Exercice 1

1) Si $T=0$, on a $\langle T,\phi\rangle = 0$ pour tout $\phi\in C_c^\infty(\Omega)$, donc $\langle S,\phi\rangle = 0$ pour tout $\phi\in C_c^\infty(\Omega)$, de sorte que $S=0=T$. Le seul cas intéressant est donc celui où $T\neq 0$, ce que nous supposerons désormais.

Comme $T\neq 0$, il existe $\psi\in C_c^\infty(\Omega)$ t.q. $\langle T,\psi\rangle\neq 0$. Pour tout $\phi\in C_c^\infty(\Omega)$, la fonction $\Phi=\phi-\frac{\langle T,\phi\rangle}{\langle T,\psi\rangle}\psi$ appartient à $C_c^\infty(\Omega)$ (comme combinaison linéaire de $\phi,\psi\in C_c^\infty(\Omega)$) et on a

$$\langle T,\Phi\rangle = \langle T,\phi\rangle - \frac{\langle T,\phi\rangle}{\langle T,\psi\rangle}\langle T,\psi\rangle = 0\,.$$

Donc

$$\langle S,\Phi\rangle = \langle S,\phi\rangle - \frac{\langle T,\phi\rangle}{\langle T,\psi\rangle}\langle S,\psi\rangle = 0\,,$$

ce qui implique que, pour tout $\phi\in C_c^\infty(\Omega)$,

$$\langle S,\phi\rangle = \frac{\langle S,\psi\rangle}{\langle T,\psi\rangle}\langle T,\phi\rangle\,.$$

Autrement dit, $S=\lambda T$ avec $\lambda=\frac{\langle S,\psi\rangle}{\langle T,\psi\rangle}$.

2) Dire que $T\in\mathcal{D}'(\Omega)$ vérifie $T'=0$, c'est dire que $\langle T,\phi'\rangle = 0$ pour tout $\phi\in C_c^\infty(\Omega)$.

Soit $T_1\in\mathcal{D}'(\Omega)$ associée à la fonction constante (donc localement intégrable) 1:

$$\langle T_1,\phi\rangle = \int_\Omega \phi(x)dx\,,\qquad \phi\in C_c^\infty(\Omega)\,.$$

Donc

$$\ker(T_1)=\left\{\psi\in C_c^\infty(\Omega)\,\Big|\,\int_\Omega\psi(x)dx=0\right\}\,.$$

Soit $\psi\in\ker(T_1)$; comme ψ est à support compact dans Ω, il existe $[a,b]\subset\Omega$ tel que $\mathrm{supp}(\psi)\subset[a,b]$. Posons

$$\phi(x)=\int_a^x\psi(z)dz\,,\quad x\in\Omega\,.$$

D'abord $\phi\in C^\infty(\Omega)$ comme primitive de $\psi\in C^\infty(\mathbf{R})$. D'autre part

$$\phi(x)=0 \text{ pour } x\in\Omega \text{ et } x\le a\,,\qquad \text{tandis que}$$

$$\phi(x)=\int_a^b\psi(x)dx=\int_\Omega\psi(x)dx=0 \text{ pour } x\in\Omega \text{ et } x\ge b\,.$$

Au total, $\phi\in C_c^\infty(\Omega)$ puisque $\mathrm{supp}(\phi)\subset[a,b]$, et $\phi'=\psi$. Autrement dit

$$\ker(T_1)\subset\{\phi'\,|\,\phi\in C_c^\infty(\Omega)\}\,.$$

Comme T s'annule sur $\ker(T_1)$, il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $T = \lambda T_1$, c'est à dire que $T = T_\lambda$ (la distribution définie par la fonction constante λ).

