Théorème spectral-cas de la dimension finie

Si A est une matrice hermitienne d'un espace vectoriel de dimension n, ses valeurs propres sont réelles, et elle possède une base orthonormée $(e_j)_{1\leq j\leq n}$ de vecteurs propres. C'est à dire que $Ae_j = \lambda_j e_j$, avec $\|e_j\| = 1, \langle e_j, e_k\rangle = 0$ si $j \neq k$.

Ceci n'est pas vrai en dimension infinie. En effet, en dimension infinie, l'application $A - \lambda I_E$ peut ne pas être inversible tout en étant injective.

On distingue alors pour un opérateur continu

- l'ensemble $\mathrm{vp}(A)$ des **valeurs propres**, i.e. les nombres complexes λ tels qu'il existe $x \neq 0$ vérifiant $Ax = \lambda x$

L'espace propre de A est l'espace $H_\lambda = \ker(A - \lambda Id)$. Si A est continue, H_λ est fermé (c'est donc un Hilbert).

- le **spectre** de A, noté $\mathrm{spec}(A)$, ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $A - \lambda I$ n'est pas inversible.

Exemple : Soit A l'opérateur sur $L^2(\mathbb{S}^1, \mathbb{C})$ défini par $A(f)(t) = f(t)\cos(t)$ et f un vecteur propre. Notons que A est hermitien, $< Af, g >=< f, Ag >$.
Mais $A(f)(t) = \lambda f(t) \Leftrightarrow \cos(t)f(t) = \lambda f(t)$, donc $f = 0$ p.p. et donc $f \equiv 0$ dans $L^2(S^1)$.
Cependant si $\lambda \in [-1, 1]$, la multiplication par $\cos(t) - \lambda$ n'est pas inversible, car $\frac{1}{\cos(t)-\lambda}$ n'est pas dans $L^2(S^1, \mathbb{C})$. Donc $[-1, 1] \subset \mathrm{Spec}(A)$ mais A n'a pas de valeur propre.

Nous cherchons alors une classe d'opérateurs continus pour lesquels la situation est proche de celle de la dimension finie.
Opérateurs hermitien : On dit que l'opérateur continu A est hermitien si

$$\forall x, y \in H \quad < Ax, y >=< x, Ay >$$

On a $\ker(A) = \mathrm{Image}(A)^\perp$ et $\overline{\mathrm{Image}(A)} = \ker(A)^\perp$
Opérateurs compacts :

Définition : Opérateur compact

On dit que A est compact si $A(B(0, 1))$ est contenu dans compact de H

Un opérateur compact est en particulier continu car tout compact est borné.
La composée d'un opérateur continu et d'un opérateur compact est un opérateur compact.
La somme de deux opérateurs compacts est compact.

EXEMPLES D'OPERATEURS COMPACTS

Proposition

L'application $f \longrightarrow I(f)$ définie par $I(f)(t) = \int_0^t f(s)ds$ sur $L^2([0, 1], \mathbb{C})$ est compacte.

Lemme

Le cube de Hilbert $K = \{(x_n)_{n\geq 1} \in \ell^2(\mathbb{N}) \mid |x_n| \leq 1/n\}$ est compact dans $\ell^2(\mathbb{N})$.

Démonstration : Vue en PC

Démonstration de la proposition.

En effet, en Fourier, posant $e_n = e^{int}$, l'application I est donnée par $I(e_n) = \frac{1}{in}e_n$, et donc si $\sum_n |x_n|^2 \leq 1$, $I(\sum_n x_n e_n) = \sum_n y_n e_n$ avec $\sum_n n^2 y_n^2 \leq 1$ d'où $|y_n| \leq 1/n$.
L'image de $B(0, 1)$ par I est donc contenue dans le compact K. $\square$

Remarque : I n'est pas Hermitien, mais anti-hermitien : $\langle If, g\rangle = -\langle f, Ig\rangle$. Donc I^2 est compact et hermitien.

Proposition

L'inclusion de $H^1(\mathbb{N})$ dans $\ell^2(\mathbb{N})$ est compacte.

