Distributions, analyse de Fourier, EDP
Amphi no. 4

Elément de longueur sur une courbe de $\mathbf{R}^2$ pp. 196–199

Soit $I \ni t \mapsto \gamma(t) \in \Gamma = \gamma(I) \subset \mathbf{R}^2$ injective de classe C^1 sur le segment I et t.q. $\dot\gamma(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$.

Abscisse curviligne sur Γ: fonction $s : \Gamma \mapsto R$ t.q. $\frac{d}{dt}s(\gamma(t)) = |\dot\gamma(t)|$

Elément de longueur sur la courbe Γ = différentielle d'une abscisse curviligne:

$$ds(\gamma(t)) = |\dot\gamma(t)|dt$$

Longueur de la courbe Γ: $\displaystyle\int_\Gamma ds(M) = \int_I |\dot\gamma(t)|dt$

Intégrale curviligne sur Γ: distribution d'ordre 0 sur $\mathbf{R}^2$ définie par

$$C_c^\infty(\mathbf{R}^2) \ni \phi \mapsto \int_\Gamma \phi(M)ds(M) := \int_I \phi(\gamma(t))|\dot\gamma(t)|dt$$

Rappel: formule de Green-Riemann (p. 92)

Soit $K \subset \mathbf{R}^2$ compact t.q. $\partial K =$ réunion finie de courbes de Jordan régulières $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ paramétrées par s et orientées de sorte que K soit localement à gauche de γ_i parcourue dans le sens des s croissants

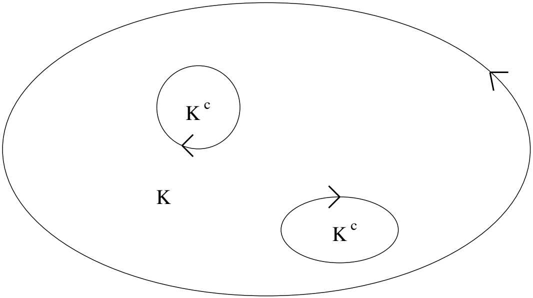
•**Formule de Green-Riemann** P, Q continues au voisinage de K

$$\boxed{\sum_{i=1}^{m} \int_{\gamma_i} Pdx + Qdy = \int_K (\partial_x Q - \partial_y P) dxdy}$$

Cette formule s'écrit encore

$$\int_{\partial K} (Q, -P)(\sigma) \cdot \nu(\sigma) ds(\sigma) = \int_K \operatorname{div}(Q, -P)(x, y) dxdy$$

où $\nu(\gamma_i(s)) := (\gamma'_{i,y}(s), -\gamma'_{i,x}(s))$ normale extérieure



Bord orienté d'un compact de $\mathbf{R}^2$

Elément de surface sur une surface de $\mathbf{R}^3$ pp. 199-204

Soient I, J segments de $\mathbf{R}$ et $I \times J \ni (u,v) \mapsto M(u,v) \in \mathbf{R}^3$ de classe C^1 injective t.q. $(\partial_u M(u,v), \partial_v M(u,v))$ libre pour tout $(u,v) \in I \times J$

Plan tangent $T_{M(u,v)}\Sigma$ à la surface $\Sigma = M(I \times J)$ au point $M(u,v)$:

$$\{M(u,v) + \lambda \partial_u M(u,v) + \mu \partial_v M(u,v) \,|\, \lambda, \mu \in \mathbf{R}\}$$

Elément de surface sur Σ:

$$d\sigma(M(u,v)) = |\partial_u M(u,v) \wedge \partial_v M(u,v)| du dv$$

Distribution (d'ordre 0) de simple couche de densité $f \in C(\Sigma)$:

$$C_c^\infty(\mathbf{R}^3) \ni \phi \mapsto \int_\Sigma f(M)\phi(M) d\sigma(M)$$
$$= \int_{I \times J} f\phi(M(u,v)) |\partial_u M \wedge \partial_v M|(u,v) du dv$$

•Courbe de $\mathbf{R}^2$ d'équation $y = f(x)$ avec f de classe C^1:

$$ds = \sqrt{1 + f'(x)^2}dx \quad \text{(élément de longueur)}$$

•Surface de $\mathbf{R}^3$ d'équation $z = f(x, y)$ avec f de classe C^1:

$$\begin{aligned} d\sigma &= \sqrt{1 + |\partial_x f(x,y)|^2 + |\partial_y f(x,y)|^2}dxdy \\ &= \sqrt{1 + |\nabla f(x,y)|^2}dxdy \quad \text{(élément de surface)} \end{aligned}$$

