Promotion 2011 —MAT431
Distributions, analyse de Fourier, EDP
Corrigé du contrôle classant du 21 janvier 2013

I

1) D'abord $G \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^2) \subset \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$, de sorte que $\partial_k G \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$ pour $k = 1, 2$. Notons $M_\lambda(x) = \lambda x$ pour tout $x \in \mathbf{R}^2$ et tout $\lambda > 0$. Alors, pour tout $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^2)$ et tout $\lambda > 0$,

$$\langle \partial_k G \circ M_\lambda \phi \rangle = \frac{1}{\lambda^2}\langle \partial_k G, \phi \circ M_{1/\lambda}\rangle = -\frac{1}{\lambda^3}\int_{\mathbf{R}^2} G(x)\partial_k\phi(x/\lambda)dx$$
$$= -\frac{1}{\lambda}\int_{\mathbf{R}^2} G(\lambda y)\partial_k\phi(y)dy = -\frac{1}{\lambda}\int_{\mathbf{R}^2} G(y)\partial_k\phi(y)dy - 2\frac{\ln\lambda}{\lambda}\int_{\mathbf{R}^2}\partial_k\phi(y)dy$$
$$= -\frac{1}{\lambda}\langle G, \partial_k\phi\rangle = \frac{1}{\lambda}\langle \partial_k G, \phi\rangle$$

car

$$\int_{\mathbf{R}^2} \partial_k\phi(y)dy = 0\,.$$

Donc $\partial_k G$ est une distribution homogène de degré -1 sur $\mathbf{R}^2$.
2) Evidemment $P \in C(\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$. D'autre part, $P(x_1, x_2) = O((x_1^2 + x_2^2)^{-1/2})$ lorsque $(x_1, x_2) \to (0, 0)$. La fonction P est donc localement intégrable sur $\mathbf{R}^2$, de sorte qu'elle définit un élément de $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$. Enfin, pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et tout $\lambda > 0$, on a

$$P(\lambda x_1, \lambda x_2) = \tfrac{1}{\pi}\frac{\lambda x_2}{\lambda^2(x_1^2 + x_2^2)} = \frac{1}{\lambda}P(x_1, x_2)\,.$$

Donc P définit une distribution homogène de degré -1.
3) Un calcul immédiat montre que

$$\partial_2 G(x_1, x_2) = \frac{2x_k}{x_1^2 + x_2^2} = 2\pi P(x_1, x_2)$$

pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Donc la distribution $\partial_2 G - 2\pi P$ est à support dans $\{(0, 0)\}$. Il existe donc une suite unique a_α de réels indexés par $\alpha \in \mathbf{N}^2$ telle que $a_\alpha = 0$ sauf pour un nombre fini de multi-indices $\alpha \in \mathbf{N}^2$ et

$$\partial_2 G - 2\pi P = \sum_{\alpha\in\mathbf{N}^2} a_\alpha \partial^\alpha \delta_{(0,0)}\,.$$

Comme $\partial^\alpha\delta_{(0,0)}$ est une distribution homogène de degré $-2 - |\alpha| < -1$ sur $\mathbf{R}^2$ et que $\partial_2 G - P$ est une distribution homogène de degré -1 sur $\mathbf{R}^2$ d'après les questions 1 et 2, on conclut que tous les coefficients a_α sont nuls, et donc que

$$\partial_2 G = 2\pi P \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)\,.$$

4) D'après la question 3, on a

$$\Delta P = \Delta(\tfrac{1}{2\pi}\partial_2 G) = \tfrac{1}{2\pi}\partial_2\Delta G = 2\partial_2\delta_{(0,0)} = 2\delta_0 \otimes \delta_0' \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)\,.$$

5) La fonction u est continue sur $\overline{\Pi_+}$; donc la fonction U est continue localement bornée sur $\mathbf{R}^2 \setminus \Gamma$. Par conséquent U est localement intégrable sur $\mathbf{R}^2$ et définit donc un élément de $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$.

Pour éviter toute confusion, on note dans la suite de cette question T_f la distribution définie sur $\mathbf{R}^2$ par la fonction f localement intégrable sur $\mathbf{R}^2$. On choisit le vecteur normal unitaire à Γ dirigé vers l'intérieur de Π_+, soit $n := (0,1) \in \mathbf{R}^2$.