Proposition

Si K est continue sur $[0,1]^2$, l'application $F_K : f \longrightarrow \int_0^1 K(s,t)f(s)ds$ de $L^2([0,1],\mathbb{C})$ dans lui-même est compacte.

Démonstration.

On peut écrire $\int_0^1 K(x,y)u(y)dy = \langle K(x,\bullet), u\rangle$. Or la boule unité de $L^2([0,1],\mathbb{C})$ est faiblement compacte.
Il en résulte que si u_n est une suite dans la boule unité, il existe u tel que pour tout x, $\langle K(x,\bullet), u_n\rangle \longrightarrow \langle K(x,\bullet), u\rangle$.
L'inégalité $\left|\int_0^1 K(x,y)u_n(y)dy\right|^2 \leq \left(\int_0^1 |K(x,y)|^2 dy\right)^{1/2} \left(\int_0^1 |u_n(y)|^2 dy\right)^{1/2}$ permet d'appliquer le théorème de convergence dominée. Donc $\langle K(x,\bullet), u_n\rangle$ converge dans L^2 vers $\langle K(x,\bullet), u\rangle$. Cela signifie que $F_K(u_n)$ converge, et donc que F_K est compacte. □

Théorème

Soit A un opérateur **compact et hermitien** de H dans lui-même. Il existe alors une base Hilbertienne de H, $(e_n)_{n\geq 1}$ telle que $Ae_n = \lambda_n e_n$. De plus la suite λ_n est réelle et tend vers 0.

Démonstration.

On vérifie comme en dimension finie que deux sous-espaces propres sont orthogonaux, que les valeurs propres sont réelles et que l'orthogonal d'un espace invariant est aussi invariant. □

Soit alors $F = \overline{\oplus_{\lambda\in\mathbb{R}} H_\lambda}$ adhérence de la somme directe des espaces propres. On prétend que $F^\perp = 0$. Ceci résulte du lemme :

Lemme

Soit A hermitien compact. Alors
$\lambda = \sup\{< Ax, x > \text{ tels que } |x| = 1\}$ est valeur propre de A.

▸ Preuve du lemme et de la fin du théorème

Dimension des espaces propres d'un opérateur compact

Les espaces propres correspondant à une valeur propre non nulle d'un opérateur compact sont de dimension finie.

Démonstration.

En effet sur H_λ, $A = \lambda Id$, donc $A(B(0,1))$ contient $B(0,\frac{1}{\lambda}) \cap H_\lambda$ et si H_λ était de dimension infinie, la non-compacité de la boule unité d'un Hilbert contredirait la compacité de A. □

Caractérisation variationnelle des valeurs propres.

Les valeurs propres d'un opérateur compact positif, c'est à dire vérifiant $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ peuvent se caractériser de la manière suivante :

Proposition

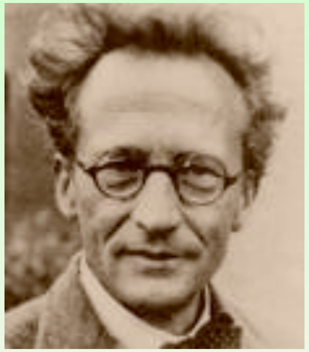
Soit A hermitien compact positif. Alors

$$\lambda_k = \inf_{V\subset E \ \dim(V)=k} \sup\{< Ax, x > \text{ tel que } x \in V \text{ et } |x| = 1\}$$

est la k-ième valeur propre de A.

▸ Démonstration

Equations de Schrödinger



Erwin Schrödinger

L'équation définissant la fonction d'onde d'une particule quantique soumise à un potentiel $V(x)$ est donnée par

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}\psi(t,x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(t,x) + V(x)\psi(t,x)$$

Si on cherche la solution sous la forme d'une superposition d'ondes du type $\psi(t,x) = \varphi(x)e^{iEt}$, on doit avoir

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\varphi(x) + V(x)\varphi(x) = E\varphi(x)$$

Le nombre E représente l'énergie de la particule de fonction d'onde $\varphi(x)$.
La particule a plusieurs états possibles correspondant à une famille de fonctions d'onde φ_n, correspondant à des niveaux d'énergie E_n.
Le cas où l'espace des x est de dimension un se ramène à une équation différentielle linéaire. En oubliant les constantes on se ramène à

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi''(x) + V(x)\varphi(x) = E\varphi(x)$$

Si la particule est dans une boîte délimitée par $x = 0, x = 1$, on doit ajouter les conditions $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$.

