PROMOTION 2006 — MAT431
Corrigé de l'épreuve du 21/I/2008

I

1) La fonction $x \mapsto \frac{1-\cos(nx)}{x}$ est continue sur $\mathbf{R}^*$ et on a

$$\frac{1-\cos(nx)}{x} \to 0 \text{ lorsque } x \to 0$$

pour tout $n \in \mathbf{N}$: en particulier, la fonction $x \mapsto \frac{1-\cos(nx)}{x}$ est localement intégrable sur $\mathbf{R}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ et définit donc un élément de $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$. Pour tout $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R})$, on a

$$\left\langle \frac{1-\cos(nx)}{x}, \phi \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos(nx)}{x}\phi(x)dx = \int_0^\infty \frac{1-\cos(nx)}{x}(\phi(x)-\phi(-x))dx$$

puisque la fonction $x \mapsto \frac{1-\cos(nx)}{x}$ est impaire. Considérons la fonction ψ définie sur $\mathbf{R}$ par

$$\psi(x) = \frac{\phi(x)-\phi(-x)}{x} \text{ pour } x \neq 0\,, \qquad \psi(0) = 2\phi'(0)\,.$$

La fonction ψ est continue à support compact sur $\mathbf{R}$ et de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^*$ car $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R})$. De plus

$$\psi'(x) = \frac{\phi'(x)+\phi'(-x)}{x} - \frac{\phi(x)-\phi(-x)}{x^2} = \frac{2\phi'(0)}{x} + O(x) - \frac{2\phi'(0)}{x} + O(x) = O(x)$$

de sorte que $\psi'(x) \to 0$ lorsque $x \to 0$. Par conséquent, $\psi \in C^1(\mathbf{R})$ et $\psi'(0) = 0$. En intégrant par parties

$$\int_0^\infty \cos(nx)\psi(x)dx = \left[\frac{\sin(nx)}{n}\psi(x)\right]_0^\infty - \frac{1}{n}\int_0^\infty \sin(nx)\psi'(x)dx\,.$$

Le terme entre crochets étant nul,

$$\left|\int_0^\infty \cos(nx)\psi(x)dx\right| \leq \frac{1}{n}\int_0^\infty |\psi'(x)|dx = O(1/n) \to 0$$

puisque ψ est une fonction de classe C^1 à support compact sur $\mathbf{R}$. Au total

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{1-\cos(nx)}{x}, \phi \right\rangle &= \int_0^\infty \frac{\phi(x)-\phi(-x)}{x}dx - \int_0^\infty \cos(nx)\psi(x)dx \\ &= \int_0^\infty \frac{\phi(x)-\phi(-x)}{x}dx + O(1/n) \to \left\langle \mathrm{vp}\,\frac{1}{x}, \phi \right\rangle.\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{1-\cos(nx)}{x} \to \mathrm{vp}\,\frac{1}{x} \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R})\,.$$

2) a) On calcule, pour tout $\xi \neq 0$

$$\widehat{\mathbf{1}_{[-1,1]}}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x}\mathbf{1}_{[-1,1]}(x)dx = \int_{-1}^{1} e^{-i\xi x}dx = \frac{e^{-i\xi}-e^{i\xi}}{-i\xi} = 2\frac{\sin\xi}{\xi}\,.$$

2) b) Comme $\mathbf{1}_{[-1,1]} \in L^2(\mathbf{R})$, le théorème de Plancherel entraîne que

$$\tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(2\frac{\sin\xi}{\xi}\right)^2 d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{1}_{[-1,1]}(x)^2dx = 2$$

de sorte que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin \xi}{\xi}\right)^2 d\xi = \pi \,.$$

3) a) La fonction $x \mapsto \frac{1-\cos(nx)}{x^2}$ est continue sur $\mathbf{R}^*$ et on a

$$\frac{1-\cos(nx)}{x^2} \to \tfrac{1}{2}n^2 \text{ lorsque } x \to 0$$

pour tout $n \in \mathbf{N}$. En particulier, la fonction $x \mapsto \frac{1-\cos(nx)}{x^2}$ est localement intégrable sur $\mathbf{R}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ et définit donc un élément de $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$. Pour tout $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R})$, on a

