PROMOTION 2007 — MAT431
Corrigé de l'épreuve du 19 janvier 2009

I

1) Soit $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R})$; comme ϕ est à support compact, il existe $R > 0$ tel que $\mathrm{supp}(\phi) \subset]-R, R[$. Pour tout $n > R$, on a

$$\langle T_n, \phi\rangle = e^n\langle \delta_n, \phi\rangle = e^n\phi(n) = 0$$

ce qui montre que

$$\langle T_n, \phi\rangle \to 0 \text{ lorsque } n \to +\infty\,.$$

Ceci montre que $T_n \to 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ lorsque $n \to +\infty$.

2) Soit χ fonction plateau telle que

$$\chi \in C^\infty(\mathbf{R}) \text{ t.q. } \left\{\begin{array}{l} \mathrm{supp}(\chi) \subset]-1, 1[\,, \\ \chi\big|_{[-1/2,1/2]} = 1\,, \\ 0 \le \chi \le 1\,. \end{array}\right.$$

La fonction $x \mapsto (1 - \chi(x))|x|$ est évidemment de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$, comme produit de la fonction $x \mapsto |x|$ de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^*$ et de la fonction χ qui est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$ et identiquement nulle sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Par conséquent la fonction ψ définie par

$$\psi(x) = \exp(-(1 - \chi(x))|x|)$$

est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$ comme composée de fonctions de classe C^∞. De plus, par construction

$$\psi(x) = e^{-|x|} \text{ pour tout } x \in \mathbf{R} \text{ tel que } |x| > 1\,.$$

Par conséquent

$$\left\{\begin{array}{ll} \psi^{(n)}(x) = (-1)^n e^{-x} & x > 1\,, \\ \psi^{(n)}(x) = e^{x} & x < -1\,, \end{array}\right.$$

de sorte que

$$|\psi^{(n)}(x)| = e^{-|x|} = O(|x|^{-m}) \text{ lorsque } |x| \to +\infty \text{ pour tous } m, n \in \mathbf{N}\,.$$

Ainsi $\psi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$.

3) D'une part, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la distribution T_n est à support compact $\{n\}$, et donc $T_n \in \mathcal{S}'(\mathbf{R})$. Supposons que $(T_n)_{n\ge 0}$ est convergente dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$ lorsque $n \to +\infty$, et notons T sa limite.

D'une part, pour tout $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R})$, on a

$$\langle T_n, \phi\rangle \to \langle T, \phi\rangle \text{ lorsque } n \to +\infty$$

puisque $C_c^\infty(\mathbf{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbf{R})$; or d'après le 1) et l'unicité de la limite pour une suite convergente dans $\mathbf{R}$, on a

$$\langle T, \phi\rangle = 0\,, \qquad \text{pour tout } \phi \in C_c^\infty(\mathbf{R})\,.$$

Comme $C_c^\infty(\mathbf{R})$ est dense dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$ et que $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R})$ par hypothèse, on a forcément $T = 0$.

Or, pour la fonction $\psi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ construire à la question 2), on a, pour tout $n \ge 1$

$$\langle T_n, \psi\rangle = e^n\langle \delta_n, \psi\rangle = e^n\psi(n) = e^n e^{-n} = 1\,,$$

de sorte que

$$\langle T_n, \psi\rangle \text{ ne converge pas vers 0 lorsque } n \to +\infty.$$

Donc la suite $(T_n)_{n\geq 0}$ ne ocnverge pas vers 0 lorsque $n \to +\infty$.

4) Une suite de distributions tempérées convergeant dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ vers une distribution tempérée ne converge pas forcément dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$.

Par exemple, la suite de distributions tempérées $(T_n)_{n\geq 0}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ vers la distribution nulle d'après le 1), mais elle ne converge pas dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$ comme le montre le 3).

II

1) La fonction $\mathbf{R} \ni \xi \mapsto e^{i\xi^3/3} \in \mathbf{C}$ est une fonction continue bornée sur $\mathbf{R}$ puisque $|e^{i\xi^3/3}| = 1$ pour tout $\xi \in \mathbf{R}$. Elle définit donc un élément de $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$.

