PROMOTION 2010 — MAT431
Contrôle classant: distributions, analyse de Fourier et EDP
23 janvier 2012 — Durée: 3h.

Documents autorisés: polycopié.
Matériel autorisé: traducteurs électroniques, dictionnaires pour les élèves étrangers.

Les différentes parties sont indépendantes. La qualité de la rédaction sera un élément important d'appréciation. Les résultats finaux de tous les calculs demandés devront être encadrés.

I

1) Les suites de distributions

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\delta_{1/k} \quad \text{ et } T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\delta_{1/k}^{(k)}$$

sont-elles convergentes dans $\mathcal{D}'(]0,+\infty[)$? dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$? Dans l'affirmative et pour chaque suite, préciser le support de la distribution limite.
2) On indexe par $\mathbf{N}^*$ l'ensemble des nombres rationnels de $]0,1[$, en posant

$$\mathbf{Q} \cap]0,1[= \{r_n\,,\ n \geq 1\}\,.$$

La suite de distributions

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\delta_{r_k}$$

est-elle convergente dans $\mathcal{D}'(]0,1[)$? dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$? Dans l'affirmative, préciser le support de la distribution limite.

II

Pour tout $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R})$, on pose

$$\left\langle \operatorname{pf}\frac{1}{|x|}, \phi \right\rangle = \int_1^{+\infty} \frac{\phi(x)+\phi(-x)}{x}dx + \int_0^1 \frac{\phi(x)+\phi(-x)-2\phi(0)}{x}dx\,.$$

On note sign la fonction définie sur $\mathbf{R}^*$ par $\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} +1 \text{ si } x>0\,, \\ -1 \text{ si } x<0\,, \end{cases}$ et $\mathcal{F}$ la transformation de Fourier sur $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$. On dit qu'une distribution T sur $\mathbf{R}$ est paire si $T \circ (-\operatorname{Id}_{\mathbf{R}}) = T$ et impaire si $T \circ (-\operatorname{Id}_{\mathbf{R}}) = -T$.
1) Montrer que, pour une constante C que l'on déterminera, lorsque $\epsilon \to 0^+$,

$$\int_{\mathbf{R}\setminus[-\epsilon,\epsilon]} \frac{\phi(x)}{|x|}dx + C\ln\epsilon \to \left\langle \operatorname{pf}\frac{1}{|x|}, \phi \right\rangle.$$

2) Montrer que $\operatorname{vp}\frac{1}{x}$ et $\operatorname{pf}\frac{1}{|x|}$ sont des distributions tempérées sur $\mathbf{R}$.
3) Calculer $x\operatorname{vp}\frac{1}{x}$ et $x\operatorname{pf}\frac{1}{|x|}$.
4) Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R})$. Montrer que $\mathcal{F}T$ est impaire si T est impaire, et que $\mathcal{F}T$ est paire si T est paire.
5) Montrer que $\mathcal{F}(\operatorname{vp}\frac{1}{x}) = C'\operatorname{sign}(\xi)$, où C' est une constante que l'on calculera. (On pourra calculer la dérivée $(\mathcal{F}(\operatorname{vp}\frac{1}{x}))'$ et étudier la parité de $\mathcal{F}(\operatorname{vp}\frac{1}{x})$.)
6) Montrer que $(\mathcal{F}(\operatorname{pf}\frac{1}{|x|}))' = C''\operatorname{vp}\frac{1}{\xi}$, puis que $\mathcal{F}(\operatorname{pf}\frac{1}{|x|}) = C''\ln|\xi| + C'''$, où C'' et C''' sont deux constantes, et calculer C''.