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{1-\cos(nx)}{x^2}, \phi \right\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos(nx)}{x^2} \phi(x) dx \\ &= \int_0^\infty \frac{1-\cos(nx)}{x^2} (\phi(x) + \phi(-x) - 2\phi(0)) dx \\ &+ 2\phi(0) \int_0^\infty \frac{1-\cos(nx)}{x^2} dx \,.\end{aligned}$$

D'une part,

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos(nx)}{x^2} dx = \int_0^\infty \frac{2\sin^2(\frac{nx}{2})}{x^2} dx = n \int_0^\infty \frac{\sin^2 y}{y^2} dy = n\pi$$

après changement de variables $x \mapsto y = \frac{nx}{2}$.

Soit d'autre part la fonction χ définie sur $\mathbf{R}$ par la formule

$$\chi(x) = \frac{(\phi(x) + \phi(-x) - 2\phi(0))}{x^2} \text{ pour } x \neq 0 \chi(0) = \phi''(0) \,.$$

La fonction χ ainsi définie est continue sur $\mathbf{R}$ et de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^*$. De plus

$$\begin{aligned}\chi'(x) &= \frac{(\phi'(x) - \phi'(-x))}{x^2} - 2\frac{(\phi(x) + \phi(-x) - 2\phi(0))}{x^3} \\ &= \frac{2\phi''(0)}{x} + O(x) - 2\frac{\phi''(0)}{x^3} + O(x) = O(x) \to 0\end{aligned}$$

lorsque $x \to 0$, ce qui montre que $\chi \in C^2(\mathbf{R})$. Ecrivons que

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \frac{1-\cos(nx)}{x^2} (\phi(x) + \phi(-x) - 2\phi(0)) dx \\ &= \int_0^\infty \frac{(\phi(x) + \phi(-x) - 2\phi(0))}{x^2} dx - \int_0^\infty \cos(nx)\chi(x) dx \,.\end{aligned}$$

Comme dans le 1), on montre que

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \cos(nx)\chi(x) dx &= \left[\frac{\sin(nx)}{n}\chi(x)\right]_0^{+\infty} - \frac{1}{n}\int_0^\infty \sin(nx)\chi'(x) dx \\ &= -\frac{1}{n}\int_0^\infty \sin(nx)\chi'(x) dx = O(1/n) \,.\end{aligned}$$

De même, en intégrant par parties, on voit que

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{(\phi(x) + \phi(-x) - 2\phi(0))}{x^2} dx &= -\left[\frac{(\phi(x) + \phi(-x) - 2\phi(0))}{x}\right]_0^{+\infty} \\ &+ \int_0^\infty \frac{\phi'(x) - \phi'(-x)}{x} dx = \left\langle \operatorname{vp}\frac{1}{x}, \phi' \right\rangle .\end{aligned}$$

Donc, lorsque $n \to +\infty$, on a

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos(nx)}{x^2}(\phi(x)+\phi(-x)-2\phi(0))dx$$
$$= -\left\langle \left(\mathrm{vp}\,\frac{1}{x}\right)', \phi \right\rangle + O(1/n) \to -\left\langle \left(\mathrm{vp}\,\frac{1}{x}\right)', \phi \right\rangle .$$

Finalement

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{1-\cos(nx)}{x^2}, \phi \right\rangle &= \int_0^\infty \frac{1-\cos(nx)}{x^2}(\phi(x)+\phi(-x)-2\phi(0))dx \\ &\quad + 2\phi(0)\int_0^\infty \frac{1-\cos(nx)}{x^2}dx \\ &= \int_0^\infty \frac{1-\cos(nx)}{x^2}(\phi(x)+\phi(-x)-2\phi(0))dx + 2\pi n\langle \delta_0, \phi\rangle\end{aligned}$$

de sorte que, pour $C = -2\pi$, et pour toute fonction $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R})$, l'on a

$$\left\langle \frac{1-\cos(nx)}{x^2}, \phi \right\rangle + Cn\langle \delta_0, \phi\rangle \to -\left\langle \left(\mathrm{vp}\,\frac{1}{x}\right)', \phi \right\rangle ,$$

c'est à dire que

$$\frac{1-\cos(nx)}{x^2} - 2\pi n\delta_0 \to -\left(\mathrm{vp}\,\frac{1}{x}\right)' \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}) .$$