•Hypersurface de $\mathbf{R}^N$ d'équation $x_N = f(x_1, \ldots, x_{N-1})$ avec $f \in C^1$: par analogie, l'élément de surface s'écrit

$$d\sigma = \sqrt{1 + |\nabla f(x_1, \ldots, x_{N-1})|^2}dx_1 \ldots dx_N$$

Exemple: élément de surface sur la sphère

•Sphère unité $\mathbf{S}^2 \subset \mathbf{R}^3$:

$$]-\pi,\pi[\times]0,\pi[\ni(\phi,\theta)\mapsto(\cos\phi\sin\theta,\sin\phi\sin\theta,\cos\theta)\mathbf{S}^2\setminus\Pi$$

où Π est le demi-plan d'équation $x_1 \leq 0$ et $x_2 = 0$

•Elément de surface:

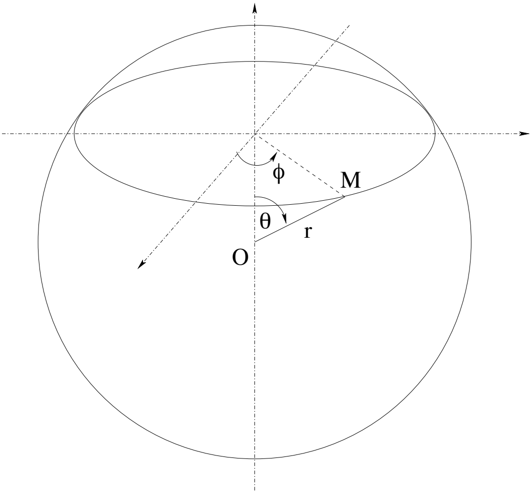
$$\partial_\phi M = (-\sin\phi\sin\theta,\cos\phi\sin\theta,0)\,,$$
$$\partial_\theta M = (\cos\phi\cos\theta,\sin\phi\cos\theta,-\sin\theta)$$

de sorte que

$$\partial_\phi M\wedge\partial_\theta M = (-\cos\phi\sin^2\theta,-\sin\phi\sin^2\theta,-\cos\theta\sin\theta)$$

Donc l'élément de surface vaut

$$d\sigma := \sqrt{\sin^4\theta+\cos^2\theta\sin^2\theta}\,d\phi d\theta = \sin\theta d\phi d\theta$$



Coordonnées sphériques dans $\mathbf{R}^3$

Formule des sauts, dim. >1 (pp. 91–97)

Soit Ω ouvert à bord de classe C^1 de $\mathbf{R}^N$ — autrement dit

(a) $\partial\Omega$ hypersurface de classe C^1 de $\mathbf{R}^N$, et

(b) localement, Ω est d'un seul côté de $\partial\Omega$ — cf. exemples p. 95

Soit ν le champ unitaire normal à $\partial\Omega$ dirigé vers l'extérieur de Ω. Alors

Thm. (Formule de Green(-Ostrogradsky) usuelle, p. 94)

$$\boxed{\int_\Omega \operatorname{div} V(x)dx = \int_{\partial\Omega} V(x)\cdot\nu(x)d\sigma(x)}$$

pour tout $V \in C^1(\overline{\Omega};\mathbf{R}^N)$, où $d\sigma$ est l'élément de surface sur $\partial\Omega$.

Formule des sauts, dim. >1 (pp. 91–97)

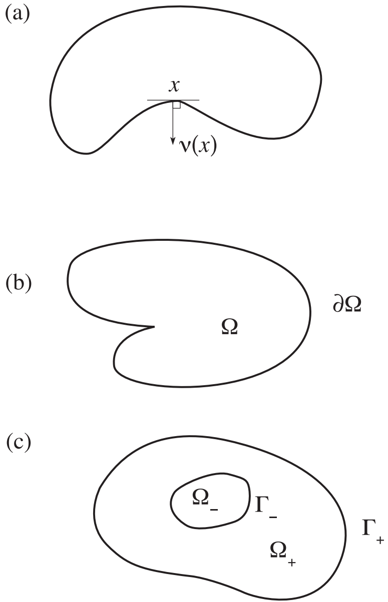
En prenant V de la forme $V(x) = f(x)e_i$ avec $f \in C^1(\overline{\Omega})$, la formule de Green devient

$$\boxed{\int_\Omega \partial_{x_i} f(x)dx = \int_{\partial\Omega} f(x)\nu_i(x)d\sigma(x)}$$

Thm. (Formule de Green dans $\mathcal{D}'$)

$$\boxed{\partial_{x_i}(\mathbf{1}_\Omega) = -\nu_i\sigma\,, \quad i = 1, \ldots, N\,, \quad \text{avec } \langle\sigma, \phi\rangle = \int_{\partial\Omega} \phi d\sigma}$$

où $d\sigma$ est l'élément de surface sur $\partial\Omega$.