1. Exercice 2

1) Posons

$$\Omega_- = \{(t,x) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R} \,|\, x < st\}$$
$$\Omega_+ = \{(t,x) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R} \,|\, x > st\}$$

La fonction u vérifie

$$u = u_- \mathbf{1}_{\Omega_-} + u_+ \mathbf{1}_{\Omega_+} .$$

La normale unitaire au point $(t,x) \in \partial\Omega_\pm$ pointant vers Ω_+ est

$$\vec{\nu}(t,x) = \begin{pmatrix} \nu_x \\ \nu_t \end{pmatrix} = \tfrac{1}{\sqrt{1+s^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -s \end{pmatrix}$$

Soit $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R})$; d'après la formule de Stokes

$$\begin{aligned}
\langle \partial_t u, \phi \rangle &= -\int_{\Omega_-} u_- \partial_t \phi dt dx - \int_{\Omega_+} u_+ \partial_t \phi dt dx \\
&= -u_- \int_{\partial\Omega_-} \phi \nu_t d\sigma(t,x) - u_+ \int_{\partial\Omega_-} \phi(-\nu_t) d\sigma(t,x) \\
&= (u_+ - u_-)\nu_t \int_{\partial\Omega_-} \phi d\sigma(t,x)
\end{aligned}$$

tandis que

$$\begin{aligned}
\langle \partial_x(\tfrac{1}{2}u^2), \phi \rangle &= -\int_{\Omega_-} \tfrac{1}{2}u_-^2 \partial_x \phi dt dx - \int_{\Omega_+} \tfrac{1}{2}u_+^2 \partial_x \phi dt dx \\
&= -\tfrac{1}{2}u_-^2 \int_{\partial\Omega_-} \phi \nu_x d\sigma(t,x) - \tfrac{1}{2}u_-^2 \int_{\partial\Omega_-} \phi(-\nu_x) d\sigma(t,x) \\
&= \tfrac{1}{2}(u_+^2 - u_-^2)\nu_x \int_{\partial\Omega_-} \phi d\sigma(t,x)
\end{aligned}$$

Donc

$$\langle \partial_t u + \partial_x(\tfrac{1}{2}u^2), \phi \rangle = \big((u_+ - u_-)\nu_t + \tfrac{1}{2}(u_+^2 - u_-^2)\nu_x\big) \int_{\partial\Omega_-} \phi d\sigma(t,x)$$

c'est à dire que

$$\partial_t u + \partial_x(\tfrac{1}{2}u^2) = \big((u_+ - u_-)\nu_t + \tfrac{1}{2}(u_+^2 - u_-^2)\nu_x\big)\, d\sigma$$

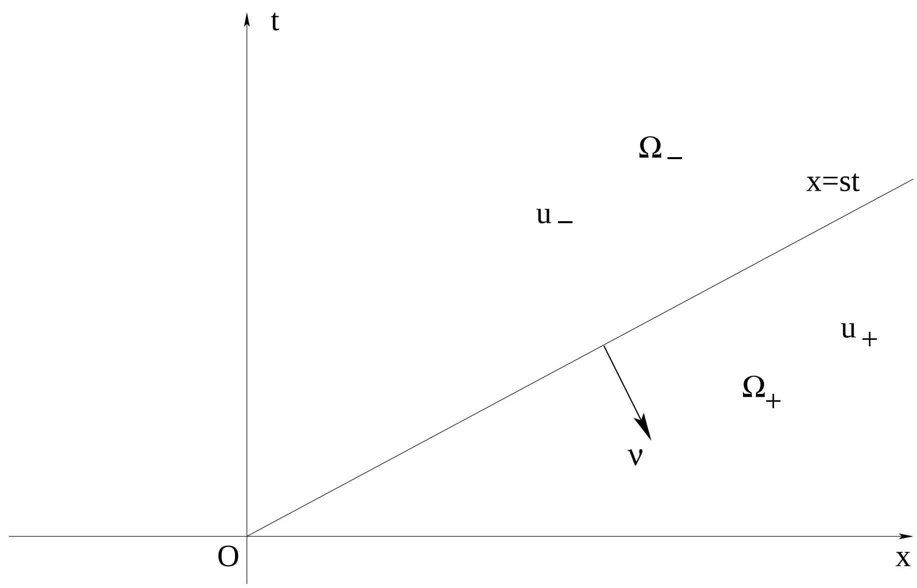
(le membre de droite étant la distribution de simple couche sur la droite d'équation $x = st$ de densité $(u_+ - u_-)\nu_t + \frac{1}{2}(u_+^2 - u_-^2)\nu_x$).

