MAT431 — PROMOTION 2006
CORRIGÉ DU DEVOIR À RENDRE LE 8 JANVIER 2008

I

a) Supposons que $u' = f$ dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ avec $f \in C(\mathbf{R})$. Définissons

$$F(x) := \int_0^x f(z)dz\,, \quad x \in \mathbf{R}\,.$$

On a $F \in C^1(\mathbf{R})$ comme primitive d'une fonction continue, et $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. En particulier F est localement intégrable sur $\mathbf{R}$ et définit donc un élément de $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$, et, d'après la Proposition 3.3.2 p. 66, $F' = f$ dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$.

Donc la distribution $u - F$ vérifie $(u - F)' = u' - f = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$. D'après la Proposition 3.3.4 p. 67, $u - F = \text{Const.}$ Donc $u = \text{Const.} + F$ appartient à $C^1(\mathbf{R})$.

b) (i) Soit $R > 0$ et $\chi \in C_c^\infty(\mathbf{R})$ telle que $\chi = 1$ sur $B(0, R + 2)$. On suppose que $\text{supp}(\zeta_\epsilon) \subset B(0, \epsilon)$ pour tout $\epsilon > 0$. Alors, pour tout $0 < \epsilon < 1$, on a

$$(\chi\partial_j u) \star \zeta_\epsilon = (\partial_j u) \star \zeta_\epsilon = \partial_j (u \star \zeta_\epsilon) = \partial_j f_\epsilon \text{ et } \chi\partial_j u = \partial_j u \text{ sur } B(0, R + 1)\,.$$

En effet, d'après la majoration du support d'un produit de convolution

$$\text{supp}((\partial_j u - \chi\partial_j u) \star \zeta_\epsilon) \subset B(0, R+2)^c + \overline{B(0, \epsilon)} \subset B(0, R+2)^c + \overline{B(0, 1)} = B(0, R+1)^c\,.$$

Comme d'autre part

$$(\chi\partial_j u) \star \zeta_\epsilon \to \chi\partial_j u \text{ uniformément sur } \mathbf{R}^N$$

lorsque $\epsilon \to 0^+$, d'après le Théorème 1.3.11 p. 18 puisque $\chi\partial_j u$ est continue sur $\mathbf{R}^N$, il s'ensuit que

$$\partial_j f_\epsilon \to \partial_j u \text{ uniformément sur } \overline{B(0, R)} \text{ lorsque } \epsilon \to 0^+\,.$$

Ceci vaut pour tout $R > 0$ et tout $j = 1, \ldots, N$, d'où le (i).

(ii) Pour tout $\epsilon > 0$, on a $u \star \zeta_\epsilon \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$. Donc d'après la formule de Taylor à l'ordre 1,

$$f_\epsilon(x) = f_\epsilon(0) + \int_0^1 \sum_{j=1}^N x_j \partial_j f_\epsilon(tx)dt\,, \quad x \in \mathbf{R}^N\,,$$

ou autrement dit

$$g_\epsilon(x) = \sum_{j=1}^N x_j \int_0^1 \partial_j f_\epsilon(tx)dt\,, \quad x \in \mathbf{R}^N\,.$$

Posons

$$g(x) = \sum_{j=1}^N x_j \int_0^1 \partial_j u(tx)dt\,, \quad x \in \mathbf{R}^N\,.$$

Pour tout $R > 0$ et tout $|x| \leq R$, on a

$$\begin{aligned} |g_\epsilon(x) - g(x)| &\leq \sum_{j=1}^{N} |x_j| \int_0^1 |\partial_j f_\epsilon(tx) - \partial_j u(tx)| dt \\ &\leq NR \max_{1\leq j\leq N} \int_0^1 \sup_{|y|\leq R} |\partial_j f_\epsilon(y) - \partial_j u(y)| dt \end{aligned}$$

de sorte que

$$\sup_{|x|\leq R} |g_\epsilon(x) - g(x)| \leq NR \max_{1\leq j\leq N} \sup_{|y|\leq R} |\partial_j f_\epsilon(y) - \partial_j u(y)| \to 0$$

lorsque $\epsilon \to 0^+$ d'après le (i). Ainsi, g_ϵ converge uniformément sur tout compact pour $\epsilon \to 0^+$.

c) D'après le b) (ii), pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$f_\epsilon(0) = f_\epsilon - g_\epsilon \, .$$

On sait que $g_\epsilon \to g$ uniformément sur tout compact d'après le b) (ii). D'après le Théorème 4.2.4 p. 122, on a d'autre part

$$f_\epsilon = u \star \zeta_\epsilon \to u \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$$

lorsque $\epsilon \to 0^+$. Par conséquent, pour tout $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$

$$f_\epsilon(0) \int_{\mathbf{R}^N} \phi(x) dx = \langle f_\epsilon, \phi \rangle - \langle g_\epsilon, \phi \rangle \to \langle u, \phi \rangle - \langle g, \phi \rangle$$

lorsque $\epsilon \to 0^+$. Choisissons ϕ telle que

$$\int_{\mathbf{R}^N} \phi(x) dx \neq 0 \, ;$$

la convergence ci-dessus montre que

$$f_\epsilon(0) \to \left(\int_{\mathbf{R}^N} \phi(x) dx \right)^{-1} (\langle u, \phi \rangle - \langle g, \phi \rangle)$$

lorsque $\epsilon \to 0^+$.

d) Pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$f_\epsilon = f_\epsilon(0) + g_\epsilon \, .$$

Lorsque $\epsilon \to 0^+$, on a $f_\epsilon(0) \to C$ dans $\mathbf{R}$, et $g_\epsilon \to g$ uniformément sur tout compact de $\mathbf{R}^N$ tandis que $f_\epsilon \to u$ dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$. Donc

$$u = C + g \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N) \, .$$

La fonction g est continue sur $\mathbf{R}^N$ comme limite uniforme sur tout compact de $\mathbf{R}^N$ de g_ϵ qui appartient à $C^\infty(\mathbf{R}^N)$ pour tout $\epsilon > 0$, car $g_\epsilon = u \star \zeta_\epsilon - f_\epsilon(0) \in C^\infty(\mathbf{R})$ (cf. Proposition 4.2.3 p. 122).

Donc u est (la distribution définie par la) fonction continue $C + g$. Or

$$g(x) = \sum_{j=1}^{N} x_j \int_0^1 \partial_j u(tx) dt \, , \qquad \text{de sorte que } g(0) = 0 \, .$$

Ainsi $C = u(0)$, de sorte que

$$\begin{aligned} u(x) &= u(0) + \sum_{j=1}^{N} x_j \int_0^1 \partial_j u(tx)dt \\ &= u(0) + \sum_{j=1}^{N} x_j \partial_j u(0) + \sum_{j=1}^{N} x_j \int_0^1 (\partial_j u(tx) - \partial_j u(0))dt \,. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 (\partial_j u(tx) - \partial_j u(0))dt \right| &\le \int_0^1 \sup_{0\le t\le 1} |\partial_j u(tx) - \partial_j u(0)|dt \\ &\le \max_{1\le j\le N} \sup_{|z|\le|x|} |\partial_j u(z) - \partial_j u(0)| =: \epsilon(|x|) \end{aligned}$$

avec $\epsilon(r) \to 0$ lorsque $r \to 0^+$. Donc

$$\left| u(x) - u(0) - \sum_{j=1}^{N} x_j \partial_j u(0) \right| \le N|x|\epsilon(|x|) \,,$$

ce qui montre que la fonction continue u est différentiable en 0 et admet pour dérivées partielles en 0 les valeurs en 0 des fonctions continues $\partial_j u$ pour $j = 1, \ldots, N$.

On a vient donc de montrer que toute distribution $u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$ telle que $\partial_j u \in C(\mathbf{R}^N)$ pour $j = 1, \ldots, N$ vérifie $u \in C(\mathbf{R}^N)$ admet des dérivées partielles d'ordre 1 au point 0 qui sont les valeurs en 0 des fonctions continues $\partial_j u$ pour $j = 1, \ldots, N$.

Evidemment, pour tout $x_0 \in \mathbf{R}^N$, la distribution $u \star \delta_{-x_0}$ vérifie

$$\partial_j (u \star \delta_{-x_0}) = (\partial_j u) \star \delta_{-x_0} = (\partial_j u) \circ \tau_{x_0} \in C(\mathbf{R}^N) \,.$$

Le résultat énoncé ci-dessus montre que la fonction $u \in C(\mathbf{R}^N)$ admet en tout point $x_0 \in \mathbf{R}^N$ des dérivées partielles d'ordre 1 qui sont les valeurs en x_0 des fonctions continues $\partial_j u$ pour $j = 1, \ldots, N$. Comme u est ainsi une fonction continue sur $\mathbf{R}^N$ admettant en tout point de $\mathbf{R}^N$ des dérivées partielles d'ordre 1 qui sont continues sur $\mathbf{R}^N$, il s'ensuit que $u \in C^1(\mathbf{R}^N)$.

II

Si ce que l'on cherche à démontrer est vrai, on a

$$U(\phi)(x) = u \star \phi(x) = \langle u, \phi(x - \cdot)\rangle \,, \quad x \in \mathbf{R}^N \,,$$

de sorte que

$$\langle u, \tilde{\phi}\rangle = U(\phi)(0) \,, \quad \text{pour tout } \phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N) \,.$$

Posons donc

$$\langle u, \phi\rangle := U(\tilde{\phi})(0) \,, \quad \text{pour tout } \phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N) \,.$$

Vérifions que la forme linéaire u ainsi définie est bien une distribution à support compact: dans l'hypothèse de l'énoncé, on choisit $K = \{0\}$ et $p = 0$, de sorte qu'il existe un compact $L \in \mathbf{R}^N$, $q \in \mathbf{N}$ et $C > 0$ tels que

$$|\langle u, \phi\rangle| = |U(\tilde{\phi})(0)| \le C \max_{|\beta|\le q} \sup_{x\in L} |\partial^\beta \phi(x)|$$

pour tout $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ Or ceci est exactement la propriété de continuité des distributions à support compact sur $\mathbf{R}^N$.