2) a) Pour tout $\eta > 0$, la fonction $\mathbf{R} \ni \xi \mapsto e^{\frac{1}{3}i(\xi+i\eta)^3} \in \mathbf{C}$ est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$ (comme composée de l'exponentielle et d'une fonction polynômiale). Pour tout $\xi \in \mathbf{R}$ et tout $\eta > 0$

$$\frac{d^n}{d\xi^n}\left(e^{\frac{1}{3}i(\xi+i\eta)^3}\right) = P_n(\xi+i\eta)e^{\frac{1}{3}i(\xi+i\eta)^3}$$

où $P_n \in \mathbf{C}[X]$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ est défini par la relation de récurrence

$$\begin{cases} P_{n+1}(X) = P_n'(X) + iX^2P_n(X)\,, \\ P_0(X) = 1\,. \end{cases}$$

En particulier, $P_n(X)$ est un polynôme de degré $2n$, de sorte que

$$\left|\frac{d^n}{d\xi^n}\left(e^{\frac{1}{3}i(\xi+i\eta)^3}\right)\right| = |P_n(\xi+i\eta)|e^{\Re(\frac{1}{3}i(\xi+i\eta)^3)} = |P_n(\xi+i\eta)|e^{-\eta\xi^2+\frac{1}{3}\eta^3}$$

est à décroissance rapide lorsque $\xi \to \pm\infty$ pour tout $\eta > 0$ fixé comme produit d'une fonction polynômiale par la fonction gaussienne $\xi \mapsto e^{-\eta\xi^2}$.

Ainsi la fonction $\mathbf{R} \ni \xi \mapsto e^{\frac{1}{3}i(\xi+i\eta)^3} \in \mathbf{C}$ de classe C^∞ est à décroissance rapide ainsi que toutes ses dérivées: elle appartient donc à $\mathcal{S}(\mathbf{R})$.

2) b) Pour tout $x \in \mathbf{R}$ et tout $\eta > 0$, la fonction $\mathbf{R} \ni \xi \mapsto e^{ix(\xi+i\eta)+\frac{1}{3}i(\xi+i\eta)^3} \in \mathbf{C}$ est continue sur $\mathbf{R}$ et

$$\left|e^{ix(\xi+i\eta)+\frac{1}{3}i(\xi+i\eta)^3}\right| = e^{-\eta x-\eta\xi^2+\frac{1}{3}\eta^2}\,.$$

Cette fonction définit donc un élément de $L^1(\mathbf{R})$, ce qui montre que l'intégrale

$$\tfrac{1}{(2\pi)}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix(\xi+i\eta)+\frac{1}{3}i(\xi+i\eta)^3}d\xi$$

existe pour tout $x \in \mathbf{R}$ et tout $\eta > 0$. De plus

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{(2\pi)}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix(\xi+i\eta)+\frac{1}{3}i(\xi+i\eta)^3}d\xi &= e^{-\eta x}\tfrac{1}{(2\pi)}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi+\frac{1}{3}i(\xi+i\eta)^3}d\xi \\ &= e^{-\eta x}\mathcal{F}^{-1}\left(\xi \mapsto e^{ix\xi+\frac{1}{3}i(\xi+i\eta)^3}\right)(x)\,.\end{aligned}$$

Donc l'intégrale en question est le produit de la fonction $x \mapsto e^{-\eta x}$ par

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\xi \mapsto e^{ix\xi+\frac{1}{3}i(\xi+i\eta)^3}\right) \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$$

comme transformée de Fourier inverse de

$$\xi \mapsto e^{ix\xi+\frac{1}{3}i(\xi+i\eta)^3} \in \mathcal{S}(\mathbf{R})\,.$$

C'est donc une fonction de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$ comme produit de fonctions de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$.