Donc u est solution de (1) au sens des distributions si et seulement si

$$\frac{1}{2}(u_+^2 - u_-^2) = s(u_+ - u_-)$$

ou encore

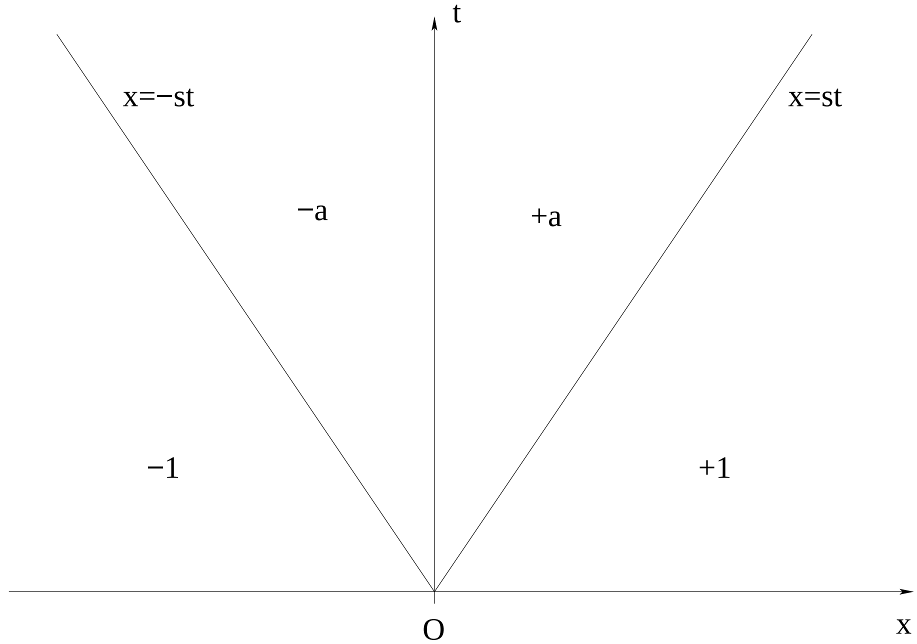
$$s = \frac{1}{2}(u_+ + u_-)\,.$$



2) D'après le 5), pour tout $a > 0$, la fonction

$$u_a(t,x) = -\mathbf{1}_{x<-st} - a\mathbf{1}_{-st\le x<0} + a\mathbf{1}_{0\le x<st} + \mathbf{1}_{x\ge st}$$

est solution de (1) dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ si $s = \frac{1}{2}(1+a)$. On obtient ainsi une infinité de fonctions u_a solutions de (1) au sens des distributions et telles que $u_a(t,\pm x) \to \pm 1$ lorsque $t \to 0$ pour tout $x > 0$.



PROBLÈME

Rappelons que $\langle T_\lambda, \phi\rangle = \lambda^{-D}\langle T, \phi\circ m_{1/\lambda}\rangle$ pour tout $\lambda > 0$; ainsi T est homogène de degré α si

$$\lambda^{\alpha+D}\langle T, \phi\rangle = \langle T, \phi\circ m_{1/\lambda}\rangle$$

pour toute fonction test ϕ.

1) On a $\langle \delta_0, \phi\circ m_{1/\lambda}\rangle = \phi(0) = \langle\delta_0, \phi\rangle$ pour tout $\phi\in C_c^\infty(\mathbf{R}^D)$, d'où δ_0 est homogène de degré $-D$.

