Distributions, analyse de Fourier, EDP
Amphi no. 6

Principe de bornitude uniforme

<u>RAPPEL:</u> **Thm. de Banach-Steinhaus.** Soient E espace de Banach et $(L_n)_{n\geq 1}$ suite de formes LINÉAIRES CONTINUES sur E. Supposons que

$$L_n(x) \to L(x) \text{ pour tout } x \in E \text{ lorsque } n \to +\infty\,.$$

Alors L est une forme linéaire CONTINUE sur E.

Principe de bornitude uniforme dans $\mathcal{D}'$ (p. 60): Soient Ω ouvert de $\mathbf{R}^N$, une suite $(T_n)_{n\geq 1}$ de $\mathcal{D}'(\Omega)$ et K compact $\subset \Omega$. Supposons que

$$\text{la suite } \langle T_n, \phi\rangle \text{ converge pour tout } \phi \in C^\infty(\Omega) \text{ à support dans } K$$

Alors, il existe $C > 0$ et $p \in \mathbf{N}$ tels que, pour tout $\phi \in C^\infty(\Omega)$

$$\operatorname{supp}(\phi) \subset K \Rightarrow \sup_{n\geq 1} |\langle T_n, \phi\rangle| \leq C \max_{|\alpha|\leq p} \sup_{x\in K} |\partial^\alpha \phi(x)|$$

Conséquences du principe de bornitude uniforme

1) **Thm. de Banach-Steinhaus dans $\mathcal{D}'$ (p. 70):** Soit $(T_n)_{n\geq 1}$ suite de $\mathcal{D}'(\Omega)$. Si la suite $\langle T_n, \phi\rangle$ est convergente pour tout $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ alors il existe $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ t.q. $T_n \to T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$

2) **Continuité du crochet de dualité (p. 71):** Soient $(T_n)_{n\geq 1}$ suite de $\mathcal{D}'(\Omega)$ et $(\phi_n)_{n\geq 1}$ suite de $C_c^\infty(\Omega)$. Alors

$$\phi_n \to \phi \text{ dans } C_c^\infty(\Omega) \text{ et } T_n \to T \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \Rightarrow \langle T_n, \phi_n\rangle \to \langle T, \phi\rangle$$

3)**Proposition 4.2.7 (p. 132):** soient $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ et $(T_n)_{n\geq 1}$ une suite de distributions sur $\mathbf{R}^N$. Alors, pour tout multi-indice α

$$\begin{aligned} T_n \to T \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N) &\Rightarrow T_n \star \phi \to T \star \phi \text{ C.U. sur tout compact} \\ &\Rightarrow \partial^\alpha(T_n \star \phi) \to \partial^\alpha(T \star \phi) \text{ C.U. sur tout compact} \end{aligned}$$

Notation: Pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$, on note $\tilde{T} = T \circ (-Id) \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$

$$\langle \tilde{T}, \phi \rangle = \langle T, \tilde{\phi} \rangle \,, \quad \text{où} \quad \tilde{\phi}(x) := \phi(-x) \,, \quad \phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$$

Déf: Pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$ et $S \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^N)$, on définit $T \star S \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$ par

$$\boxed{\langle T \star S, \phi \rangle := \langle T, \tilde{S} \star \phi \rangle \,, \quad \text{pour tout } \phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)}$$

Le membre de droite est bien défini, puisque $\tilde{S} \star \phi \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$ est à support dans $\mathrm{supp}(\phi) + \mathrm{supp}(\tilde{S})$ compact.

EXEMPLE FONDAMENTAL: notons τ_a la translation $x \mapsto x + a$ sur $\mathbf{R}^N$; alors

$$T \star \delta_a = T \circ \tau_{-a} \,, \qquad T \star \delta_0 = T$$

Majoration du support: pour tout $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$ et $S \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^N)$

$$\boxed{\operatorname{supp}(T \star S) \subset \operatorname{supp}(T) + \operatorname{supp}(S)}$$

Commutativité du produit de convolution: pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$ et $S \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^N)$, on définit $S \star T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$ par

$$\langle S \star T, \phi \rangle := \langle S, \tilde{T} \star \phi \rangle \,, \qquad \text{pour tout } \phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$$

Le membre de droite est bien défini puisque $\tilde{T} \star \phi \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$ et S est à support compact.