2) c) Soit $\phi \in \mathcal{S}'(\mathbf{R})$. Alors

$$e^{\frac{1}{3}i(\xi+i/n)^3}\phi(\xi) \to e^{\frac{1}{3}i\xi^3}\phi(\xi) \text{ pour tout } \xi \in \mathbf{R} \text{ lorsque } n \to +\infty$$

et

$$\left| e^{\frac{1}{3}i(\xi+i/n)^3}\phi(\xi) \to e^{\frac{1}{3}i\xi^3}\phi(\xi) \right| = e^{-\frac{1}{n}\xi^2+\frac{1}{3n^3}}|\phi(\xi)| \le e^{1/3}|\phi(\xi)|\,.$$

Comme la fonction ϕ est à décroissance rapide, elle est en particulier intégrable sur $\mathbf{R}$, de sorte que, par convergence dominée

$$\int_{\mathbf{R}} e^{\frac{1}{3}i(\xi+i/n)^3}\phi(\xi)d\xi \to \int_{\mathbf{R}} e^{\frac{1}{3}i\xi^3}\phi(\xi)d\xi$$

lorsque $n \to +\infty$. Ceci signifie que

$$e^{\frac{1}{3}i(\xi+i/n)^3} \to e^{\frac{1}{3}i\xi^3}$$

dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$ lorsque $n \to +\infty$.

3) a) Pour tous $x, \xi, \eta \in \mathbf{R}$, on a

$$\partial_\xi e^{ix(\xi+i\eta)+\frac{1}{3}i(\xi+i\eta)^3} = ix + i(\xi+i\eta)^2\,,$$
$$\partial_\eta e^{ix(\xi+i\eta)+\frac{1}{3}i(\xi+i\eta)^3} = -x - (\xi+i\eta)^2\,,$$

de sorte que

$$(\partial_\xi + i\partial_\eta)e^{ix(\xi+i\eta)+\frac{1}{3}i(\xi+i\eta)^3} = 0\,.$$

3) b) D'après la formule des sauts en dimension un,

$$\partial_\xi \mathbf{1}_{[-R,R]}(\xi) = \delta_{\xi=R} - \delta_{\xi=-R}$$
$$\partial_\eta \mathbf{1}_{[a,b]}(\eta) = \delta_{\eta=b} - \delta_{\eta=a}$$

dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$, de sorte que

$$\partial_\xi\left(\mathbf{1}_{[-R,R]}(\xi)\mathbf{1}_{[a,b]}(\eta)\right) = \delta_{\xi=R}\otimes\mathbf{1}_{[a,b]}(\eta) - \delta_{\xi=-R}\otimes\mathbf{1}_{[a,b]}(\eta)$$
$$\partial_\eta\left(\mathbf{1}_{[-R,R]}(\xi)\mathbf{1}_{[a,b]}(\eta)\right) = \mathbf{1}_{[-R,R]}(\xi)\otimes\delta_{\eta=b} - \mathbf{1}_{[-R,R]}(\xi)\otimes\delta_{\eta=a}$$

dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}_+^*\times\mathbf{R})$.

3) c) D'après les questions 3) a-b),

$$\begin{aligned}
\int_{-R}^{R} e^{ix(\xi+ib)+\frac{1}{3}i(\xi+ia)^3}d\xi - \int_{-R}^{R} e^{ix(\xi+ia)+\frac{1}{3}i(\xi+ia)^3}d\xi \\
&= \left\langle \partial_\eta\left(\mathbf{1}_{[-R,R]}(\xi)\mathbf{1}_{[a,b]}(\eta)\right), e^{ix(\xi+ia)+\frac{1}{3}i(\xi+i\eta)^3}\right\rangle \\
&= -\left\langle \mathbf{1}_{[-R,R]}(\xi)\mathbf{1}_{[a,b]}(\eta), \partial_\eta\left(e^{ix(\xi+ia)+\frac{1}{3}i(\xi+i\eta)^3}\right)\right\rangle \\
&= -\left\langle \mathbf{1}_{[-R,R]}(\xi)\mathbf{1}_{[a,b]}(\eta), i\partial_\xi\left(e^{ix(\xi+ia)+\frac{1}{3}i(\xi+i\eta)^3}\right)\right\rangle \\
&= \left\langle i\partial_\xi\left(\mathbf{1}_{[-R,R]}(\xi)\mathbf{1}_{[a,b]}(\eta)\right), e^{ix(\xi+ia)+\frac{1}{3}i(\xi+i\eta)^3}\right\rangle
\end{aligned}$$