(a)
x
ν(x)
(b)
∂Ω
Ω
(c)
Ω₋
Γ₋
Γ₊
Ω₊

Thm. (Formule des sauts dans $\mathbf{R}^N$, p. 96)
Soient Ω ouvert à bord de classe C^1, ainsi que $f \in C^1(\mathbf{R}^N \setminus \partial\Omega)$ t.q.

$f\big|_{\Omega}$ et $f\big|_{\mathbf{R}^N\setminus\overline{\Omega}}$ se prolongent en éléments de $C^1(\overline{\Omega})$ et $C^1(\mathbf{R}^N \setminus \Omega)$

Alors

$$\boxed{\partial_{x_i} f = \{\partial_{x_i} f\} + [f]_{\partial\Omega} \nu_i \sigma}$$

où

$$[f]_{\partial\Omega}(x) = \lim_{t\to 0^+} \left(f(x + t\nu_i(x)) - f(x - t\nu_i(x))\right) \text{ tandis que}$$

$$\{\partial_{x_i} f\} = \partial_{x_i} \left(f\big|_{\mathbf{R}^N\setminus\partial\Omega} \right)$$

Système d'EDP d'ordre 1 de la forme

$$\partial_t U + \partial_x F(U) = 0$$

où $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R} \ni (t, x) \mapsto U(t, x) \in \mathbf{R}^n$ et $F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ est C^∞

Exemples:

a) l'équation de Hopf: $n = 1$ et $F(U) = \frac{1}{2}U^2$

b) le système d'Euler de la dynamique des gaz barotrope: $n = 2$ et

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ m \end{pmatrix} \quad F(U) = \begin{pmatrix} m \\ \frac{m^2}{\rho} + p(\rho) \end{pmatrix}$$

c) le système d'Euler de la dynamique des gaz parfaits avec température (cf. polycopié p. 98)

•On suppose que la solution U contient une “onde de choc" plane avançant à la vitesse s — c'est à dire une discontinuité de première espèce matérialisée par la droite

$$\Sigma_t \subset \mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x \text{ d'équation } x = st$$

•Ce qu'on lit dans un traité de mécanique des fluides: la solution U vérifie d'une part le système d'EDP en dehors de la surface de choc:

$$\partial_t U + \partial_x F(U) = 0 \quad \text{pour } x \neq st$$

et d'autre part les relations de Rankine-Hugoniot sur la surface de choc:

$$F(U_+) - F(U_-) = s(U_+ - U_-) \quad \text{pour } x = st$$

Notation: $U_\pm(t, st) = U(t, st \pm 0)$

•Interprétation dans $\mathcal{D}'$ par la formule des sauts:

$$\partial_t U + \partial_x F(U) = \{\partial_t U + \partial_x F(U)\} + \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}[F(U) - sU]_\Sigma \sigma_\Sigma$$

où

$$\langle \sigma_\Sigma, \phi \rangle = \int_0^\infty \phi(t, st)\sqrt{1+s^2}\,dt$$

Donc, dire que

$$\partial_t U + \partial_x F(U) = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R})$$

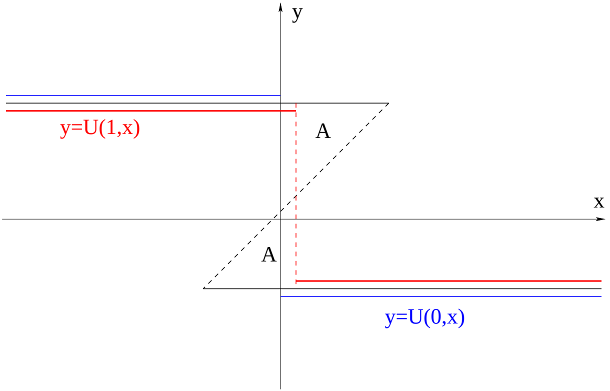
c'est dire que

$$\boxed{\begin{array}{ll} \{\partial_t U + \partial_x F(U)\} = 0 \Leftrightarrow \partial_t U + \partial_x F(U) = 0 & \text{pour } x \neq st \\ [F(U) - sU]_\Sigma = 0 \Leftrightarrow F(U_+) - F(U_-) = s(U_+ - U_-) & \text{pour } x = st \end{array}}$$