II

1) Pour $F \in C^2(\mathbf{R}_+^*)$, la fonction $f : x \mapsto F(|x|)$ est de classe C^2 sur $\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$, et on a

$$\Delta f(x) = \frac{1}{|x|}\frac{d^2}{dr^2}(rF)\Big|_{r=|x|} \text{ pour tout } x \neq 0 .$$

Alors

$$(\Delta+1)f(x) = \frac{1}{|x|}\left(\frac{d^2}{dr^2}(rF) + rF\right)\Big|_{r=|x|} ,$$

de sorte que la condition

$$(\Delta+1)f = 0 \text{ pour tout } x \neq 0$$

équivaut à

$$\frac{d^2}{dr^2}(rF) + rF = 0 \text{ pour tout } r > 0.$$

Les solutions de cette équations sont les fonctions de la forme

$$rF(r) = \alpha\cos(r) + \beta\sin(r) , \quad \text{ pour } r > 0 .$$

Autrement dit, les solutions f radiales de $(\Delta+1)f = 0$ sur $\mathbf{R}^3\setminus\{0\}$ sont les fonctions de la forme

$$f(x) = \alpha\frac{\cos|x|}{|x|} + \beta\frac{\sin|x|}{|x|} , \text{ avec } \alpha, \beta \in \mathbf{R} \text{ quelconques.}$$

2) Définissons

$$a(z) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{z^n}{(2n)!} , \quad b(z) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{z^n}{(2n+1)!} .$$

Les deux séries entières ci-dessus sont de rayon de convergence infini, de sorte que les fonctions a et b sont de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$. D'autre part, on trouve, en utilisant les séries de Taylor en 0 des fonctions cos et sin, que

$$A(x) = a(|x|^2)\,, \quad B(x) = b(|x|^2) \text{ pour tout } x \in \mathbf{R}^3\,.$$

Donc A et B sont de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^3$ comme composées des fonctions a et b de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$ par la fonction $x \mapsto |x|^2$ qui est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^3$.

3) On a montré au 1) que

$$(\Delta + 1)B(x) = 0 \text{ pour tout } x \neq 0\,.$$

Comme d'autre part $B \in C^\infty(\mathbf{R}^3)$ d'après le 2), il s'ensuit que les fonctions ΔB et B sont continues sur $\mathbf{R}^3$, d'où

$$(\Delta + 1)B(x) = 0 \text{ pour tout } x \in \mathbf{R}^3\,.$$

4) a) On a

$$\nabla \frac{1}{|x|} = -\frac{x}{|x|^3} \text{et } \Delta \frac{1}{|x|} = -4\pi\delta_0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^3)$$

(cf. poly. p. 199).

4) b) D'autre part, pour tout $x \neq 0$, on a

$$\nabla A(x) = -\sin|x| \frac{x}{|x|} = -B(x)x\,,$$

et

$$\Delta A(x) = -\operatorname{div}(B(x)x) = -B(x)\operatorname{div}(x) - \nabla B(x)\cdot x = -3B(x) - x\cdot\nabla B(x)\,.$$

Or

$$\nabla B(x) = \left(\frac{\cos|x|}{|x|} - \frac{\sin|x|}{|x|^2}\right)\frac{x}{|x|}$$

de sorte que

$$x\cdot\nabla B(x) = \left(\frac{\cos|x|}{|x|} - \frac{\sin|x|}{|x|^2}\right)|x| = A(x) - B(x)\,.$$

Au total, pour tout $x \in \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$, on a

$$\nabla A(x) = -B(x)x \text{ et } \Delta A(x) = -3B(x) - (A(x) - B(x) = -2B(x) - A(x)\,.$$

Comme $A \in C^\infty(\mathbf{R}^3)$ d'après le 2), les égalités ci-dessus valent encore pour $x = 0$, de sorte que

$$\nabla A(x) = -B(x)x \text{ et } \Delta A(x) = -A(x) - 2B(x) \text{ pour tout } x \in \mathbf{R}^3\,.$$