Puisque $u \in C^2(\overline{\pi_+})$, les fonctions u, $\partial_1 u$ et $\partial_2 u$ sont de classe C^1 sur $\overline{\Pi_+}$. La formule des sauts sur Γ appliquée successivement à U et à $\partial_1 U$ dit que

$$\begin{aligned}\partial_1 T_U &= T_{\partial_1 U} + 2u(x_1,0)n_1\delta_{x_2=0} = T_{\partial_1 U}\\ \partial_1^2 T_U &= T_{\partial_1^2 U} + 2\partial_1 u(x_1,0)n_1\delta_{x_2=0} = T_{\partial_1^2 U}\end{aligned}$$

Calculons maintenant $\partial_2 T_U$ par la formule des sauts

$$\partial_2 T_U = T_{\partial_2 U} + 2u(x_1,0)n_2\delta_{x_2=0} = T_{\partial_2 U} + 2u(x_1,0)\delta_{x_2=0}\,.$$

Observons que la fonction $\partial_2 U$ vérifie

$$\partial_2 U(x_1,x_2) = \begin{cases}\partial_2 u(x_1,x_2) & \text{si } x_2 > 0\,,\\ \partial_2 u(x_1,-x_2) & \text{si } x_2 < 0\,,\end{cases}$$

de sorte que $\partial_2 U$ se prolonge en une fonction continue sur $\mathbf{R}^2$ puisque

$$\lim_{x_2\to 0^+}\partial_2 U(x_1,x_2) = \lim_{x_2\to 0^-}\partial_2 U(x_1,x_2) = \partial_2 u(x_1,0)\,.$$

La formule des sauts entrane donc que

$$\partial_2^2 T_U = \partial_2 T_{\partial_2 U} + 2u(x_1,0)\delta'_{x_2=0} = T_{\partial_2^2 U} + 2u(x_1,0)\delta'_{x_2=0}\,.$$

Par conséquent

$$\Delta T_U = T_{\Delta U} + 2u(x_1,0)\delta'_{x_2=0}\,.$$

6) Soient u et $\bar u \in C^2(\overline{\Pi_+})$ solutions de (L), et soient U et $\bar U$ les fonctions définies à partir de u et $\bar u$ respectivement comme dans la question 5. D'après la question 5

$$\begin{aligned}\Delta T_U &= 2v\otimes\delta_0'\\ \Delta T_{\bar U} &= 2v\otimes\delta_0'\end{aligned}$$

dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$, de sorte que

$$\Delta T_{U-\bar U} = \Delta(T_U - T_{\bar U}) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)\,.$$

Comme u et $\bar u$ tendent vers 0 lorsque $|(x_1,x_2)|\to\infty$ et $x_2 \geq 0$, les fonctions U et $\bar U$ tendent vers 0 lorsque $|(x_1,x_2)|\to\infty$ et $x_2\neq 0$. On déduit de ce qui précède que $T_{U-\bar U}$ est une fonction harmonique tendant vers 0 à l'infini, et donc que $T_{U-\bar U} = 0$.

Autrement dit, $U = \bar U$ sur $\mathbf{R}^2\setminus\Gamma$, ce qui implique que $u = \bar u$ sur Π_+ et donc sur $\overline{\Pi_+}$ puisque u et $\bar u$ sont continues sur $\overline{\Pi_+}$.

7) Soit $u \in C^2(\overline{\Pi_+})$ solution de (L). D'après la question 5, la fonction U associée à u vérifie

$$\Delta T_U = 2v\otimes\delta_0' = (v\otimes\delta_0)\star(2\delta_0\otimes\delta_0') = (v\otimes\delta_0)\star\Delta P = \Delta(P\star(v\otimes\delta_0))\,.$$

Donc la distribution $T_U - P\star(v\otimes\delta_0)$ est harmonique sur $\mathbf{R}^2$: on en déduit que

$$T_U = P\star(v\otimes\delta_0) + h \text{ où } h \text{ est une fonction harmonique sur } \mathbf{R}^2\,.$$

On peut montrer que $h\big|_\Gamma = 0$.