Thm:

$$\boxed{T \star S = S \star T \,, \qquad \text{pour tout } T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N) \,,\ S \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^N)}$$

Dém: régulariser S et intégrer sous le crochet de dualité

Continuité séquentielle de la convolution:

Thm: Soient des suites $T_n \to T$ et $S_n \to S$ dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$. Soit $K \subset \mathbf{R}^N$ COMPACT FIXE, INDEPENDANT de n

$$\boxed{\mathrm{supp}(S_n) \subset K \text{ pour tout } n \Rightarrow T_n \star S_n \to T \star S \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)}$$

Dérivation et convolution:

Thm: pour tout $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$ et $S \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^N)$, on a

$$\boxed{\partial^\alpha(T \star S) = (\partial^\alpha T) \star S = T \star (\partial^\alpha S)\,, \qquad \text{pour tout } \alpha \in \mathbf{N}^N}$$

<u>EXEMPLE FONDAMENTAL:</u> pour tout $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$ et $\alpha \in \mathbf{N}^N$

$$\boxed{(\partial^\alpha \delta_0) \star T = T \star (\partial^\alpha \delta_0) = \partial^\alpha T}$$

Application: dérivation fractionnaire (p. 144)

Fonction Γ: rappelons que la fonction eulérienne Γ est donnée par

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^z e^{-t} \frac{dt}{t}\,, \quad \Re(z) > 0$$

Propriétés: a) $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, de sorte que $\Gamma(n+1) = n!$
b) $z \mapsto \frac{1}{\Gamma(z)}$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$

Distributions χ_+^a (p. 106): pour tout $a > -1$, on pose

$$\chi_+^a(x) = \frac{(x_+)^a}{\Gamma(a+1)}\,, \qquad \text{où } x_+ = \max(x, 0)$$

On définit ensuite $\chi_+^a \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ homogène de degré a pour tout $a \in \mathbf{R}$ par la formule

$$\chi_+^a = (\chi_+^{a+1})' = \ldots = (\chi_+^{a+n})^{(n)} \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R})$$

Cas particuliers importants: a) $\chi_+^0 = H = \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}$ fonction de Heaviside

b) pour tout $k \geq 1$, on a $\chi_+^{-k} = \delta_0^{(k-1)}$; en particulier $\chi_+^{-1} = \delta_0$

Notion de dérivation fractionnaire: on a vu que, pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k T = \delta_0^{(k)} \star T\,, \quad k \in \mathbf{N}^*$$

ceci suggère de définir, pour tout $T \in \mathcal{E}'(\mathbf{R})$ et tout $a \in \mathbf{R}$

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^a T = \chi_+^{-a-1} \star T\,, \quad a \in \mathbf{R}^*$$

Le cas $a = -1$ correspond à

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{-1} T = H \star T \left(= \int_{-\infty}^{x} T(y)dy \text{ lorsque } T \text{ est une fonction} \right)$$

Associativité de la convolution des distributions

Thm: soient $T, S, R \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$, avec deux d'entre elles à support compact. Alors

$$\boxed{(T \star S) \star R = T \star (S \star R)}$$

•ATTENTION: cela peut être faux si un seul support est compact:

$$\boxed{\begin{aligned}(1 \star \delta_0') \star H = 0 \star H \quad &= 0\,,\\ 1 \star (\delta_0' \star H) = 1 \star H' \quad &= 1 \star \delta_0 = 1\,.\end{aligned}}$$

dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$, où H est la fonction de Heaviside:

$$H(x) = \mathbf{1}_{x \geq 0}$$

Motivation: en vue de l'étude des EDP, décomposer les fonctions (distributions) comme superposition linéaire de fonctions propres oscillantes $\mathbf{R}^N \ni x \mapsto e^{i\xi\cdot x} \in \mathbf{C}$ de la dérivation:

$$\boxed{\partial_x^\alpha e^{i\xi\cdot x} = (i\xi)^\alpha e^{i\xi\cdot x}}$$

Difficulté: transformation de Fourier=opération globale

$\Rightarrow$ nécessite un contrôle de la croissance à l'infini des distributions