4) c) La formule de Leibnitz au sens des distributions montre que

$$\Delta\left(A\frac{1}{|x|}\right) = A\Delta\frac{1}{|x|} + 2\nabla A\cdot\nabla 1|x| + (\Delta A)\frac{1}{|x|}$$

dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$. Grâce aux 4) a) et b), cette égalité devient

$$\Delta\left(A\frac{1}{|x|}\right) = -4\pi A\delta_0 - 2B(x)x\cdot\left(-\frac{x}{|x|^3}\right) - (A+2B)\frac{1}{|x|}$$

$$= -4\pi A(0)\delta_0 + 2B(x)\frac{1}{|x|} - (A+2B)\frac{1}{|x|} = -4\pi A(0)\delta_0 - A\frac{1}{|x|}$$

ou encore

$$\Delta\left(A\frac{1}{|x|}\right) + A\frac{1}{|x|} = -4\pi A(0)\delta_0 = -4\pi\delta_0$$

dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^3)$.
5) a) Si $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^3)$ et $(\Delta + 1)T = 0$, la transformée de Fourier de T vérifie

$$(-|\xi|^2 + 1)\mathcal{F}T = 0\,, \text{ de sorte que } \operatorname{supp}(\mathcal{F}T) \subset \{\xi \in \mathbf{R}^3 \,|\, |\xi| = 1\}\,.$$

En particulier, $\mathcal{F}T$ est une distribution à support compact dans $\mathbf{R}^3$. Par conséquent $\mathcal{F}(\mathcal{F}T)$ est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^3$ (cf. Théorème 5.4.5 du poly.); or, d'après le théorème d'inversion de Fourier, $\mathcal{F}(\mathcal{F}T) = (2\pi)^3 T \circ (-Id_{\mathbf{R}^3})$. Donc Test une fonction de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^3$.
5) b) D'après le 4) c), $-\frac{1}{4\pi} A|x|^{-1}$ est une solution élémentaire de l'opérateur $\Delta + 1$. Vérifions qu'elle est tempérée sur $\mathbf{R}^3$: en effet

$$\frac{\cos|x|}{|x|} = \mathbf{1}_{|x| \leq 1} \frac{\cos|x|}{|x|} + \mathbf{1}_{|x|>1} \frac{\cos|x|}{|x|}\,.$$

La fonction $x \mapsto \mathbf{1}_{|x|\leq 1} \frac{\cos|x|}{|x|}$ est intégrable sur $\mathbf{R}^3$: elle définit donc un élément de $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^3)$. La fonction $x \mapsto \mathbf{1}_{|x|>1} \frac{\cos|x|}{|x|}$ est bornée sur $\mathbf{R}^3$ (car majorée en valeur absolue par 1): elle définit donc un élément de $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^3)$. Ainsi $x \mapsto \frac{\cos|x|}{|x|}$ définit une distribution tempérée sur $\mathbf{R}^3$ comme somme de deux distributions tempérées sur $\mathbf{R}^3$. Soit maintenant $E \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^3)$ telle que $\Delta + 1)E = \delta_0$; alors $T = E + \frac{1}{4\pi}\frac{\cos|x|}{|x|}$ est une distribution tempérée sur $\mathbf{R}^3$ (comme somme de deux distributions tempérées sur $\mathbf{R}^3$) et vérifie $(\Delta + 1)T = 0$. D'après le 5) a), $E + \frac{1}{4\pi}\frac{\cos|x|}{|x|}$ est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^3$, cqfd.

III

1) a) Comme $\overline{O}$ est borné et inclus dans W, les distributions $\mathbf{1}_O$ et ses dérivées $\partial_j \mathbf{1}_O$ sont à support compact dans W. On peut donc les évaluer sur des fonctions de classe C^∞ sur W (Proposition 4.1.4 du poly.). Comme les fonctions u et $v \in C^\infty(W)$, on a donc, d'après la formule de Green (écrite comme dans le Théorème 3.4.4 du poly.)