En effet $P\star(v\otimes\delta_0)$ est la fonction de classe C^∞ sur Π_+ donnée par la formule

$$P\star(v\otimes\delta_0)(x_1,x_2) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbf{R}}\frac{x_2 v(x_1-y)dy}{y^2+x_2^2} = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbf{R}}\frac{v(x_1-x_2 z)dz}{z^2+1}\,.$$

Comme $v \in C_c(\mathbf{R})$, on a

$$P \star (v \otimes \delta_0)(x_1, x_2) \to v(x_1) \frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{R}} \frac{v(x_1 - x_2 z)dz}{z^2 + 1} = v(x_1)$$

uniformément en $x_1 \in \mathbf{R}$ lorsque $x_2 \to 0^+$, puisque $v \in C_c(\mathbf{R})$. Donc $P \star (v \otimes \delta_0)\big|_{\Pi_+}$ se prolonge en une fonction continue sur $\overline{\Pi_+}$.

Toutefois, h n'est pas forcément identiquement nulle. Par exemple, la fonction

$$H(x_1, x_2) = e^{x_1} \sin x_2 = \operatorname{Im}(e^{x_1 + ix_2})$$

est harmonique (comme partie imaginaire de la fonction holomorphe $z \mapsto e^z$) et identiquement nulle sur pour $x_2 = 0$.

8) On suppose que $v \in C_c^3(\mathbf{R})$. On a vu dans la question 7 que $W = P \star (v \otimes \delta_0)$ est une fonction harmonique sur $\mathbf{R}^2 \setminus \Gamma$, et que la fonction $w := W\big|_{\Pi_+}$ vérifie $w(x_1, x_2) \to v(x_1)$ uniformément en $x_1 \in \mathbf{R}$ lorsque $x_2 \to 0^+$.

Soit $R > 0$ tel que v soit à support dans $[-R, R]$; alors

$$|w(x_1, x_2)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-R}^{R} \frac{|v(y)| x_2 dy}{(x_1 - y)^2 + x_2^2} \leq \frac{1}{\pi} \frac{|x_2|}{(|x_1| - R)^2 + x_2^2} \int_{-R}^{R} |v(y)| dy$$

pour $|x_1| > R$, et

$$|w(x_1, x_2)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-R}^{R} \frac{|v(y)| x_2 dy}{(x_1 - y)^2 + x_2^2} \leq \frac{1}{\pi} \frac{1}{|x_2|} \int_{-R}^{R} |v(y)| dy$$

pour $|x_1| \leq R$ et $x_2 > 0$, ce qui montre que $w \to 0$ lorsque $|x_1| + x_2 \to +\infty$ avec $x_2 > 0$.

Montrons que $w \in C^2(\overline{\Pi_+})$.

D'abord $w \in C^\infty(\Pi_+)$ puisque w est harmonique dans Π_+.

Puis, en raisonnant comme la question 7, on trouve que, pour tout $m = 0, \ldots, 3$, on a

$$\partial_1^m w(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi} \int_{-R}^{R} \frac{v^{(m)}(y) x_2 dy}{(x_1 - y)^2 + x_2^2}$$

de sorte que $\partial_1^m w \in C(\overline{\Pi_+})$.

Comme w est harmonique dans Π_+, on a $\partial_2^2 w = -\partial_1^2 w$, et donc $\partial_2^2 w$ se prolonge en une fonction continue sur $\overline{\Pi_+}$.

Puis on déduit de la formule

$$\partial_2 w(x_1, x_2) = \partial_2 w(x_1, 1) - \int_{x_2}^{1} \partial_2^2 w(x_1, z) dz$$

que $\partial_2 w$ se prolonge en une fonction continue sur $\overline{\Pi_+}$. On a ainsi montré que

$$\partial_1 w\,,\ \partial_2 w\,,\ \partial_1^2 w \text{ et } \partial_2^2 w \in C(\overline{\Pi_+})\,.$$

En appliquant le même raisonnement à la fonction $\partial_1 w$, qui vérifie

$$\Delta \partial_1 w = 0 \text{ sur } \Pi_+\,, \quad \partial_1 w\big|_\Gamma = v'$$

on trouve que $\partial_1 \partial_2 w \in C(\overline{\Pi_+})$.

Au total, $w \in C^2(\overline{\Pi_+})$ est solution du problème (L) et tend vers 0 à l'infini.

D'après la question 6, le problème (L) admet au plus une solution dans $C^2(\overline{\Pi_+})$ tendant vers 0 à l'infini.