De même

$$\begin{aligned}\left\langle \mathrm{vp}\frac{1}{x}, \phi\circ m_{1/\lambda}\right\rangle &= \int_0^\infty (\phi(x/\lambda) - \phi(-x/\lambda))\frac{dx}{x}\\ &= \int_0^\infty (\phi(z)-\phi(-z))\frac{dz}{z} = \left\langle \mathrm{vp}\frac{1}{x}, \phi\right\rangle\end{aligned}$$

où la seconde égalité découle du changement de variables $z = x/\lambda$. On en déduit que $\mathrm{vp}\frac{1}{x}$ est homogène de degré -1 sur $\mathbf{R}$.

2) Pour toute fonction test ϕ et tout $\lambda > 0$, on a

$$\langle\partial_{x_i}T, \phi\circ m_{1/\lambda}\rangle = -\langle T, \partial_{x_i}(\phi\circ m_{1/\lambda}\rangle = -\left\langle T, \frac{1}{\lambda}(\partial_{x_i}\phi)\circ m_{1/\lambda})\right\rangle.$$

Or, comme T est homogène de degré α, on a

$$\langle T, (\partial_{x_i}\phi)\circ m_{1/\lambda})\rangle = \lambda^{D+\alpha}\langle T, \partial_{x_i}\phi\rangle$$

de sorte que

$$\langle \partial_{x_i} T, \phi \circ m_{1/\lambda} \rangle = -\lambda^{D+\alpha-1} \langle T, \partial_{x_i} \phi \rangle = \lambda^{D+\alpha-1} \langle \partial_{x_i} T, \phi \rangle$$

ce qui montre que $\partial_{x_i} T$ est homogène de degré $\alpha - 1$.
3) Soit une famille T_i de distributions homogènes; on désigne par α_i le degré d'homogénéité de T_i et on suppose les α_i deux à deux distincts. A priori, la famille T_i est indexée par un ensemble I quelconque. Supposons qu'il existe une combinaison linéaire finie des T_i qui soit nulle:

$$c_{i_1} T_{i_1} + \ldots + c_{i_N} T_{i_N} = 0 \, .$$

Dans toute la suite, seules les distributions T_{i_n} pour $n = 1, \ldots, N$ vont intervenir, de sorte que l'on fera comme si $i_1 = 1$, $i_2 = 2$, $\ldots$, $i_N = N$. Avec ce léger abus de notation, la combinaison linéaire nulle considérée s'écrit

$$\sum_{i=1}^{N} c_i T_i = 0 \, .$$

En composant le membre de gauche de cette égalité par m_λ pour $\lambda > 0$, on trouve que

$$\left(\sum_{i=1}^{N} c_i T_i \right) \circ m_\lambda = \sum_{i=1}^{N} c_i T_i \circ m_\lambda = \sum_{i=1}^{N} c_i \lambda^{\alpha_i} T_i = 0$$

Appliquant alors cette relation à une fonction test ϕ, on trouve que

$$\sum_{i=1}^{N} c_i \lambda^{\alpha_i} \langle T_i, \phi \rangle = 0 \, ,$$

relation qui vaut pour tout $\lambda > 0$ et toute fonction test ϕ.

Fixons alors $\lambda_0 > 1$; cette relation vaut pour $\lambda = \lambda_0^m$ avec $m = 0, \ldots, N-1$; on obtient ainsi un système de N relations se mettant sous la forme

$$V(\lambda_0^{\alpha_1}, \ldots, \lambda_0^{\alpha_N}) \begin{pmatrix} c_1 \langle T_1, \phi \rangle \\ \vdots \\ c_N \langle T_N, \phi \rangle \end{pmatrix} = 0$$

où $V(x_1, \ldots, x_N)$ désigne la matrice de Vandermonde

$$V(x_1, \ldots, x_N) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_N \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_N^2 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ x_1^{N-1} & x_2^{N-1} & \ldots & x_N^{N-1} \end{pmatrix} \, .$$