Equations de Sturm-Liouville

Joseph Liouville

Charles Sturm

On considère donc l'équation

$$-u''(t) + q(t)u(t) = \lambda u(t)$$

avec conditions aux limites $u(0) = 0, u(1) = 0$
On cherche les $(u,\lambda) \in L^2([0,1],\mathbb{C}) \times \mathbb{R}$ vérifiant cette équation (on cherche donc à la fois une fonction et un réel).

Equations de Sturm-Liouville

Théorème

Soit q une fonction continue sur $[0,1]$. Il existe une suite de réels λ_n tendant vers $+\infty$ et une base Hilbertienne u_n de $L^2([0,1],\mathbb{C})$ telles que u_n est de classe C^2 et solution de

$$-u_n''(t) + q(t)u_n(t) = \lambda_n u_n(t)$$

avec conditions aux limites $u_n(0) = 0, u_n(1) = 0$

Remarque Les λ_n étant réels, on peut supposer les u_n réels, car si u est solution de l'équation de Sturm-Liouville, il en est de même pour sa partie réelle et imaginaire.

On ne peut appliquer le théorème spectral à l'opérateur $u \longrightarrow -u'' + q(t)u$ car il n'est pas défini sur un espace de Hilbert (on pourrait le définir sur $C^\infty([0,1],\mathbb{C})$ mais ce n'est pas un Hilbert). C'est un exemple d'opérateur non borné : il n'est défini que sur un sous espace dense de $L^2([0,1],\mathbb{C})$.
On recourt à un « subterfuge » : on paramètre les fonctions par leur dérivée.
On pose $u = f'$ et si $f \in L^2$ l'application $I : u \longrightarrow \int_0^t u(s)ds$ définie sur L^2_0 a son image dans $H^1_0 \subset L^2$.
On suppose $q(t) > 0$ (on peut toujours ajouter une constante à $q(t)$, cela décale simplement les valeurs propres) et on pose

$$B_q(f,g) = \int_0^1 [f'(t)g'(t) + q(t)f(t)g(t)]dt =$$
$$\langle u, v\rangle_{L^2} + \langle M_q I(u), I(v)\rangle$$

B_q définit un produit hermitien sur $H^1_0([0,1],\mathbb{C})$. C'est l'image par $\int_0^t u(s)ds$ de $L^2_0([0,1],\mathbb{C})$ ensemble des fonctions de moyenne nulle sur $[0,1]$.

Représentation de Riesz pour les formes hermitiennes

Definition (Théorème)

On dit qu'une forme sesquilinéaire $B(u,v)$ est continue sur H si il existe une constante C telle que

$$\forall u, v \in H \quad |B(u,v)| \leq C\|u\|\|v\|$$

Remarque : Si B est hermitienne, il suffit de vérifier que $B(u,u) \leq C\|u\|^2$. Cela résulte aisément de la formule de polarisation. On a alors :

Théorème de représentation de Riesz (cas hermitien)

Soit B une forme sesquilinéaire **continue**. Il existe alors une application linéaire unique $L : H \longrightarrow H$, continue, telle que

$$B(u,v) = \langle Lu, v\rangle$$

Démonstration.