En résumé, l'unique solution du problème (L) dans $C^2(\overline{\Pi_+})$ tendant vers 0 à l'infini est la fonction u donnée par la formule

$$u(x_1, x_2) = (P(\cdot, x_2) \star v)(x_1), \qquad (x_1, x_2) \in \Pi_+ .$$

II

A1) On reconnaît dans l'expression au membre de droite l'expression de

$$\int_{\mathbf{S}^2} \phi(\omega) d\sigma(\omega)$$

en coordonnées sphériques. Donc T est la distribution de simple couche de densité 1 sur la sphère unité de $\mathbf{R}^3$.

A2) Par conséquent T est une distribution sur $\mathbf{R}^3$ de support $\mathbf{S}^2$. En particulier, $T \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^3) \subset \mathcal{S}'(\mathbf{R}^3)$. Comme $T \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^3)$, la transformée de Fourier $\hat{T}$ est la fonction de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^3$ définie par la formule

$$\hat{T}(\xi) = \langle T, e_{-\xi} \rangle \quad \text{où } e_\xi(x) := e^{i\xi \cdot x} .$$

Ainsi, pour $\xi = 0$, on a

$$\hat{T}(0) = \langle T, 1 \rangle = 4\pi \quad \text{(la surface de la sphère unité dans } \mathbf{R}^3.)$$

Supposons $\xi \neq 0$, et choisissons des coordonnées sphériques (α, θ) telles que α désigne la longitude et θ la colatitude, sachant que l'axe polaire est la droite $\mathbf{R}\xi$ et que le point $\xi/|\xi|$ est de colatitude 0. Alors

$$\begin{aligned}
\hat{T}(\xi) &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\pi \exp(-i|\xi| \cos\theta) \sin\theta d\theta \right) d\alpha \\
&= 2\pi \int_0^\pi \exp(-i|\xi| \cos\theta) \sin\theta d\theta = 2\pi \frac{e^{i|\xi|} - e^{-i|\xi|}}{i|\xi|} = 4\pi \frac{\sin|\xi|}{|\xi|} .
\end{aligned}$$

Rappelons que la fonction $z \mapsto \frac{\sin z}{z}$ prolongée par continuité en 0 vérifie $\frac{sinz}{z} = S(z^2)$ avec

$$S(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{(2k+1)!} .$$

Cette série entière est de rayon de convergence $+\infty$; donc S est une fonction analytique sur $\mathbf{C}$ et donc en particulier de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$. Comme $\xi \mapsto |\xi|^2$ est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^3$, la fonction composée

$$\frac{\sin|\xi|}{|\xi|} = S(|\xi|^2)$$

est donc de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^3$.

A3) Comme $T \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^3)$, on a $U = \partial_1 T \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^3) \subset \mathcal{S}'(\mathbf{R}^3)$ et $\hat{U} = i\xi_1 \hat{T}$ est la fonction de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^3$ définie par

$$\hat{U}(\xi) = 4i\pi\xi_1 \frac{\sin|\xi|}{|\xi|} .$$

Cette fonction est bien de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^3$ en vertu de la remarque à la fin de la question A2. Enfin

$$\xi \neq 0 \Rightarrow |\hat{U}(\xi)| = 4\pi \frac{|\xi_1|}{|\xi|} |\sin|\xi|| \leq 4\pi \sin|\xi| \leq 4\pi$$

et

$$\hat{U}(0) = 0$$

de sorte que $\hat{U}$ est une fonction bornée sur $\mathbf{R}^3$.
A4) Comme T est la distribution de simple couche de densité 1 sur $\mathbf{S}^2$, on a $(1 - |x|^2)T = 0$. Appliquons la formule de Leibnitz au produit de la distribution T par la fonction $x \mapsto (1 - |x|^2)$ de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^3$:

$$0 = \partial_1((1 - |x|^2)T) = -2x_1T + (1 - |x|^2)\partial_1 T = -2x_1T + (1 - |x|^2)U\,.$$

Donc

$$(1 - |x|^2)U = 2x_1T \quad \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^3)\,.$$

A5) Non. En effet la distribution U vérifie la propriété (P) d'après la question A3. Mais $(1 - |x|^2)U = 2x_1T \neq 0$ d'après la question A4. En effet

$$\begin{aligned}\langle x_1T, x_1\rangle = \langle T, x_1^2\rangle &= \int_0^{2\pi} \cos^2\alpha \left(\int_0^\pi (1 - \cos^2\theta)\sin\theta d\theta\right) d\alpha \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2\alpha d\alpha \int_{-1}^1 (1 - u^2)du = 2\pi \int_0^1 (1 - u^2)du = \tfrac{4\pi}{3} \neq 0\,.\end{aligned}$$