$$\begin{aligned}
\int_{\partial O} u(y) \frac{\partial v}{\partial n}(y) d\sigma(y) &= \sum_{j=1}^N \Big\langle \nu_j \sigma, u \partial_j v \Big\rangle = \sum_{j=1}^N \Big\langle -\partial_j \mathbf{1}_O, u\partial_j v \Big\rangle \\
&= \sum_{j=1}^N \Big\langle \mathbf{1}_O, -\partial_j (u \partial_j v) \Big\rangle = \sum_{j=1}^N \int_O (u \partial_j^2 v + \partial_j u \partial_j v)(x) dx \\
&= \int_O (u \Delta v + \nabla u \cdot \nabla v)(x) dx\,.
\end{aligned}$$

1) b) En échangeant les rôles de u et v dans la formule obtenue au 1) a), on voit que

$$\int_{\partial O} v(y) \frac{\partial u}{\partial n}(y) d\sigma(y) = \int_O (v \Delta u + \nabla u \cdot \nabla v)(x) dx\,.$$

Soustrayant membre à membre cette égalité de celle obtenue au 1) a), on trouve que

$$\int_{\partial O} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right)(y) d\sigma(y) = \int_O (u \Delta v - v \Delta u)(x) dx\,.$$

2) Comme f est harmonique dans Ω et que $0 < r_2 < \rho(x_0)$, la propriété de la moyenne assure que

$$\int_{\mathbf{S}^{N-1}} f(x_0 + r_2\omega)d\sigma(\omega) = f(x_0)|bS^{N-1}|\,.$$

Multipliant chaque membre de cette égalité par $f(x_0)$, on trouve que

$$f(x_0)\int_{\mathbf{S}^{N-1}} f(x_0 + r_2\omega)d\sigma(\omega) = f(x_0)^2|bS^{N-1}|\,.$$

Or cette dernière égalité coïncide avec (1) dans le cas où $r_1 = 0$, puisqu'alors $r_0 = \sqrt{r_1 r_2} = 0$. On a donc ainsi démontré (1) dans le cas particulier $r_1 = 0$.
3) a) La fonction f étant harmonique dans Ω, on a $f \in C^\infty(\Omega)$. Soit alors $a \in]1, \rho(x_0)/r_0[$; considérons la fonction

$$\phi:\ (\lambda, z) \mapsto f(x_0 + \tfrac{1}{\lambda} r_0 z) f(x_0 + \lambda r_0 z)\,,$$

qui est de classe C^∞ sur $]-1/a, a[\times B(0, \rho(x_0)/r_0 a)$. Soit χ, fonction de classe C^∞ 'a support compact dans $B(0, \rho(x_0)/r_0 a)$ valant identiquement 1 sur un voisinage de la sphère unité (l'existence d'une telle fonction découle du Lemme 1.4.1 du poly.). Alors

$$A(\lambda) = \langle \sigma, \phi(\lambda, \cdot)\chi\rangle$$

où σ est la distribution de simple couche sur la sphère unité de $\mathbf{R}^N$ définie par l'élément de surface $d\sigma$ — voir Exemple 3.2.6 du poly., ou encore la notation définie dans l'énoncé du Théorème 3.4.4, ibid.. Par dérivation sous le crochet de dualité (Proposition 3.3.20 du poly.), on déduit de ce qui précède que A est de classe C^∞ sur tout intervalle de la forme $]-1/a, a[$ avec $a \in]1, \rho(x_0)/r_0[$, c'est à dire que $A \in C^\infty(]r_0/\rho(x_0), \rho(x_0)/r_0[$. De plus, comme χ vaut identiquement 1 au voisinage du support de σ,

$$A'(\lambda) = \langle \sigma, \partial_l \phi(\lambda, \cdot)\chi\rangle = \langle \sigma, \partial_l \phi(\lambda, \cdot)\rangle =$$
$$\int_{\mathbf{S}^{N-1}} \left(f(x_0 + \tfrac{1}{\lambda} r_0\omega)\nabla f(x_0 + \lambda r_0\omega) - \frac{1}{\lambda^2} f(x_0 + \lambda r_0\omega)\nabla f(x_0 + \tfrac{1}{\lambda} r_0\omega)\right)\cdot(r_0\omega)d\sigma(\omega)$$

pour tout $\lambda \in]r_0/\rho(x_0), \rho(x_0)/r_0[$.