Schéma de démonstration pour Sturm-Liouville

On applique le théorème de Riesz à $\langle , \rangle_{L^2}$ et B_q.
On écrit le produit scalaire L^2, sur H^1_0 sous la forme $\langle f, g\rangle_{L^2} = B_q(Lf, g)$ où L est un opérateur (théorème de Riesz), positif, puisque $\langle f, f\rangle > 0$ si $f \neq 0$.
On montre que L est compact. Pour $q \equiv 1$ on passe en Fourier, et L est donnée par $(f_n)_{n\geq 1} \longrightarrow (\frac{f_n}{1+n^2})_{n\geq 1}$ qui est compacte en utilisant la compacité du cube de Hilbert.
Le cas général est analogue, en utilisant la compacité de I.
Si f est de classe C^2 on peut écrire

$$B_q(f,g) = \int_0^1 [-f''(t) + q(t)f(t)]g(t)dt$$

et donc puisque $\langle f, g\rangle_{L^2} = B_q(Lf, g)$ on a que si $h \in C^2$

$$Lf = h \Leftrightarrow -h''(t) + q(t)h(t) = f(t)$$

Le théorème spectral nous dit que les fonctions propres de L sont donc données par $L\varphi_n = \alpha_n\varphi_n$. Il faut bien entendu un argument de régularité pour dire que $\varphi_n \in C^2$ (voir le poly). Admettons ce point, on a alors

$$\alpha_n(-\varphi_n'' + q(t)\varphi_n) = \varphi_n$$

Comme L est positif et compact les α_n sont positives et tendent vers 0.
C'est-à-dire que $\lambda_n = \frac{1}{\alpha_n}$ est valeur propre de Sturm-Liouville avec fonction propre φ_n. Les λ_n tendent donc vers $+\infty$.
Remarque : La caractérisation variationnelle des valeurs propres entraîne que φ_1 ne s'annule qu'en 0 et en 1.
Exemple : les fonctions d'Hermite, $H_n(x)e^{-x^2/2}$ sont fonctions propres pour l'oscillateur harmonique

$$-u_n''(x) + x^2u_n(x) = \lambda_n u_n(x)$$

avec $\lambda_n = 2n + 1$

Mercredi 16 Juin à 15H45.
Étienne Ghys,
“Sur la coupe des vêtements, d'après Tchebychev”.

On se donne une surface S et on veut l'habiller par un tissu. Le tissu c'est un domaine du plan D (le patron de la couturière), les fils sont les droites horizontales et verticales, et l'habillage c'est $F : D \longrightarrow S$ tel que F est une isométrie sur les fils horizontaux et verticaux (chaîne et trame) mais on ne demande pas que l'orthogonalité des fils soit préservée. Quelles sont les surfaces habillables ? Combien de morceaux faut-il pour habiller une sphère par exemple ?

Mercredi 30 Juin à 15H45.
Michel Broué,
“Des lois du mariage à Bourbaki”.

Pendant la deuxième guerre mondiale, le mathématicien André Weil et l'ethnologue Claude Lévi-Strauss, deux géants de la pensée du XXe siècle, se rencontrent à New York. De là naît un Appendice à la thèse de Levi-Strauss où Weil étudie les « structures » mathématiques expliquant les règles de mariage dans les tribus sud-américaines. Le structuralisme connaîtra une grande fortune en sciences humaines, et la notion de structure des succès peut-être plus importants encore en mathématiques. On expliquera comment Weil a appliqué la théorie des groupes pour résoudre les questions que lui avait soumises Lévi-Strauss.

Démonstration de l'inégalité de Heisenberg (principe d'incertitude).

Plus généralement, si A, B sont des opérateurs hermitiens, on pose $i(AB - BA) = C$ qui est aussi hermitien. On a alors

$$0 \leq \langle Ax + itBx, Ax + itBx \rangle =$$
$$\|Ax\|^2 + 2it\left[\langle Bx, Ax\rangle - \langle Ax, Bx\rangle\right] + t^2\|Bx\|^2 =$$
$$\|Ax\|^2 + 2t\langle i(AB - BA)x, x\rangle + t^2\|Bx\|^2$$

D'où

$$\langle Cx, x\rangle \leq \|Ax\|^2\|Bx\|^2$$

Prenant $A(f) = xf$ et $B(f) = i\frac{d}{dx}f$ on aura $BA(f) = i\frac{d}{dx}(xf) = if + ix\frac{d}{dx}(f)$ alors que $AB(f) = ix\frac{d}{dx}f$ et $i(AB - BA)(f) = f$ et $\langle Cf, f\rangle = \|f\|^2_{L^2}$. $\square$

