ÉCOLE POLYTECHNIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MAT431 — Promotion 2005
Premier contrôle classant
Lundi 13 novembre 2006 — Durée: 3 h.

Documents autorisés: Polycopié, transparents du cours, notes personnelles.

Dans tout ce problème, on notera H la fonction de Heaviside définie par $H(x) = 1$ si $x \geq 0$ et $H(x) = 0$ si $x < 0$. On précisera soigneusement la normalisation choisie pour la transformée de Fourier.

Exercice 1

1) Pour tout $f \in C_c^\infty(\mathbf{R})$, calculer $H \star f$.
2) Soit $T \in \mathcal{E}'(\mathbf{R})$ à support dans le segment $[a, b]$.
a) Montrer qu'il existe une unique distribution $S \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ à support dans la demi-droite $[a, +\infty[$ telle que $S' = T$.
b) A quelle condition sur T existe-t-il $S \in \mathcal{E}'(\mathbf{R})$ telle que $S' = T$?

Exercice 2

On rappelle que, pour $\chi \in C_c^\infty(\mathbf{R}_+^*)$, l'on a

$$\Delta(\chi(\|x\|)) = \chi''(\|x\|) + \tfrac{2}{\|x\|}\chi'(\|x\|) \text{ pour tout } x \in \mathbf{R}^3\,.$$

1) Trouver toutes les solutions $a \in C^2(\mathbf{R}_+^*)$ de l'équation différentielle

$$a''(r) + \tfrac{2}{r}a'(r) = \tfrac{1}{r} \text{ pour tout } r > 0\,. \tag{1}$$

2) Montrer qu'il existe une unique solution $a \in C^2(\mathbf{R}_+^*)$ de l'équation différentielle (1) qui soit homogène de degré 1, et vérifier que la fonction $x \mapsto a(\|x\|)$ définit une distribution sur $\mathbf{R}^3$, notée A.
3) Calculer ΔA au sens des distributions sur $\mathbf{R}^3$.
4) En déduire une solution élémentaire du bi-laplacien Δ^2 dans $\mathbf{R}^3$ (où on note $\Delta^2 T = \Delta(\Delta T)$ pour toute distribution T sur $\mathbf{R}^3$).

Problème

A. Soient $N \geq 0$, $a_0, \ldots, a_N \in \mathbf{R}_+$ et

$$P(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$$

1) En appliquant la formule de Cauchy à une fonction holomorphe et un contour bien choisis, montrer que

$$\int_0^1 P(x)^2 dx \leq \int_{-1}^1 P(x)^2 dx = -i \int_0^\pi P(e^{i\theta})^2 e^{i\theta} d\theta\,.$$

2) En déduire que

$$\sum_{0 \leq m,n \leq N} \frac{a_m a_n}{m+n+1} \leq \pi \sum_{n=0}^{N} a_n^2\,.$$

(On pourra remarquer que la fonction $\theta \mapsto |P(e^{i\theta})|^2$ est paire.)
3) Pour quelles valeurs de $a_0, \ldots, a_N$ cette inégalité devient-elle une égalité?
4) Soient deux suites réelles $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n \geq 0}$ telles que

$$\sum_{n\geq 0} x_n^2 < +\infty \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 0} y_n^2 < +\infty\,.$$

Démontrer l'*inégalité de Hilbert*

$$\left| \sum_{m,n \geq 0} \frac{x_m y_n}{m+n+1} \right| \leq \pi \left(\sum_{n \geq 0} x_n^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n\geq 0} y_n^2 \right)^{1/2}\,.$$

B. On se propose de retrouver l'inégalité de Hilbert par une autre méthode.
1) Montrer que la distribution $\mathrm{vp}\frac{1}{x}$ a pour transformée de Fourier la fonction $x \mapsto C(H(x) - H(-x))$, où C est une constante que l'on déterminera.
2) Soit $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R})$ à valeurs positives et à support dans $\mathbf{R}_+^*$; on notera ψ la fonction $x \mapsto \psi(x) = \phi(-x)$.
   a) Calculer

$$\left\langle \mathrm{vp}\tfrac{1}{x} \star \psi, \phi \right\rangle.$$

   b) En déduire que

$$\iint_{\mathbf{R}_+^2} \frac{\phi(x)\phi(y)}{x+y} dx dy \leq \pi \int_0^\infty \phi(x)^2 dx$$

3) Déduire du B.2.b) l'inégalité du A.2).

FIN