Comme les α_i sont deux à deux distincts et que $\lambda_0 > 1$, les $\lambda_0^{\alpha_i}$ sont égalements deux à deux distincts, ce qui implique que la matrice $V(\lambda_0^{\alpha_1}, \dots, \lambda_0^{\alpha_N})$ est inversible. On en déduit donc que

$$c_i \langle T_i, \phi \rangle = 0\,, \quad 1 \le i \le N$$

relation qui vaut pour toute fonction test ϕ. Comme les distributions T_i, étant homogènes, ne sont pas nulles, pour tout $1 \le i \le N$ il existe une fonction test ϕ_i telle que $\langle T_i, \phi_i \rangle \neq 0$. La relation ci-dessus écrite pour ϕ_i entraîne que $c_i = 0$, pour tout $1 \le i \le N$. Donc la famille des T_i est libre.

4) Soit $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^D)$. Le théorème de dérivation des fonctions composées implique que

$$\frac{d}{dt}\phi(tx) = \sum_{i=1}^{D} x_i \partial_{x_i} \phi(tx)\,, \text{ pour tout } t > 0 \text{ et } x \in \mathbf{R}^D\,.$$

Soit donc $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^D)$ homogène de degré α. Alors

$$\begin{aligned}\left\langle \sum_{i=1}^{D} \partial_{x_i}(x_i T), \phi \circ m_t \right\rangle &= -\left\langle T \sum_{i=1}^{D} x_i \partial_{x_i} \phi \circ m_t \right\rangle \\ &= -\left\langle T, \frac{d}{dt} \phi \circ m_t \right\rangle = -\frac{d}{dt} \langle T, \phi \circ m_t \rangle\end{aligned}$$

d'après le théorème de dérivation sous le crochet de dualité. Or, comme T est une distribution homogène de degré α, on a

$$\langle T, \phi \circ m_t \rangle = t^{-D-\alpha} \langle T, \phi \rangle$$

de sorte que

$$\begin{aligned}\left\langle \sum_{i=1}^{D} \partial_{x_i}(x_i T), \phi \circ m_t \right\rangle &= -\frac{d}{dt}\left(t^{-D-\alpha} \langle T, \phi \rangle\right) \\ &= (D+\alpha) t^{-D-\alpha-1} \langle T, \phi \rangle\end{aligned}$$

En faisant $t = 1$, on trouve que

$$\left\langle \sum_{i=1}^{D} \partial_{x_i}(x_i T), \phi \right\rangle = (D+\alpha) \langle T, \phi \rangle$$

qui est précisément la relation demandée.

5) On rappelle — c'est un exercice classique — qu'une distribution S sur $\mathbf{R}$ vérifie $xS = 0$ si et seulement si S est de la forme $S = a\delta_0$ avec $a \in \mathbf{R}$. (Une méthode de démonstration possible consiste à appliquer le résultat de la question 1) dans l'exercice 1).

Si T est une distribution homogène de degré 0 sur $\mathbf{R}$, on déduit du 4) que $(xT)' = xT' + T = T$, ou encore $xT' = 0$. Alors $T' = a\delta_0$ où $a \in \mathbf{R}$, et donc que $T = a\mathbf{1}_{x\geq 0} + b$, avec $a, b \in \mathbf{R}$ constantes arbitraires — toujours d'après l'exercice 1, $(T - a\mathbf{1}_{x\geq 0})' = 0$ donc $T - a\mathbf{1}_{x\geq 0}$ est une constante.

Si T est une distribution homogène de degré -1 sur $\mathbf{R}$, on déduit du 4) que $(xT)' = 0$, de sorte que xT est constante sur $\mathbf{R}$. Rappelons que $x\mathrm{vp}\frac{1}{x} = 1$, de sorte que l'équation $xT = a$ admet pour solution particulière $T = a\mathrm{vp}\frac{1}{x}$.

Donc, si $xT = a$, en posant $S = T - a\mathrm{vp}\frac{1}{x}$, on a $xS = 0$, et on sait que toutes les solutions de cette dernière équation sont de la forme $S = b\delta_0$ avec $b \in \mathbf{R}$. En conclusion, les distributions homogènes d'ordre -1 sur $\mathbf{R}$ sont de la forme $T = a\mathrm{vp}\frac{1}{x} + b\delta_0$, avec $a, b \in \mathbf{R}$.