•Cas de l'équation de Hopf: $n = 1$ et $F(U) = \frac{1}{2}U^2$; Rankine-Hugoniot:

$$\frac{1}{2}(U_+^2 - U_-^2) = s(U^+ - U^-) \text{ c.a.d. } s = \frac{1}{2}(U^+ + U^-)$$

Interprétation géométrique:



•Jusqu'ici, nous avons étudié la généralisation aux distributions des règles de calcul **locales** connues sur les fonctions (dérivation, produit par une fonction régulière, changement de variables...)

•Pour appliquer le calcul des distributions aux EDP, on aura besoin de généraliser aussi certaines opérations **globales**, comme le produit de convolution et la transformation de Fourier

$\Rightarrow$ Développer des notions de "croissance à l'infini" pour les distributions

NOTION LA PLUS SIMPLE: les distributions à support compact

Support des distributions (pp. 116–119)

•Support de T = le plus petit fermé de Ω en dehors duquel $T = 0$

$$\boxed{\operatorname{supp}(T) = \bigcap_{F \in \mathcal{F}(T)} F \quad \text{où } \mathcal{F}(T) = \left\{ F \text{ fermé de } \Omega \text{ t.q. } T\big|_{\Omega \setminus F} = 0 \right\}}$$

Ex: 1) Masse de Dirac: pour tout $x_0 \in \mathbf{R}$, $\operatorname{supp}(\delta_{x_0}) = \{x_0\}$
2) Distribution de simple couche: pour tout $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ ouvert à bord de classe C^1, on a

$$\partial_{x_i} \mathbf{1}_\Omega = -\nu_i \sigma \,, \qquad \text{avec la notation } \langle \sigma, \phi \rangle = \int_{\partial\Omega} \phi \, d\sigma$$

où $d\sigma$ est l'élément de surface sur $\partial\Omega$ orienté par le champ unitaire normal ν extérieur à Ω; alors

$$\operatorname{supp}(\partial_{x_i} \mathbf{1}_\Omega) \subset \partial\Omega$$

Propriétés de la notion de support

Prop: (p. 116) pour tout $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $a \in C^\infty(\Omega)$, on a

$$\mathrm{supp}(\partial_{x_i} T) \subset \mathrm{supp}(T) \text{ et } \mathrm{supp}(aT) \subset \mathrm{supp}(a) \cap \mathrm{supp}(T)$$

Prop: (p. 116) Pour tout $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ on a $T\big|_{\Omega \setminus \mathrm{supp}(T)} = 0$; donc

$$\mathrm{supp}(\phi) \cap \mathrm{supp}(T) = \varnothing \Rightarrow \langle T, \phi \rangle = 0$$

ATTENTION: $\phi = 0$ sur $\mathrm{supp}(T)$ n'entraîne pas $\langle T, \phi \rangle = 0$

Ex: 1) Dérivées de Dirac: pour tout $x_0 \in \mathbf{R}$, $\mathrm{supp}(\delta_{x_0}^{(n)}) = \{x_0\}$
2) Contre-exemple: la fonction $x \mapsto x - x_0$ s'annule en x_0, mais la relation $(x - x_0)\delta_{x_0} = 0$ et la formule de Leibnitz entraînent que

$$(x - x_0)\delta'_{x_0} = -\delta_{x_0}$$

On note $\mathcal{E}'(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ le sous-espace des distributions à support compact dans Ω.
Dualité $\mathcal{E}'(\Omega)$-$C^\infty(\Omega)$: pour tout $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ et $\phi \in C^\infty(\Omega)$

$$\langle T\phi\rangle := \langle T, \chi\phi\rangle\,, \text{ où } \chi \in C_c^\infty(\Omega) \text{ t.q. } \chi = 1 \text{ près de } \operatorname{supp}(T)$$

Définition indépendante de la fonction χ (Prop. 4.1.4, p. 119)

Prop: (p. 120)
a) Toute distribution à support compact est d'ordre fini.
b) Pour tout $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$, il existe $K \subset \Omega$ compact, $p \in \mathbf{N}$ et $C > 0$ tels que

$$|\langle T, \phi\rangle| \leq C \max_{|\alpha|\leq p} \sup_{x\in K} |\partial^\alpha \phi(x)| \quad \text{pour tout } \phi \in C^\infty(\Omega)$$

