PROMOTION 2011 — MAT431
Contrôle classant: distributions, analyse de Fourier et EDP
21 janvier 2012 — Durée: 3h.

Documents autorisés: polycopié.
Matériel autorisé: traducteurs électroniques, dictionnaires pour les élèves étrangers.

Les différentes parties sont indépendantes. La qualité de la rédaction sera un élément important d'appréciation. Les résultats finaux de tous les calculs demandés **devront être encadrés**.

I

On note G et P les fonctions définies sur $\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ par les formules $G(x_1,x_2) = \ln(x_1^2+x_2^2)$ et $P(x_1,x_2) = \frac{1}{\pi}\frac{x_2}{x_1^2+x_2^2}$. On rappelle que la fonction G définit une distribution sur $\mathbf{R}^2$ et que $\Delta G = 4\pi\delta_{(0,0)}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$.

1) Montrer que, pour tout $k \in \{1,2\}$, $\partial_k G$ est une distribution homogène sur $\mathbf{R}^2$ dont on précisera le degré.
2) Montrer que la fonction P définit une distribution homogène sur $\mathbf{R}^2$, et préciser son degré.
3) En déduire que $\partial_2 G = cP$ dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$, où c est une constante que l'on calculera.
4) Montrer que $\Delta P = c'\delta_0 \otimes \delta_0'$, où c' est une constante que l'on calculera.

On pose $\Pi_+ = \{(x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x_2 > 0\}$ et $\Gamma = \mathbf{R}\times\{0\}$, et on considère le problème d'inconnue u:

$$(L) \qquad \begin{cases} \Delta u(x_1,x_2) = 0\,, & \text{pour tout } (x_1,x_2)\in\Pi_+\,,\\ u(x_1,0) = v(x_1)\,, \end{cases}$$

où $v \in C_c^3(\mathbf{R})$ est une fonction donnée.
5) Soit $u \in C^2(\overline{\Pi_+})$ solution du problème (L). Soit U la fonction définie sur $\mathbf{R}^2\setminus\Gamma$ comme suit:

$$U(x_1,x_2) := \begin{cases} u(x_1,x_2) & \text{pour } x_2 > 0\,,\\ -\,u(x_1,-x_2) & \text{pour } x_2 < 0\,. \end{cases}$$

Montrer que U définit un élément de $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$, et calculer ΔU au sens des distributions.
6) Montrer que le problème (L) admet au plus une solution $u \in C^2(\overline{\Pi_+})$ tendant vers 0 à l'infini.
7) On suppose que le problème (L) admet une solution $u \in C^2(\overline{\Pi_+})$. Exprimer $u(x_1,x_2)$ en fonction de P et de v pour tout $(x_1,x_2)\in\Pi_+$.
8) Déduire de ce qui précède que, pour tout $v \in C_c^3(\mathbf{R}^3)$, le problème (L) admet une unique solution $u \in C^2(\overline{\Pi_+})$ tendant vers 0 à l'infini.

II

Soit $N \in \mathbf{N}^*$. On dira que $V \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^N)$, de transformée de Fourier notée $\hat{V}$, vérifie la propriété (P) lorsque

$$(P) \qquad \hat{V} \text{ est une fonction bornée sur } \mathbf{R}^N\,.$$

On dira que $W \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$ vérifie la propriété (Q) lorsque, pour toute fonction $f \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$

$$(Q) \qquad f \text{ identiquement nulle sur } \operatorname{supp}(W) \Rightarrow fW = 0\,.$$

Partie A:

1) On considère la forme linéaire T définie sur $C_c^\infty(\mathbf{R}^3)$ par la formule suivante:

$$\langle T, \phi\rangle = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^\pi \phi(\cos\alpha\sin\theta, \sin\alpha\sin\theta, \cos\theta)\sin\theta d\theta\right)d\alpha\,.$$

Montrer que T est une distribution de simple couche sur une surface Σ de $\mathbf{R}^3$ que l'on précisera, et dont on calculera la densité par rapport à l'élément de surface $d\sigma$ sur Σ.

2) Quel est le support de T? Montrer que $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^3)$. Calculer la transformée de Fourier, que l'on notera $\hat{T}$, de l'élément T de $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^3)$.

3) Soit $U = \partial_1 T$. Calculer la transformée de Fourier $\hat{U}$ de U. Montrer que $\hat{U}$ est une fonction de classe C^∞ bornée sur $\mathbf{R}^3$.

4) Calculer la distribution $(1-|x|^2)T$. Calculer $(1-|x|^2)U$ en fonction de T.

5) Toute distribution de $\mathcal{E}'(\mathbf{R}^3)$ vérifiant la propriété (P) vérifie-t-elle la propriété (Q)?

Partie B:

Soit $N \in \mathbf{N}^*$, et soit $\zeta \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ telle que

$$\zeta(x) \geq 0 \text{ pour tout } x \in \mathbf{R}^N\,, \quad \operatorname{supp}(\zeta) \subset B(0,1)\,, \quad \text{et } \int_{\mathbf{R}^N}\zeta(x)dx = 1\,.$$

Pour tout $\epsilon > 0$, on note $\zeta_\epsilon(x) = \epsilon^{-N}\zeta(x/\epsilon)$.

Soit $V \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^N)$ vérifiant la propriété (P). On notera $K = \operatorname{supp}(V)$, et $\hat{V}$ la transformé de Fourier de V.

1) Montrer que $\zeta_\epsilon \star V$ définit un élément de $L^2(\mathbf{R}^N)$ pour tout $\epsilon > 0$, et que

$$\|\zeta_\epsilon \star V\|_{L^2(\mathbf{R}^N)} \leq \epsilon^{-N/2}\|\zeta\|_{L^2(\mathbf{R}^N)}\|\hat{V}\|_{L^\infty(\mathbf{R}^N)}\,.$$

Pour tout $\epsilon > 0$, on pose

$$K_\epsilon = \{x \in \mathbf{R}^N \mid \text{ il existe } z \in K \text{ t.q. } |z-x| \leq \epsilon\}\,.$$

2) Montrer que, pour tout $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$,

$$|\langle V, \phi\rangle| \leq \|\zeta\|_{L^2(\mathbf{R}^N)}\|\hat{V}\|_{L^\infty(\mathbf{R}^N)}\left(\liminf_{\epsilon\to 0^+}\frac{1}{\epsilon^N}\int_{K_\epsilon}|\phi(x)|^2dx\right)^{1/2}\,.$$

3) Montrer que la mesure de Lebesgue de $K_\epsilon \setminus K$ tend vers 0 lorsque $\epsilon \to 0$.

4) Soit $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$, identiquement nulle sur K. Montrer que

$$\int_{K_\epsilon}|\phi(x)|^2dx = o(\epsilon^2) \quad \text{lorsque } \epsilon \to 0\,.$$

5) On suppose dans cette question que $N \leq 2$. Déduire de ce qui précède que toute distribution de $\mathcal{E}'(\mathbf{R}^N)$ vérifiant la propriété (P) vérifie la propriété (Q).

6) Soit $W \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$ à support dans le cercle unité centré en l'origine et telle que la transformée de Fourier $\hat{W}$ de W soit une fonction bornée sur $\mathbf{R}^2$. Montrer que

$$\hat{W} + \Delta\hat{W} = 0\,.$$

FIN