6)a) Comme A est homogène de degré 0, on a $A(x) = A(\frac{x}{\|x\|})$. Comme A est continue sur $\mathbf{R}^D\setminus\{0\}$, elle est continue sur la sphère unité $\mathbf{S}^{D-1} = \{x \in \mathbf{R}^D \mid \|x\| = 1\}$ qui est compacte, et donc

$$\sup_{x\in\mathbf{R}^D\setminus\{0\}} |A(x)| = \sup_{\|x\|=1} |A(x)| < +\infty\,.$$

Donc

$$|F_\alpha(x)| \leq C\|x\|^{-\alpha} \text{ avec } C = \sup_{\|x\|=1} |A(x)|\,.$$

Or on sait (en passant en coordonnées sphériques dans $\mathbf{R}^D$) que

$$\int_{\|x\|\leq R} \|x\|^{-\alpha}dx = |\mathbf{S}^{D-1}| \int_0^R r^{D-1-\alpha}dr < +\infty \text{ pour } \alpha < D$$

— où $|\mathbf{S}^{D-1}|$ est la mesure superficielle de la sphère unité de $\mathbf{R}^D$. Comme F_α est une fonction continue sur $\mathbf{R}^D \setminus \{0\}$, les deux inégalités ci-dessus montrent que $F_\alpha \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^D)$ pour tout $\alpha < D$.

6)b) Puisque A est une fonction homogène de degré 0, F_α est une fonction homogène sur $\mathbf{R}^D \setminus \{0\}$ de degré $-\alpha$. D'après le 6)a), $F_\alpha \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^D)$ et définit donc une distribution sur $\mathbf{R}^D$. Pour tout $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^D)$ et tout $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned}\langle F_\alpha, \phi \circ m_{1/\lambda}\rangle &= \int_{\mathbf{R}^D} F_\alpha(x)\phi(x/\lambda)dx \\ &= \int_{\mathbf{R}^D} F_\alpha(\lambda z)\phi(z)\lambda^D dz = \lambda^{D-\alpha}\int_{\mathbf{R}^D} F_\alpha(z)\phi(z)dz \\ &= \lambda^{D-\alpha}\langle F_\alpha, \phi\rangle\end{aligned}$$

de sorte que F_α est bien une distribution homogène de degré $-\alpha$ sur $\mathbf{R}^D$.

7) La fonction F_D est de classe C^1 et homogène de degré $-D$ dans $\mathbf{R}^D \setminus \{0\}$. D'après la relation d'Euler pour les fonctions homogènes

$$\sum_{i=1}^{D} x_i \partial_{x_i} F_D(x) = -DF(x)\,,\ \text{pour tout } x \in \mathbf{R}^D \setminus \{0\}$$

de sorte que

$$\sum_{i=1}^{D} \partial_{x_i}(x_i F_D)(x) = 0\,,\ \text{pour tout } x \in \mathbf{R}^D \setminus \{0\}\,.$$

Pour tout $1 \le i \le D$ et tout $x \in \mathbf{R}^D \setminus \{0\}$, on a

$$x_i F_D(x) = \frac{A_i(x)}{\|x\|^{D-1}} \text{ avec } A_i(x) = \frac{x_i}{\|x\|} A(x)$$

et $A_i \in C(\mathbf{R}^D \setminus \{0\})$ est homogène de degré 0. D'après le 6)a), $x_i F_D \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^D)$ et définit, d'après le 6)b), une distribution homogène de degré $1 - D$ sur $\mathbf{R}^D$. D'après le 2), $\partial_{x_i}(x_i F_D)$ est donc une distribution homogène de degré $-D$ sur $\mathbf{R}^D$.