Corollaire: soit $(\phi_n)_{n\geq 1}$ suite de $C^\infty(\Omega)$ t.q. pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^N$

$$\partial^\alpha \phi_n \to \partial^\alpha \phi \text{ uniformément sur tout compact de } \Omega$$

Alors, pour tout $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$, on a

$$\langle T, \phi_n \rangle \to \langle T, \phi \rangle$$

Prolongement par 0**:** à $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ on associe son prolongement par 0 hors de Ω, notée $\dot{T} \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^N)$ et définie par

$$\langle \dot{T}, \phi \rangle_{\mathcal{E}'(\mathbf{R}^N), C^\infty(\mathbf{R}^N)} = \left\langle T, \phi\big|_\Omega \right\rangle_{\mathcal{E}'(\Omega), C^\infty(\Omega)}$$

Distributions à support singleton (pp. 121-123)

Soient Ω ouvert de $\mathbf{R}^N$, une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $x_0 \in \Omega$

Thm: Si $\operatorname{supp}(T) \subset \{x_0\}$, alors T est une combinaison linéaire finie de δ_{x_0} et de ses dérivées.

C.a.d. qu'il existe $(\lambda_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{N}^N}$ t.q. $\lambda_\alpha = 0$ sauf pour un nombre fini de α et

$$\boxed{T = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^N} \lambda_\alpha \partial^\alpha \delta_{x_0}}$$

Distributions homogènes (pp. 102–112)

Notation: $M_\lambda : \mathbf{R}^N \ni x \mapsto \lambda x \in \mathbf{R}^N$ pour tout $\lambda \in \mathbf{R}^*$

•Soit Ω cône ouvert de $\mathbf{R}^N$(ouvert de $\mathbf{R}^N$ t.q. $\lambda > 0 \Rightarrow M_\lambda(\Omega) \subset \Omega$)
•Une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est dite homogène de degré β si on a

$$T \circ M_\lambda = \lambda^\beta T \quad \text{pour tout } \lambda > 0$$

Exemples: (a) δ_0 et $\mathrm{vp}\frac{1}{x}$ sont homogènes de degré -1 dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$;
(b) pf x_+^a est homogène de degré a pour tout réel $a \neq$ entier négatif
(c) $\partial^\alpha \delta_0$ est homogène de degré $-N-|\alpha|$ dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$; en particulier δ_0 est homogène de degré $-N$ dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$

Prop: (p. 103) Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ distribution homogène de degré β; alors

$$\partial^\alpha T \text{ est homogène de degré } \beta - |\alpha| \text{ pour tout } \alpha \in \mathbf{N}^N$$

Prop: (pp. 110–112)
Toute distribution homogène de degré $> -N$ sur $\mathbf{R}^N \setminus \{0\}$ se prolonge de manière unique en une distribution homogène sur $\mathbf{R}^N$ de même degré.

FAUX pour une distribution homogène de degré $-N$ sur $\mathbf{R}^N \setminus \{0\}$

Ex: 1) $\frac{1}{|x|} \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}\setminus\{0\})$ n'a pas de prolongement homogène $\in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$

2) (cf. Prop. 4.1.8, pp. 125–126) pour $A \in C(\mathbf{R}^N)$

$$\frac{1}{|x|^N} A\left(\frac{x}{|x|}\right) \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N) \Leftrightarrow \int_{\mathbf{S}^{N-1}} A(\omega) d\sigma(\omega) = 0$$

Distributions homogènes + à support dans $\{0\}$

Dans l'étude des EDP, on utilisera souvent l'argument suivant:

•Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N \setminus \{0\})$ homogène de degré $-N+m$ t.q. $\partial^\alpha T = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^N \setminus \{0\})$, avec $|\alpha| = m > 0$.

1) d'une part, T admet un unique prolongement $\tilde{T} \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$ homogène de degré $-N+m$;

2) d'autre part, $\partial^\alpha \tilde{T}\big|_{\mathbf{R}^N \setminus \{0\}} = 0$, c.a.d. $\mathrm{supp}(\partial^\alpha \tilde{T}) = \{0\}$.

ALORS $\partial^\alpha \tilde{T}$ =distribution homogène de degré $-N+m-|\alpha| = -N$ sur $\mathbf{R}^N$ à support dans $\{0\}$. Elle est donc de la forme

$$\partial^\alpha \tilde{T} = c\delta_0 \quad \text{avec } c \in \mathbf{R} \text{ ou } \mathbf{C}$$