de sorte que

$$\int_{-R}^{R} e^{ix(\xi+ib)+\frac{1}{3}i(\xi+ib)^3} d\xi - \int_{-R}^{R} e^{ix(\xi+ia)+\frac{1}{3}i(\xi+ia)^3} d\xi$$
$$= i\int_{a}^{b} e^{ix(R+i\eta)+\frac{1}{3}i(R+i\eta)^3} d\eta - i\int_{a}^{b} e^{ix(-R+i\eta)+\frac{1}{3}i(-R+i\eta)^3} d\eta$$

3) d) En notant $\zeta = \xi + i\eta$, le résultat de la question 3) a) signifie que

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} e^{i\zeta x+\frac{1}{3}\zeta^3} = 0$$

ce qui est l'équation de Cauchy-Riemann, qui est vérifiée par la fonction $\zeta \mapsto e^{i\zeta x+\frac{1}{3}\zeta^3}$ puisque celle-ci est holomorphe sur $\mathbf{C}$. Le résultat de la question 3) c) signifie que

$$\int_{\gamma} e^{i\zeta x+\frac{1}{3}\zeta^3} d\zeta = 0\,,$$

où γ est le lacet défini par le bord orienté du rectangle $[-R, R] \times [a, b]$ parcouru une seule fois. Comme ce lacet est homotope à un point dans $\mathbf{C}$ et que l'intégrande est holomorphe sur $\mathbf{C}$, l'intégrale est nulle d'après la formule de Cauchy.

4) a) Faisons $R \to +\infty$ dans l'identité ci-dessus. D'une part

$$\int_{-R}^{R} e^{ix(\xi+ib)+\frac{1}{3}i(\xi+ib)^3} d\xi \to \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix(\xi+ib)+\frac{1}{3}i(\xi+ib)^3} d\xi$$
$$\int_{-R}^{R} e^{ix(\xi+ia)+\frac{1}{3}i(\xi+ia)^3} d\xi \to \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix(\xi+ia)+\frac{1}{3}i(\xi+ia)^3} d\xi$$

puisque les intégrandes des deux intégrales ci-dessus appartiennent à $L^1(\mathbf{R})$ — voir correction de la question 2) b).

D'autre part

$$\left| e^{ix(\pm R+i\eta)+\frac{1}{3}i(\pm R+i\eta)^3} \right| = e^{-x\eta-\eta R^2+\frac{1}{3}\eta^3}$$

de sorte que

$$\left| \int_{a}^{b} e^{ix(\pm R+i\eta)+\frac{1}{3}i(\pm R+i\eta)^3} d\eta \right| \le \int_{a}^{b} \left| e^{ix(\pm R+i\eta)+\frac{1}{3}i(\pm R+i\eta)^3} \right| d\eta \le e^{-aR^2} \int_{a}^{b} e^{-x\eta+\frac{1}{3}\eta^3} d\eta$$

ce qui montre que

$$\int_{a}^{b} e^{ix(\pm R+i\eta)+\frac{1}{3}i(\pm R+i\eta)^3} d\eta \to 0$$

lorsque $R \to +\infty$.

Donc, pour tout $x \in \mathbf{R}$ et tous a, b réels tels que $0 < a < b$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix(\xi+ib)+\frac{1}{3}i(\xi+ib)^3} d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix(\xi+ia)+\frac{1}{3}i(\xi+ia)^3} d\xi\,.$$

4) b) D'après le 2) c) $e^{\frac{1}{3}i(\xi+i/n)^3} \to e^{\frac{1}{3}i\xi^3}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$ lorsque $n \to +\infty$. Par continuité de la transformation de Fourier inverse dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$, on a donc

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\xi \mapsto e^{\frac{1}{3}i(\xi+i/n)^3}\right) \to \mathcal{F}^{-1}\left(\xi \mapsto e^{\frac{1}{3}i\xi^3}\right) = Ai$$

dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$ lorsque $n \to +\infty$.