3) b) Soit $a \in]1, \rho(x_0)/r_0[$; pour tout $\lambda \in \underline{]-1/a}, a[$, les fonctions u et v sont harmoniques sur $B(0, \rho(x_0)/ar_0)$ qui contient $\overline{B(0,1)}$. Appliquons la formule du 1) b) avec $W = B(0, \rho(x_0)/ar_0)$ et $O = B(0,1)$: on trouve que

$$0 = \int_{\partial B(0,1)} \left(u\frac{dv}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)(y)d\sigma(y) =$$
$$\int_{\mathbf{S}^{N-1}} \left(\lambda r_0 f(x_0 + \tfrac{1}{\lambda} r_0\omega)\nabla f(x_0 + \lambda r_0\omega) - \frac{r_0}{\lambda} f(x_0 + \lambda r_0\omega)\nabla f(x_0 + \tfrac{1}{\lambda} r_0\omega)\right)\cdot\omega d\sigma(\omega)$$
$$= \lambda A'(\lambda)$$

pour tout $\lambda \in]-1/a, a[$. Comme ceci vaut pour tout $a \in]1, \rho(x_0)/r_0[$, on en déduit que

$$\lambda A'(\lambda) = 0 \text{ pour tout } \lambda \in]r_0/\rho(x_0), \rho(x_0)/r_0[\,.$$

3) c) Comme $0 \notin]r_0/\rho(x_0), \rho(x_0)/r_0[$, on a, $A'(\lambda) = 0$ pour tout $\lambda \in]r_0/\rho(x_0), \rho(x_0)/r_0[$. Donc A est constante sur l'intervalle $]r_0/\rho(x_0), \rho(x_0)/r_0[$. Comme 1 et r_2/r_1 appartiennent tous deux a cet intervalle,

$$\int_{\mathbf{S}^{N-1}} f(x_0 + r_1\omega)f(x_0 + r_2\omega)d\sigma(\omega) = A(r_2/r_1) = A(1) = \int_{\mathbf{S}^{N-1}} f(x_0 + r_0\omega)^2 d\sigma(\omega)\,,$$

ce qui démontre l'identité (1).
4) a) La fonction f étant harmonique sur $\mathbf{R}^N$, elle est en particulier continue en 0. Donc, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $R_\epsilon > 0$ tel que

$$|x| < 1/R_\epsilon \Rightarrow |f(x)| < \epsilon\,.$$

Autrement dit,

$$|f(\tfrac{1}{r}\omega)| < \epsilon \text{ pour tout } \omega \in \mathbf{S}^{N-1} \text{ et } r > R_\epsilon\,.$$

D'après l'identité (1), pour tout $r > R_\epsilon$, on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{S}^{N-1}} f(\omega)^2 d\sigma(\omega) &= \int_{\mathbf{S}^{N-1}} f(\tfrac{1}{r}\omega) f(r\omega) d\sigma(\omega) \leq \int_{\mathbf{S}^{N-1}} |f(\tfrac{1}{r}\omega)||f(r\omega)| d\sigma(\omega)\\ &\leq \sup_{|\omega|=1} |f(\tfrac{1}{r}\omega)| \int_{\mathbf{S}^{N-1}} |f(r\omega)| d\sigma(\omega) \leq \epsilon \int_{\mathbf{S}^{N-1}} |f(r\omega)| d\sigma(\omega)\end{aligned}$$

4) b) D'après (2), il existe une constante $C > 0$ et $R' > 0$ telle que

$$\int_{\mathbf{S}^{N-1}} |f(r\omega)| d\sigma(\omega) \leq C \text{ pour tout } r > R'\,.$$

Donc, d'après le 4) a)

$$\int_{\mathbf{S}^{N-1}} f(\omega)^2 d\sigma(\omega) \leq C\epsilon \text{ pour tout } r > \max R_\epsilon, R'\,.$$