Donc la propriété (Q) n'est pas vérifiée pour U qui est à support dans $\mathbf{S}^2$ et pour la fonction $\psi : x \mapsto (1 - |x|^2)$ de classe C^∞ qui est identiquement nulle sur $\mathbf{S}^2$.
B1) Pour tout $\epsilon > 0$, on a $\zeta_\epsilon \in L^2(\mathbf{R}^N)$ et

$$\|\zeta_\epsilon\|_{L^2}^2 = \epsilon^{-2N} \int_{\mathbf{R}^N} \zeta(x/\epsilon)^2 dx = \epsilon^{-N} \int_{\mathbf{R}^N} \zeta(y)^2 dy = \epsilon^{-N}\|\zeta\|_{L^2}^2\,.$$

Donc $\zeta_\epsilon \in L^2(\mathbf{R}^N)$, et, d'après le théorème de Plancherel, $\mathcal{F}\zeta_\epsilon \in L^2(\mathbf{R}^N)$ avec

$$\|\zeta_\epsilon\|_{L^2}^2 = \frac{1}{(2\pi)^N}\|\mathcal{F}\zeta_\epsilon\|_{L^2}^2\,.$$

En particulier $\zeta_\epsilon \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$ et $\mathcal{F}(\zeta_\epsilon \star V) = \mathcal{F}(\zeta_\epsilon)\hat{V}$.

Comme $\hat{V}$ est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^N$ (puisque $V \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^N)$ et bornée (puisque V vérifie la propriété (P), $\hat{V}\mathcal{F}(\zeta_\epsilon) \in L^2(\mathbf{R}^N)$ comme produit d'une fonction continue bornée sur $\mathbf{R}^N$ par $\mathcal{F}\zeta_\epsilon \in L^2(\mathbf{R}^N)$, et on a

$$\|\hat{V}\mathcal{F}(\zeta_\epsilon)\|_{L^2}^2 \leq \|\hat{V}\|_{L^\infty}^2\|\mathcal{F}\zeta_\epsilon\|_{L^2}^2 = \|\hat{V}\|_{L^\infty}^2(2\pi)^N\|\zeta_\epsilon\|_{L^2}^2 = (2\pi)^N\epsilon^{-N}\|\hat{V}\|_{L^\infty}^2\|\zeta\|_{L^2}^2\,.$$

Comme, d'après le théorème de Plancherel, $\mathcal{F}$ est un isomorphisme de $L^2(\mathbf{R}^N)$ sur lui-même, on conclut que $\zeta_\epsilon \star V \in L^2(\mathbf{R}^N)$ et que

$$\|\zeta_\epsilon \star V\|_{L^2}^2 = (2\pi)^{-N}\|\hat{V}\mathcal{F}(\zeta_\epsilon)\|_{L^2}^2 \leq \epsilon^{-N}\|\hat{V}\|_{L^\infty}^2\|\zeta\|_{L^2}^2\,.$$

B2) Comme $\mathrm{supp}(V) \subset K$ et $\mathrm{supp}(\zeta_\epsilon) \subset B(0, \epsilon)$, on a

$$\mathrm{supp}(\zeta_\epsilon \star V) \subset K + \overline{B(0, \epsilon)} = K_\epsilon\,.$$

Comme $\zeta_\epsilon \star V \in L^2(\mathbf{R}^N)$ d'après la question B1, pour tout $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$, on a

$$\begin{aligned}|\langle\zeta_\epsilon \star V, \phi\rangle| &= \left|\int_{K_\epsilon} \zeta_\epsilon \star V(x)\phi(x)dx\right| \leq \|\zeta_\epsilon \star V\|_{L^2(\mathbf{R}^N)}\|\phi\|_{L^2(K_\epsilon)}\,, \\ &\leq \|\hat{V}\|_{L^\infty}\|\zeta\|_{L^2}\frac{1}{\epsilon^{N/2}}\left(\int_{K_\epsilon} |\phi(x)|^2 dx\right)^{1/2}\,.\end{aligned}$$

grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Par construction, ζ_ϵ est une suite régularisante sur $\mathbf{R}^N$, de sorte que

$$\zeta_\epsilon \star V \to V \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N) \text{ lorsque } \epsilon \to 0^+ .$$

En particulier

$$\langle \zeta_\epsilon \star V, \phi\rangle \to \langle V, \phi\rangle \qquad \text{lorsque } \epsilon \to 0 .$$