Comme $e^{-x/n} \to 1$ et $(e^{-x/n})^{(k)} \to 0$ uniformément sur tout compact de $\mathbf{R}$ pour tout $k \geq 1$ lorsque $n \to +\infty$,

$$e^{-x/n}\mathcal{F}^{-1}\left(\xi \mapsto e^{\frac{1}{3}i(\xi+i/n)^3}\right) \to Ai$$

dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$.

D'après le 2) a), pour tout $\eta > 0$, la fonction $\xi \mapsto e^{\frac{1}{3}i(\xi+i\eta)^3}$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbf{R})$, de sorte que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\xi \mapsto e^{\frac{1}{3}i(\xi+i\eta)^3}\right)(x) = \tfrac{1}{(2\pi)}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi+\frac{1}{3}i(\xi+i\eta)^3}d\xi\,.$$

Par conséquent, la famille indexée par $\eta > 0$ de fonctions de la variable x de classe $C^\infty(\mathbf{R})$

$$\tfrac{1}{(2\pi)}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix(\xi+i\eta)+\frac{1}{3}i(\xi+i\eta)^3}d\xi = e^{-x\eta}\mathcal{F}^{-1}\left(\xi \mapsto e^{\frac{1}{3}i(\xi+i\eta)^3}\right)(x)$$

converge vers Ai dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ lorsque $\eta = 1/n$ avec $n \to +\infty$. Comme, d'après le 4) a) cette famille est constante en $\eta > 0$, on conclut que Ai est la fonction de classe C^∞ définie par la formule

$$Ai(x) = \tfrac{1}{(2\pi)}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix(\xi+i\eta)+\frac{1}{3}i(\xi+i\eta)^3}d\xi$$

pour tout $x \in \mathbf{R}$ et tout $\eta > 0$.

5) D'après le 4) a) et le 2) a),

$$\begin{aligned} Ai(x) &= \tfrac{1}{(2\pi)}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix(\xi+i\eta)+\frac{1}{3}i(\xi+i\eta)^3}d\xi \\ &= e^{-x\eta}\mathcal{F}^{-1}\left(\xi \mapsto e^{\frac{1}{3}i(\xi+i\eta)^3}\right)(x)\,. \end{aligned}$$

Comme, pour tout $\eta > 0$, la fonction $\xi \mapsto e^{\frac{1}{3}i(\xi+i\eta)^3}$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbf{R})$, la fonction $x \mapsto \mathcal{F}^{-1}\left(\xi \mapsto e^{\frac{1}{3}i(\xi+i\eta)^3}\right)(x)$ appartient également à $\mathcal{S}(\mathbf{R})$, de sorte qu'en particulier, pour tout $\eta > 0$

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\xi \mapsto e^{\frac{1}{3}i(\xi+i\eta)^3}\right)(x) \to 0 \text{ lorsque } x \to +\infty\,.$$

La formule ci-dessus montre alors que, pour tout $\eta > 0$,

$$e^{x\eta}Ai(x) \to 0 \text{ lorsque } x \to +\infty\,,$$

ce qui est le résultat demandé.

6) Rappelons que $Ai \in \mathcal{S}'(\mathbf{R})$ et que $\mathcal{F}(Ai)$ est l'élement de $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$ défini par la fonction $\xi \mapsto e^{i\xi^3/3}$. Donc $xAi \in \mathcal{S}'(\mathbf{R})$ comme produit d'une distribution tempérée par un polynôme, et on a