Donc

$$S = \sum_{i=1}^{D} \partial_{x_i}(x_i F_D)$$

est une distribution homogène de degré $-D$ sur $\mathbf{R}^D$ et on vient de voir que sa restriction à $\mathbf{R}^D \setminus \{0\}$ est nulle. Donc S est à support dans $\{0\}$. On en déduit que S est de la forme

$$S = \sum_{|\beta| \le N} a_\beta \partial^\beta \delta_0\,.$$

Mais S est homogène de degré $-D$ et $\partial^\partial \delta_0$ homogène de degré $-D - |\beta|$ d'après le 2). On déduit du 3) que $a_\beta = 0$ pour $|\beta| > 0$ et donc que

$$\sum_{i=1}^{D} \partial_{x_i}(x_i F_D) = c\delta_0$$

pour une certaine constante $c \in \mathbf{R}$.

Appliquons cette relation à une fonction test $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^D)$ radiale: $\phi(x) = \Phi(\|x\|)$:

$$\begin{aligned}\left\langle \sum_{i=1}^{D} \partial_{x_i}(x_i F_D), \phi \right\rangle &= -\int_{\mathbf{R}^D} F_D(x) \sum_{i=1}^{D} x_i \partial_{x_i} \Phi(\|x\|) dx \\ &= -\int_{\mathbf{R}^D} A(x) \|x\|^{-D} \sum_{i=1}^{D} \frac{|x_i|^2}{\|x\|} \Phi'(\|x\|) dx\,.\end{aligned}$$

Passons en coordonnées sphériques $x = r\omega$ avec $r = \|x\|$:

$$\int_{\mathbf{R}^D} A(x)\|x\|^{-D} \sum_{i=1}^{D} \frac{x_i^2}{\|x\|} \Phi'(\|x\|)dx$$
$$= \int_0^\infty \int_{\mathbf{S}^{D-1}} A(r\omega)r^{-D} r\Phi'(r)r^{D-1} d\sigma(\omega)dr$$
$$= \int_0^\infty \left(\int_{\mathbf{S}^{D-1}} A(r\omega)d\sigma(\omega) \right) \Phi'(r)dr$$

en appliquant le théorème de Fubini pour intégrer d'abord en ω. Comme A est homogène de degré 0, $A(r\omega) = A(\omega)$ et donc

$$\left\langle \sum_{i=1}^{D} \partial_{x_i}(x_i F_D), \phi \right\rangle = -\int_{\mathbf{S}^{D-1}} A(\omega)d\sigma(\omega) \int_0^\infty \Phi'(r)dr$$
$$= \int_{\mathbf{S}^{D-1}} A(\omega)d\sigma(\omega)\phi(0)\,,$$

ce qui permet d'identifier c: on trouve donc finalement que

$$\sum_{i=1}^{D} \partial_{x_i}(x_i F_D) = \left(\int_{\mathbf{S}^{D-1}} A(\omega)d\sigma(\omega) \right) \delta_0\,.$$

8)a) La fonction F_D est continue sur $\mathbf{R}^D \setminus \{0\}$. En passant comme ci-dessus en coordonnées sphériques, on trouve que

$$\int_{\|x\|\le R} |F_D(x)|dx = \int_0^R \int_{\mathbf{S}^{D-1}} |A(r\omega)|r^{-D} r^{D-1} d\sigma(\omega)dr$$
$$= \int_{\mathbf{S}^{D-1}} |A(\omega)|d\sigma(\omega) \int_0^R \frac{dr}{r} = +\infty$$

ce qui montre que $F_D \notin L^1_{loc}(\mathbf{R}^D)$.
8)b) On déduit du 4) et du 7) que si F_D définit une distribution homogène de degré $-D$ dans $\mathbf{R}^D$, on a

$$\int_{\mathbf{S}^{D-1}} A(\omega)d\sigma(\omega) = 0\,.$$

Réciproquement, supposons que

$$\int_{\mathbf{S}^{D-1}} A(\omega)d\sigma(\omega) = 0\,.$$

Alors, pour $0 < a < b$, on a, toujours en passant en coordonnées sphériques

$$(1) \qquad \int_{a\le\|x\|\le b} \frac{A(x)}{\|x\|^D} dx = \int_a^b \frac{dr}{r} \int_{\mathbf{S}^{D-1}} A(\omega)d\sigma(\omega) = 0\,.$$

