PROMOTION 2009 — MAT431
Contrôle classant: distributions, analyse de Fourier et EDP
17 janvier 2011 — Durée: 3h.

<u>Documents autorisés:</u> polycopié.
<u>Matériel autorisé:</u> traducteurs électroniques, dictionnaires pour les élèves étrangers.

Les différentes parties sont indépendantes. La qualité de la rédaction sera un élément important d'appréciation. Les résultats finaux de tous les calculs demandés devront être encadrés.

I

Une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ est dite paire si $T \circ (-Id_{\mathbf{R}^N}) = T$, et impaire si $T \circ (-Id_{\mathbf{R}^N}) = -T$.

1) Montrer que si $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R})$ est paire, $\mathcal{F}(T)$ est paire et T' impaire, tandis que si T est impaire, T' est paire et $\mathcal{F}(T)$ impaire.
2) Calculer $x \,\mathrm{vp}\, \frac{1}{x}$ puis $x^2(\mathrm{vp}\, \frac{1}{x})'$ dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$.
3) Résoudre l'équation $x^2 T = 1$ d'inconnue T dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$.
4) Montrer que la fonction $x \mapsto |x|$ définit une distribution tempérée sur $\mathbf{R}$, notée $|x|$, et montrer que $\mathcal{F}(|x|) = a(\mathrm{vp}\, \frac{1}{x})' + b\delta_0$ avec $a, b \in \mathbf{C}$. Calculer a.
5) Calculer $(\mathcal{F}(\mathrm{vp}\, \frac{1}{x}))'$, puis $\mathcal{F}(\mathrm{vp}\, \frac{1}{x})$ et $\mathcal{F}((\mathrm{vp}\, \frac{1}{x})')$. En déduire b.
6) Déduire de ce qui précède le calcul de $\mathcal{F}(|x| \sin x)$.

II

Soit f une fonction harmonique sur $\mathbf{R}^N$, avec $N \geq 2$.
1) Calculer pour tout $R > 0$ et tout $k = 1, \ldots, N$ l'expression

$$\int_{|x| \leq R} \partial_{x_k} f(x) dx \,.$$

2) Montrer que, pour tout $R > 0$ et tout $k = 1, \ldots, N$, l'on a

$$\partial_{x_k} f(0) = \frac{a_N}{R^{N+1}} \int_{|y|=R} y_k f(y) dS(y) \,.$$

où dS est l'élément de surface sur la sphère de centre 0 et de rayon R, et où a_N est une constante positive que l'on précisera.
3) En déduire que toute fonction harmonique bornée sur $\mathbf{R}^N$ est constante.

III

1) Soient $f, g \in L^1(\mathbf{R}^N)$ et $\psi \in C_c(\mathbf{R}^N)$. Montrer que

$$\iint_{\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N} f(x) g(y) \psi(x+y) dx dy = \int_{\mathbf{R}^N} (f \star g)(z) \psi(z) dz \,.$$

2) Pour tout $\phi \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$, on note $\Sigma[\phi](x,y) = \phi(x+y)$. Soient deux distributions $S, T \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^N)$; montrer que la forme linéaire

$$C^\infty(\mathbf{R}^N) \ni \phi \mapsto \langle S \otimes T, \Sigma[\phi] \rangle$$

définit un élément de $\mathcal{E}'(\mathbf{R}^N)$ que l'on exprimera en fonction de S et T.

Soient $A, B \subset \mathbf{R}^N$ fermés; notons σ l'application

$$\sigma :\ A \times B \ni (x,y) \mapsto x+y \in \mathbf{R}^N\,.$$

On dit que A et B sont convolutifs si, pour tout compact $K \subset \mathbf{R}^N$, l'image réciproque $\sigma^{-1}(K)$ est un compact de $A \times B$.

3) a) Vérifier que pour tous $a, b \in \mathbf{R}$, les intervalles $[a, +\infty[$ et $[b, +\infty[$ sont convolutifs dans $\mathbf{R}$.

3) b) Donner un exemple de parties de $\mathbf{R}$ non convolutives.

4) a) Soient $A, B \subset \mathbf{R}^N$ fermés. Montrer que si l'un des fermés A ou B est borné, A et B sont convolutifs.

4) b) Montrer que si $A, B \subset \mathbf{R}^N$ sont deux fermés convolutifs, $A + B$ est fermé.

Dans toute la suite, on considère $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$ telles que $A = \mathrm{supp}(S)$ et $B = \mathrm{supp}(T)$ soient convolutifs, et $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$.

5) a) Montrer qu'il existe un compact $K \subset \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$ tel que

$$x \in A + \overline{B(0,1)}\,,\ y \in B + \overline{B(0,1)} \text{ et } \phi(x+y) \neq 0 \Rightarrow (x,y) \in K\,.$$

5) b) Notons $I_K = \{\theta \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N) \,|\, \theta = 1 \text{ sur un voisinage de } K\}$. Montrer que, lorsque θ décrit I_K, les quantités $\langle S \otimes T, \theta\Sigma[\phi] \rangle$ prennent une même valeur, que l'on notera $\langle S \otimes T, \Sigma[\phi] \rangle$.

6) Montrer que, dans le cas particulier où l'une des deux distributions S ou T est à support compact,

$$\langle S \otimes T, \Sigma[\phi] \rangle = \langle S \star T, \phi \rangle\,.$$

7) Montrer que, dans le cas général où S et $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$ sont à supports convolutifs, la forme linéaire $C_c^\infty(\mathbf{R}^N) \ni \phi \mapsto \langle S \otimes T, \Sigma[\phi] \rangle$ définit un élément de $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$, désormais noté $S \star T$. (Considérer la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ définie par $S_n = \chi_n S$, où $\chi_n(x) = \chi(x/n)$, avec $\chi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ quelconque telle que $|x| \leq 1$ entraîne $\chi(x) = 1$.)

8) Montrer que $S \star T = T \star S$ et que $\mathrm{supp}(S \star T) \subset \mathrm{supp}(S) + \mathrm{supp}(T)$.

9) Soit $f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ telle que $\mathrm{supp}(f) \subset]0, +\infty[$. Montrer que la relation de récurrence

$$f_1 = f\,, \quad f_{n+1} = f \star f_n\,, \qquad n \geq 1$$

définit une suite de distributions sur $\mathbf{R}$ dont on calculera la limite dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ quand $n \to +\infty$.

FIN