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(Ai'' - xAi) &= (i\xi)^2\mathcal{F}(Ai) + \frac{1}{i}\mathcal{F}(-ixAi) = (i\xi)^2\mathcal{F}(Ai) + \frac{1}{i}\mathcal{F}(Ai)' \\ &= -\xi^2 e^{i\xi^3/3} + \frac{1}{i}\frac{d}{d\xi}\left(e^{i\xi^3/3}\right) = -\xi^2 e^{i\xi^3/3} + \frac{1}{i}e^{i\xi^3/3}i\xi^2 = 0\,. \end{aligned}$$

Comme $\mathcal{F}$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$ sur lui-même, on en déduit que

$$Ai'' - xAi = 0$$

dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$. Or comme la distribution tempérée $Ai''-xAi$ est définie par la fonction $x \mapsto Ai''(x) - xAi(x)$ de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$, il s'ensuit que

$$Ai''(x) - xAi(x) = 0 \text{ pour tout } x \in \mathbf{R}\,.$$

7) a) Pour tout $t \in \mathbf{R}_+^*$, la fonction $\mathbf{R} \ni \xi \mapsto e^{it\xi^3/3} \in \mathbf{C}$ est continue et bornée; elle définit donc une distribution tempérée sur $\mathbf{R}$.

Notons $M_\lambda : x \mapsto \lambda x$ pour tout $\lambda > 0$. Pour tout $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R})$ et $\phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$

$$\begin{aligned}\langle (\mathcal{F}T) \circ M_\lambda, \phi\rangle &= \langle \mathcal{F}T, \tfrac{1}{\lambda}\phi \circ M_{1/\lambda}\rangle = \langle T, \mathcal{F}(\tfrac{1}{\lambda}\phi \circ M_{1/\lambda})\rangle \\ &= \langle T, (\mathcal{F}\phi) \circ M_\lambda\rangle = \langle \tfrac{1}{\lambda} T \circ M_{1/\lambda}, \mathcal{F}\phi\rangle = \langle \mathcal{F}(\tfrac{1}{\lambda} T \circ M_{1/\lambda}), \phi\rangle\end{aligned}$$

c'est à dire que

$$(\mathcal{F}T) \circ M_\lambda = \mathcal{F}(\tfrac{1}{\lambda} T \circ M_{1/\lambda})\,.$$

La troisième égalité ci-dessus résulte du changement de variables $y = x/\lambda$ dans l'intégrale

$$\mathcal{F}(\tfrac{1}{\lambda}\phi \circ M_{1/\lambda})(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x}\tfrac{1}{\lambda}\phi(\tfrac{x}{\lambda})dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda\xi y}\phi(y)dy = (\mathcal{F}T) \circ M_\lambda(\xi)\,.$$

Appliquons cela à la distribution tempérée $T = Ai$ avec $\lambda = t^{1/3}$: on trouve ainsi que

$$\mathcal{F}(x \mapsto \tfrac{1}{t^{1/3}} Ai(\tfrac{x}{t^{1/3}}))(\xi) = \mathcal{F}(Ai)(t^{1/3}\xi) = e^{i\frac{1}{3}t\xi^3}\,.$$

7) b) La fonction $\mathbf{R}^2 \ni (t,x) \mapsto \mathbf{1}_{]0,+\infty[}(t)e^{i\frac{1}{3}t\xi^3}$ est continue sur $\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$ et bornée sur $\mathbf{R}^2$: elle définit donc un élément de $L^\infty(\mathbf{R}^2)$ et par conséquent une distribution tempérée sur $\mathbf{R}^2$ car $L^\infty(\mathbf{R}^2) \subset \mathcal{S}'(\mathbf{R}^2)$. D'après la question précédente,

$$E = \mathcal{F}_x^{-1}((t,\xi) \mapsto \mathbf{1}_{]0,+\infty[}(t)e^{i\frac{1}{3}t\xi^3})$$

où $\mathcal{F}_x$ est la transformation de Fourier partielle en x, de sorte que $E \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^2)$.