Comme le membre de gauche de cette inégalité est indépendant de r et que $\epsilon > 0$ peut être choisi arbitrairement petit, on en déduit que

$$\int_{\mathbf{S}^{N-1}} f(\omega)^2 d\sigma(\omega) = 0\,.$$

Comme f est continue sur $\mathbf{R}^N$, l'égalité ci-dessus entraîne que f est identiquement nulle sur la sphère unité de $\mathbf{R}^N$.
4) c) Soit $r > 0$ quelconque; écrivons l'identité (1) pour la fonction f qui est harmonique sur $\mathbf{R}^N$, en choisissant $r_1 = 1$ et $r_2 = r^2$ si $r > 1$, ou bien $r_1 = r^2$ et $r_2 = 1$ si $r < 1$, ainsi que $x_0 = 0$. Dans tous les cas, $r_0 = \sqrt{r_1 r_2} = r$, de sorte que

$$\int_{\mathbf{S}^{N-1}} f(r\omega)^2 d\sigma(\omega) = \int_{\mathbf{S}^{N-1}} f(\omega) f(r^2\omega) d\sigma(\omega) = 0$$

puisque f est identiquement nulle sur la sphère unité de $\mathbf{R}^N$. Cette égalité entraîne, par le même raisonnement qu'au 4) b), que f est identiquement nulle sur la sphère de centre 0 et de rayon r. Cela vaut pour tout $r > 0$, donc f est identiquement nulle sur $\mathbf{R}^N \setminus \{0\}$. Enfin, par hypothèse $f(0) = 0$ de sorte que $f = 0$ identiquement sur $\mathbf{R}^N$.
4) d) Soit f fonction harmonique sur $\mathbf{R}^N$ vérifiant (2). Considérons la fonction g définie sur $\mathbf{R}^N$ par la formule $g(x) = f(x) - f(0)$. La fonction g est évidemment harmonique sur $\mathbf{R}^N$. D'autre part

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{S}^{N-1}} |g(r\omega)| d\sigma(\omega) &= \int_{\mathbf{S}^{N-1}} |f(r\omega) - f(0)| d\sigma(\omega) \leq \int_{\mathbf{S}^{N-1}} (|f(r\omega)| + |f(0)|) d\sigma(\omega)\\ &= \int_{\mathbf{S}^{N-1}} |f(r\omega)| d\sigma(\omega) + |\mathbf{S}^{N-1}||f(0)|) = O(1)\end{aligned}$$

lorsque $r \to +\infty$ comme somme d'un terme $O(1)$ et d'une constante. D'après le 4) c), la fonction g qui est harmonique sur $\mathbf{R}^N$, nulle en 0 et vérifie (2) est identiquement nulle sur $\mathbf{R}^N$. Donc la fonction f est identiquement égale à la constante $f(0)$ sur $\mathbf{R}^N$.

5) Vérifions que pour tout $z \in \mathbf{R}$, on a $z^+ = \frac{1}{2}(z + |z|)$.

En effet, si $z \geq 0$, on a $|z| = z$ donc$\frac{1}{2}(z + |z|) = \frac{1}{2}(z + z) = z = z^+$. Si $z < 0$, on a $|z| = -z$, de sorte que $\frac{1}{2}(z + |z|) = \frac{1}{2}(z - z) = 0 = z^+$.

Soit f harmonique dans $\mathbf{R}^N$ telle que

$$\int_{\mathbf{S}^{N-1}} f(r\omega)^+ d\sigma(\omega) = O(1) \text{ lorsque } r \to +\infty \, .$$

D'abord

$$\int_{\mathbf{S}^{N-1}} |f(r\omega)| d\sigma(\omega) = 2 \int_{\mathbf{S}^{N-1}} f(r\omega)^+ d\sigma(\omega) - \int_{\mathbf{S}^{N-1}} f(r\omega) d\sigma(\omega) \, .$$

Puis, comme f est harmonique, elle vérifie la propriété de la moyenne, de sorte que

$$\int_{\mathbf{S}^{N-1}} f(r\omega) d\sigma(\omega) = |\mathbf{S}^{N-1}| f(0) \, .$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{S}^{N-1}} |f(r\omega)| d\sigma(\omega) &= 2 \int_{\mathbf{S}^{N-1}} f(r\omega)^+ d\sigma(\omega) - |\mathbf{S}^{N-1}| f(0) \\ &= O(1) - |\mathbf{S}^{N-1}| f(0) = O(1) \end{aligned}$$

lorsque $r \to +\infty$. La fonction f, qui est harmonique sur $\mathbf{R}^N$, vérifie donc l'hypothèse (2). D'après le 4) d), elle est donc constante sur $\mathbf{R}^N$.