7) Soit $G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$. Calculer de deux manières $\langle \mathcal{F}(\mathrm{pf}\, \frac{1}{|x|}), G\rangle$ et exprimer la constante C''' en faisant intervenir la fonction

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^x e^{-t} \frac{dt}{t}\,, \qquad x > 0\,.$$

III

Pour tout $f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^3)$ et tout $U = (U_1, U_2, U_3) \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^3)^3$, on note

$$\nabla f = (\partial_1 f, \partial_2 f, \partial_3 f)\,, \quad \operatorname{div} U = \partial_1 U_1 + \partial_2 U_2 + \partial_3 U_3$$

ainsi que

$$\operatorname{rot} U = (\partial_2 U_3 - \partial_3 U_2, \partial_3 U_1 - \partial_1 U_3, \partial_1 U_2 - \partial_2 U_1)$$

et

$$\Delta U = (\Delta U_1, \Delta U_2, \Delta U_3)\,.$$

On pose $\operatorname{supp}(U) = \operatorname{supp}(U_1) \cup \operatorname{supp}(U_2) \cup \operatorname{supp}(U_3)$. Si $\operatorname{supp}(f)$ ou $\operatorname{supp}(U)$ est compact, on note $f \star U = (f \star U_1, f \star U_2, f \star U_3)$. Pour tout $U \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^3)^3$ et tout $W \in C_c^\infty(\mathbf{R}^3)^3$, on note

$$\langle\!\langle U, W \rangle\!\rangle = \langle U_1, W_1\rangle + \langle U_2, W_2\rangle + \langle U_3, W_3\rangle\,.$$

Enfin, E désigne la solution élémentaire de $-\Delta$ dans $\mathbf{R}^3$ tendant vers 0 à l'infini.

1) Calculer $\operatorname{rot}(\nabla f)$, $\operatorname{div}(\nabla f)$, $\operatorname{div}(\operatorname{rot} U)$; montrer que $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} U) = \nabla(\operatorname{div} U) - \Delta U$.

2) Soit $S \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^3)$. Justifier brièvement que $E \star S$ tend vers 0 à l'infini.

3) Soit Ω connexe et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telle que $\nabla T = 0$. Montrer que T est constante. (On pourra calculer ΔT.)

Soit $U \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^3)^3$ tel que $\operatorname{div} U = \operatorname{rot} U = 0$.

4)a) Montrer que $U \in C^\infty(\mathbf{R}^3)^3$. (On pourra calculer $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} U)$.)

4)b) On suppose en outre que $|U(x)| \to 0$ lorsque $|x| \to +\infty$. Montrer que $U = 0$.

Soit $U \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^3)^3$ tel que $\operatorname{rot} U = 0$.

5)a) Montrer qu'il existe une unique distribution $f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^3)$ telle que $U = \nabla f$, vérifiant en outre $f \in C^\infty(\mathbf{R}^3 \setminus \operatorname{supp}(U))$ et $f(x) \to 0$ lorsque $|x| \to +\infty$. (On pourra considérer l'équation de Poisson $\Delta\phi = \operatorname{div} U$.)

5)b) Montrer que f est à support compact.

6) Soit $U \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^3)^3$ tel que $\operatorname{div} U = 0$. Montrer qu'il existe un unique $V \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^3)^3$ tel que $U = \operatorname{rot} V$, $\operatorname{div} V = 0$, $V \in C^\infty(\mathbf{R}^3 \setminus \operatorname{supp}(U))^3$ et $|V(x)| \to 0$ lorsque $|x| \to +\infty$.

7) Soit $U \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^3)^3$. Montrer qu'il existe $f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^3)$ et $V \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^3)^3$ uniques tels que $U = \nabla f + \operatorname{rot} V$, $\operatorname{div} V = 0$, $V \in C^\infty(\mathbf{R}^3 \setminus \operatorname{supp}(U))^3$ et $|f(x)| + |V(x)| \to 0$ lorsque $|x| \to +\infty$.

8) On suppose que $U \in C_c^\infty(\mathbf{R}^3)^3$. Quelle est la régularité des distributions f et V de la question 7)?

Soit $U \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^3)^3$ tel que $\langle\!\langle U, W \rangle\!\rangle = 0$ pour tout $W \in C^\infty(\mathbf{R}^3)^3$ vérifiant la condition $\operatorname{div} W = 0$.

9)a) Calculer $\langle\!\langle U, \operatorname{rot} V \rangle\!\rangle - \langle\!\langle \operatorname{rot} U, V \rangle\!\rangle$ pour tout $V \in C^\infty(\mathbf{R}^3)^3$.

9)b) Montrer qu'il existe $f \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^3)$ telle que $U = \nabla f$.

FIN