7) c) Observons que, grâce à la formule de Leibnitz au sens des distributions,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_x((\partial_t + \tfrac{1}{3}\partial_x^3)E) &= (\partial_t - i\tfrac{1}{3}\xi^3)\mathcal{F}_x E = (\partial_t - i\tfrac{1}{3}\xi^3)\left(\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(t)e^{i\frac{1}{3}t\xi^3}\right) \\ &= e^{i\frac{1}{3}t\xi^3}\delta_{t=0} \otimes 1 + \mathbf{1}_{]0,+\infty[}(t)(\partial_t - i\tfrac{1}{3}\xi^3)\left(e^{i\frac{1}{3}t\xi^3}\right) = \delta_{t=0} \otimes 1\end{aligned}$$

dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$. Comme il s'agit d'une égalité dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$ entre deux éléments de $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^2)$, cette égalité a lieu en fait au sens des distributions tempérées sur $\mathbf{R}^2$, par densité de $C_c^\infty(\mathbf{R}^2)$ dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}^2)$. Appliquant $\mathcal{F}_x^{-1}$ à chaque membre de cette égalité, on trouve que

$$(\partial_t + \tfrac{1}{3}\partial_x^3)E = \delta_{t=0} \otimes \mathcal{F}_x^{-1}1 = \delta_{t=0} \otimes \delta_{x=0} = \delta_{(0,0)}\,.$$

Autrement dit E est une solution élémentaire de l'opérateur différentiel $\partial_t + \frac{1}{3}\partial_x^3$. D'autre part, par construction $E\big|_{\mathbf{R}_-^* \times \mathbf{R}} = 0$, de sorte que

$$\mathrm{supp}(E) \subset \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}\,.$$

7) d) D'après le 6) c), E est une solution élémentaire de l'opérateur différentiel $\partial_t + \frac{1}{3}\partial_x^3$ à support dans $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$.

Montrons que c'est la seule. S'il en existait une autre, disons E', la différence $F = E - E'$ vérifierait les conditions suivantes

$$(\partial_t + \tfrac{1}{3}\partial_x^3)F = 0 \text{ et } \operatorname{supp}(F) \subset \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}\,.$$

Il suffit donc de montrer que le seul élément F de $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^2)$ vérifiant ces deux conditions est $F = 0$.

En effet, appliquons la transformation de Fourier partielle en x à chaque membre de l'égalité ci-dessus: on trouve que

$$\mathcal{F}_x((\partial_t + \tfrac{1}{3}\partial_x^3)F) = (\partial_t - i\tfrac{1}{3}\xi^3)\mathcal{F}_x F = 0 \quad \text{dans } \mathcal{S}'(\mathbf{R}^2)\,.$$

Multiplions chaque membre de cette égalité par la fonction $(t,\xi) \mapsto e^{-i\frac{1}{3}t\xi^3}$ de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^2$ et à croissance polynômiale ainsi que toutes ses dérivées:

$$e^{-i\frac{1}{3}t\xi^3}(\partial_t - i\tfrac{1}{3}\xi^3)\mathcal{F}_x F = \partial_t\left(e^{-i\frac{1}{3}t\xi^3}\mathcal{F}_x F\right) = 0$$

dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^2)$. Donc la distribution tempérée $e^{-i\frac{1}{3}t\xi^3}\mathcal{F}_x F$ est constante par rapport à la variable t; comme de plus cette distribution est nulle pour $t < 0$, c'est à dire que sa restriction à $\mathbf{R}_-^* \times \mathbf{R}$ est nulle puisque, par hypothèse F est à support dans $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$, il s'ensuit que

$$e^{-i\frac{1}{3}t\xi^3}\mathcal{F}_x F = 0 \quad \text{dans } \mathcal{S}'(\mathbf{R}^2)\,.$$

Comme la fonction $(t,\xi) \mapsto e^{i\frac{1}{3}t\xi^3}$ de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^2$ à croissance polynômiale ainsi que toutes ses dérivées,

$$e^{i\frac{1}{3}t\xi^3}e^{-i\frac{1}{3}t\xi^3}\mathcal{F}_x F = \mathcal{F}_x F = 0 \quad \text{dans } \mathcal{S}'(\mathbf{R}^2)\,.$$

Puis, comme la transformation de Fourier partielle $\mathcal{F}_x$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^2)$ dans lui-même, la deuxième égalité ci-dessus implique que $F = 0$.