D'abord, pour tout $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^D)$, on a

$$\left|\frac{A(x)}{\|x\|^D}(\phi(x)-\phi(0))\right| \le \sup_{\|z\|=1}|A(z)| \sup_{x\in\mathrm{supp}(\phi)}\|D\phi(x)\|\|x\|^{1-D}$$

de sorte que la fonction continue

$$\mathbf{R}^D \setminus \{0\} \ni x \mapsto \frac{A(x)}{\|x\|^D}(\phi(x)-\phi(0))$$

est localement intégrable sur $\mathbf{R}^D$ et que

$$\begin{aligned}&\int_{\|x\|<\epsilon}\frac{A(x)}{\|x\|^D}(\phi(x)-\phi(0))dx\\ &\le \sup_{\|z\|=1}|A(z)| \sup_{x\in\mathrm{supp}(\phi)}\|D\phi(x)\|\int_{\|x\|<\epsilon}\|x\|^{1-D}dx = O(\epsilon)\end{aligned}$$

De plus, la condition (1) entraîne que, pour tout $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^D)$, la quantité

$$I_\epsilon = \int_{\|x\|>\epsilon}\frac{A(x)}{\|x\|^D}\phi(x)dx + \int_{\|x\|<\epsilon}\frac{A(x)}{\|x\|^D}(\phi(x)-\phi(0))dx$$

est indépendante de $\epsilon > 0$, puisque, pour tout $\eta < \epsilon$,

$$\begin{aligned}I_\epsilon - I_\eta &= \int_{\eta<\|x\|<\epsilon}\frac{A(x)}{\|x\|^D}(\phi(x)-\phi(0))dx - \int_{\eta<\|x\|<\epsilon}\frac{A(x)}{\|x\|^D}\phi(x)dx\\ &= -\phi(0)\int_{\eta<\|x\|<\epsilon}\frac{A(x)}{\|x\|^D}dx = 0\end{aligned}$$

Pour tout $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^D)$, on définit la distribution T par la formule

$$\begin{aligned}\langle T, \phi\rangle &= \int_{\|x\|>\epsilon}\frac{A(x)}{\|x\|^D}\phi(x)dx + \int_{\|x\|<\epsilon}\frac{A(x)}{\|x\|^D}(\phi(x)-\phi(0))dx\\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\|x\|>\epsilon}\frac{A(x)}{\|x\|^D}\phi(x)dx\,.\end{aligned}\tag{2}$$

On vérifie que T est une distribution homogène de degré $-D$ et d'ordre ≤ 1 sur $\mathbf{R}^D$, par un calcul analogue à celui montrant que $\mathrm{vp}\frac{1}{x}$ est une distribution homogène de degré -1 et d'ordre 1 sur $\mathbf{R}$.

Si $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^D \setminus \{0\})$, on a $\phi(0) = 0$ de sorte que

$$\langle T, \phi\rangle = \int_{\mathbf{R}^D} F_D(x)\phi(x)dx$$

d'après la première égalité de (2). Ainsi, $T\big|_{\mathbf{R}^D\setminus\{0\}} = F_D$.

8)c) Lorsque $D = 1$, la sphère unité $\mathbf{S}^0 = \{\pm 1\}$; la fonction F_1 est définie par

$$F_1(x) = \frac{A(+1)}{x} \text{ pour } x > 0\,,$$

$$F_1(x) = -\frac{A(-1)}{x} \text{ pour } x < 0\,.$$

La condition sur A se réduit dans ce cas à $A(+1) + A(-1) = 0$, de sorte que $F_1(x) = \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ et que la distribution T prolongeant F_1 à $\mathbf{R}$ tout entier est $\mathrm{vp}\frac{1}{x}$.