MAT431 — PROMOTION 2006

A remettre en petite classe le mardi 8 janvier 2008

I

Exercice 5, p. 140.

a) Soit $u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ telle que $u' \in C(\mathbf{R})$. Montrer que $u \in C^1(\mathbf{R})$.

b) Soit $u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$ telle que $\partial_j u \in C(\mathbf{R}^N)$ pour tout $j = 1, \ldots, N$. Soit $(\zeta_\epsilon)_{0<\epsilon<1}$ suite régularisante, et $f_\epsilon = u \star \zeta_\epsilon$. Soit enfin $g_\epsilon = f_\epsilon - f_\epsilon(0)$. Montrer que

(i) $\partial_j f_\epsilon \to \partial_j u$ uniformément sur tout compact lorsque $\epsilon \to 0^+$ pour tout $j = 1, \ldots, N$;

(ii) g_ϵ converge uniformément sur tout compact lorsque $\epsilon \to 0^+$.

c) Montrer que $f_\epsilon(0)$ admet une limite pour $\epsilon \to 0^+$.

d) Déduire de ce qui précède que $u \in C^1(\mathbf{R}^N)$.

II

Exercice 6, p. 140.

Soit U une application linéaire de $C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ dans lui-même vérifiant les propriétés suivantes

$$U(\phi \circ \tau_a) = (U\phi) \circ \tau_a \quad \text{pour tout } a \in \mathbf{R}^N \text{ et tout } \phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N),$$

en notant $\tau_a : x \mapsto x + a$ la translation de vecteur a, ainsi que

pour tout $K \subset \mathbf{R}^N$ compact et tout $p \in \mathbf{N}$,

il existe $L \subset \mathbf{R}^N$ compact, $q \in \mathbf{N}$ et $C > 0$ tels que

$$\max_{|\alpha| \leq p} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha (U\phi)(x)| \leq C \max_{|\beta| \leq q} \sup_{x \in L} |\partial^\beta \phi(x)| \,.$$

Montrer qu'il existe une unique distribution $u \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^N)$ telle que U soit de la forme

$$U(\phi) = u \star \phi \,, \quad \text{pour tout } \phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N).$$