En passant à la limite inférieure dans chacun des deux membres de l'inégalité ci-dessus lorsque $\epsilon \to 0$, on trouve que

$$|\langle V, \phi\rangle| \leq \|\hat{V}\|_{L^\infty} \|\zeta\|_{L^2} \liminf_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{\epsilon^{N/2}} \left(\int_{K_\epsilon} |\phi(x)|^2 dx\right)^{1/2} .$$

B3) D'abord

$$\mathscr{L}^N(K_\epsilon) = \int_{\mathbf{R}^N} \mathbf{1}_{K_\epsilon}(x) dx \to \int_{\mathbf{R}^N} \mathbf{1}_K(x) dx = \mathscr{L}^N(K)$$

lorsque $\epsilon \to 0^+$, par convergence dominée. En effet $\mathbf{1}_{K_\epsilon}(x) \to \mathbf{1}_K(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}^N$ lorsque $\epsilon \to 0$. D'autre part, K étant compact dans $\mathbf{R}^N$, il existe $R > 0$ tel que $K \subset B(0, R)$. Alors, pour $\epsilon \in (0, 1)$, on a $0 \leq \mathbf{1}_{K_\epsilon} \leq \mathbf{1}_{B(0,R+1)}$ et $\mathbf{1}_{B(0,R+1)} \in L^1(\mathbf{R}^N)$. Comme $K \subset K_\epsilon$, on a $\mathscr{L}^N(K_\epsilon \setminus K) = \mathscr{L}^N(K_\epsilon) - \mathscr{L}^N(K) \to 0$ avec ϵ.
B4) Soit $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$, identiquement nulle sur K. Notons

$$M := \sup_{x\in \operatorname{supp}(\phi)} |\nabla\phi(x)| .$$

Pour tout $x \in K_\epsilon$, il existe $y \in K$ tel que $|x - y| \leq 2\epsilon$. D'après le théorème des accroissements finis, on a

$$|\phi(x)| = |\phi(x) - \phi(y)| \leq M|x - y| \leq 2M\epsilon .$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\int_{K_\epsilon} |\phi(x)|^2 dx &= \int_{K_\epsilon\setminus K} |\phi(x)|^2 dx \\ &\leq 4M^2\epsilon^2 \mathscr{L}^N(K_\epsilon \setminus K) = o(\epsilon^2) \qquad \text{lorsque } \epsilon \to 0^+ .\end{aligned}$$

B5) Soit $\psi \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$ identiquement nulle sur $K = \operatorname{supp}(V)$. D'après la question B2, pour $\epsilon \in (0, 1)$, l'on a

$$\begin{aligned}|\langle \psi V, \phi\rangle| = |\langle V, \psi\phi\rangle| =&\leq \|\hat{V}\|_{L^\infty} \|\zeta\|_{L^2} \liminf_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{\epsilon^{N/2}} \left(\int_{K_\epsilon} |\psi\phi(x)|^2 dx\right)^{1/2} \\ &\leq \|\hat{V}\|_{L^\infty} \|\zeta\|_{L^2} \liminf_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{\epsilon} \left(\int_{K_\epsilon} |\psi\phi(x)|^2 dx\right)^{1/2} .\end{aligned}$$

Observons que $\psi\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ et que $\psi\phi$ est identiquement nulle sur K, de sorte que, s'après la question B4,

$$\frac{1}{\epsilon} \left(\int_{K_\epsilon} |\psi\phi(x)|^2 dx\right)^{1/2} = \frac{1}{\epsilon} \cdot o(\epsilon^2)^{1/2} \to 0 \qquad \text{lorsque } \epsilon \to 0 .$$

Par conséquent $\langle \psi V, \phi\rangle = 0$ pour tout $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$, ce qui signifie que ψV est la distribution nulle.
B6) La distribution W est à support dans le cercle unité centré en l'origine qui est compact, et elle vérifie la propriété (P). D'après la question B5, elle vérifie donc

la propriété (Q). Comme la fonction $x \mapsto (1 - |x|^2)$ s'annule identiquement sur le cercle unité de $\mathbf{R}^2$ centré en l'origine, on a

$$(1 - |x|^2)W = 0\,.$$

Donc

$$\mathcal{F}((1 - |x|^2)W) = \hat{W} + \Delta\hat{W} = 0\,.$$