On voit que l'inégalité ne devient égalité que si $Af + itBf$ s'annule pour un certain t, soit si $xf(x) - t\frac{d}{dx}f(x) = 0$ soit $f(x) = e^{\frac{-x^2}{2t}}$.
Plus généralement,

$$\left(\int_{\mathbb{R}}(x-q)^2|f(x)|^2dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}}(\xi-p)^2|\widehat{f}(\xi)|^2d\xi\right)$$

est minimal lorsque $f_{q,p}(x) = e^{\frac{-(x-q)^2}{2t}}e^{ipx}$. Les physiciens appellent $f_{q,p}$ états cohérents. Ce sont les fonctions qui réalisent l'égalité dans l'inégalité de Heisenberg. Elles représentent une particule localisée en q de fréquence p. Retour

Démonstration du théorème de Riesz : D'après l' hypothèse de continuité, pour chaque u fixé la forme linéaire $v \longrightarrow B(u,v)$ est continue.
Par le théorème de Riesz, il existe Lu unique tel que $B(u,v) = \langle Lu, v\rangle$.
Il nous faut montrer que L est linéaire et continue.
La linéarité résulte immédiatement de l'unicité et de la sesquilinéarité de B. Pour la continuité, nous avons par hypothèse

$$\|Lu\|^2 = \langle Lu, Lu\rangle = B(u, Lu) \leq C\|u\|\|Lu\|$$

On en déduit

$$\|Lu\| \leq C\|u\|$$

et donc la continuité de L.
Notons que si il existe $C > 0$ tel que $C\|u\|^2 \leq B(u,u)$ alors L est inversible.

Retour

Preuve du lemme.

Montrons que le maximum est atteint. Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite telle que $< Ax_n, x_n > \longrightarrow \lambda$.
Par compacité de A, on peut extraire une sous suite telle que Ax_n converge vers z.
On en déduit que $< z, x_n >$ converge vers λ. Quitte à re-extraire une suite, on peut supposer que x_n converge faiblement vers x.
On a alors $Ax = z$ et donc $< Ax, x >= \lambda$. Or si $< Ax, x >$ atteint son maximum en x, on a pour tout $u \in (\mathbb{C}x)^\perp$, $< Ax, u >= 0$. On en déduit que $Ax = \lambda x$ en utilisant Riesz.
Le même argument appliqué à $-A$ montre que si A est compact, il a une valeur propre sur H. $\square$

La démonstration du théorème résulte immédiatement de ce que chaque H_λ a une base Hilbertienne, et par hypothèse, A n'a pas de valeur propre sur $F^\perp$. On en déduit que $F^\perp = 0$.

Retour

Démonstration de la caractérisation variationnelle des valeurs propres.

Soit $(e_j)_{j\geq 1}$ une base Hilbertienne propre. Si F_k est la fermeture de l'espace engendré par les $e_j, j \geq k$, $F_k^\perp$ est l'espace engendré par $(e_1, ..., e_{k-1})$.
Or sur F_k on a $\langle Ax, x\rangle \geq \lambda_k \|x\|^2$, vu que si $x = \sum_{j=k}^{+\infty} x_j e_j$ on a $\langle Ax, x\rangle = \sum_{j=k}^{+\infty} x_j^2 \lambda_j \geq \lambda_k \|x\|^2$.
Comme si V est de dimension k, on a $V \cap F_k \neq \emptyset$, vu que la projection de V sur $F_k^\perp$ ne peut être injective $(\dim(V) > \dim(F_k^\perp))$.
Il en résulte que

$$\inf_{V\subset E \ \dim(V)=k} \sup\{< Ax, x > \text{ tel que } x \in V|x| = 1\} \geq \lambda_k$$

L'égalité s'obtient en prenant pour V l'espace $F_{k+1}^\perp$. $\square$

Retour