8) Dire que $u \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^2)$ est solution du problème de Cauchy considéré au sens des distributions, c'est dire que

$$\begin{cases} (\partial_t + \frac{1}{3}\partial_x^3)u = \delta_{t=0} \otimes u^{in} \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)\,, \\ \operatorname{supp}(u) \subset \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}\,. \end{cases}$$

Qu'il existe au plus une telle solution est évident: s'il en existait deux, disons u_1 et u_2, la différence $F = u_1 - u_2$ serait nulle d'après l'argument de la question précédente.

Considérons la distribution $E \star (\delta_{t=0} \otimes u^{in})$. D'une part, comme u^{in} est à support compact

$$\begin{aligned} \operatorname{supp}(E \star (\delta_{t=0} \otimes u^{in})) &\subset \operatorname{supp}(E) + \operatorname{supp}(\delta_{t=0} \otimes u^{in}) \\ &\subset \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} + \{0\} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}\,. \end{aligned}$$

De plus $E \star (\delta_{t=0} \otimes u^{in})$ est tempérée comme produit de convolution de la distribution tempérée E par la distribution à support compact $\delta_{t=0} \otimes u^{in}$.

Enfin

$$\begin{aligned} (\partial_t + \tfrac{1}{3}\partial_x^3)(E \star (\delta_{t=0} \otimes u^{in})) &= ((\partial_t + \tfrac{1}{3}\partial_x^3)E) \star (\delta_{t=0} \otimes u^{in}) \\ &= \delta_{(0,0)} \star (\delta_{t=0} \otimes u^{in}) = \delta_{t=0} \otimes u^{in} \end{aligned}$$

Par conséquent, $u = E \star (\delta_{t=0} \otimes u^{in})$ est l'unique solution du problème de Cauchy considéré dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^2)$.

Enfin, comme $E\big|_{\mathbf{R}_+^*\times\mathbf{R}}$ est définie par la fonction

$$\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R} \ni (t,x) \mapsto \frac{1}{t^{1/3}} Ai\left(\frac{x}{t^{1/3}}\right) = t^{-1/3} Ai \circ M_{t^{-1/3}}(x)$$

qui est de classe C^∞, la restriction $u\big|_{\mathbf{R}_+^*\times\mathbf{R}}$ est définie par la fonction

$$(t,x) \mapsto u^{in} \star t^{-1/3} Ai \circ M_{t^{-1/3}}(x)$$

qui est de classe C^∞ en $x \in \mathbf{R}$ à $t > 0$ fixé, comme produit de convolution de la distribution à support compact u^{in} par la fonction $t^{-1/3} Ai \circ M_{t^{-1/3}}$, qui est de classe C^∞ d'après le 3) e).

Vérifions que cette fonction est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$ par rapport aux deux variables t et x.

Soit $R > 0$ assez grand pour que $\mathrm{supp}(u^{in}) \subset]-R, R[$, et soit χ fonction plateau de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$ valant identiquement 1 sur $[-R-1, R+1]$, et à support dans $]-R-2, R+2[$. Alors, pour tout $t > 0$ et tout $x \in \mathbf{R}$

$$\begin{aligned} u^{in} \star t^{-1/3} Ai \circ M_{t^{-1/3}}(x) &= \left\langle u^{in}, t^{-1/3} Ai \circ M_{t^{-1/3}}(x - \cdot) \right\rangle \\ &= \left\langle u^{in}, y \mapsto t^{-1/3} Ai(t^{-1/3}(x-y))\chi(y) \right\rangle \end{aligned}$$

est de classe C^∞ en $(t,x) \in]\epsilon, +\infty[\times]-R', R'[$ d'après le théorème de dérivation sous le crochet de dualité, puisque la fonction

$$(t,x,y) \mapsto t^{-1/3} Ai(t^{-1/3}(x-y))\chi(y)$$

est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ et à support dans $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R} \times [-R-2, R+2]$.