$\Rightarrow$ la transformation de Fourier n'est pas définie sur tout $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$, mais seulement sur un sous-espace de $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$

La classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ (pp. 150–154)

•Déf. de la classe de Schwartz

$$\mathcal{S}(\mathbf{R}^N) := \{\phi \in C^\infty(\mathbf{R}^N) \text{ t.q. } x^\alpha \partial_x^\beta \phi \in L^\infty(\mathbf{R}^N) \text{ pour tous } \alpha, \beta \in \mathbf{N}^N\}$$

Exemples d'éléments de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$:

a) $C_c^\infty(\mathbf{R}^N) \subset \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$;
b) $\phi(x) := P(x)e^{-a|x|^2}$ où P polynôme et $a > 0$

•Convergence des suites dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$: soient $\phi_n, \phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$

$$\phi_n \to \phi\,, \quad \text{si } \mathcal{N}_p(\phi_n - \phi) \to 0 \text{ pour tout } p \geq 0$$

où $\mathcal{N}_p$ est, pour tout $p \in \mathbf{N}$, la norme sur $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ définie par

$$\mathcal{N}_p(\phi) := \sum_{|\alpha|,|\beta| \leq p} \sup_{x \in \mathbf{R}^N} |x^\alpha \partial_x^\beta \phi(x)|$$

Prop: Pour tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$, il existe $C_c^\infty(\mathbf{R}^N) \ni \phi_n \to \phi$ dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$

$$\boxed{C_c^\infty(\mathbf{R}^N) \text{ dense dans } \mathcal{S}(\mathbf{R}^N) \text{ dense dans } L^p(\mathbf{R}^N)}$$

<u>PROPRIETES:</u> a) $\phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N) \Rightarrow \partial^\alpha \phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$
b) soient $\phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ et $f \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$;

$$f = O(|x|^n)\,,\ \partial^\alpha f = O(|x|^{n_\alpha}) \Rightarrow f\phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$$

c) $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N) \subset L^p(\mathbf{R}^N)$ pour tout $1 \leq p \leq \infty$
d) $\phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ et $S \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^N) \Rightarrow S \star \phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$

Déf: A tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ on associe sa transformée de Fourier

$$\mathcal{F}\phi(\xi) = \int_{\mathbf{R}^N} e^{-i\xi\cdot x}\phi(x)dx\,, \quad \xi \in \mathbf{R}^N$$

<u>PROPRIETES:</u> a) soit $\phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$; alors $\mathcal{F}\phi \in C^1(\mathbf{R}^N)$ et on a:

$$\boxed{\partial_{\xi_k}\mathcal{F}\phi = \mathcal{F}(-ix_k\phi)\,, \quad \mathcal{F}(\partial_{x_k}\phi) = i\xi_k\mathcal{F}\phi}$$

$\mathcal{F}$ ECHANGE DERIVATION ET MULTIPLICATION PAR $\pm ix$ ou $\pm i\xi$

b) Transformation de Fourier et translations

$$\boxed{\mathcal{F}\left[\phi(\cdot - a)\right](\xi) = e^{-ia\cdot\xi}\mathcal{F}(\phi)(\xi)\,, \quad \mathcal{F}[e^{+ia\cdot x}\phi](\xi) = \mathcal{F}\phi(\xi - a)}$$

$\mathcal{F}$ ECHANGE TRANSLATION ET MULTIPLICATION PAR $e^{ia\cdot x}$ ou $e^{ia\cdot\xi}$

Transformée de Fourier des gaussiennes: soit $A \in M_N(\mathbf{R})$

$$0 < A = A^T \Rightarrow G_A(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det(A)}} e^{-\frac{1}{2}(A^{-1}x|x)} \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$$

et on a

$$\boxed{\mathcal{F}(G_A)(\xi) = e^{-\frac{1}{2}(A\xi|\xi)}}$$

Thm d'inversion de Fourier: $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbf{R}^N) \to \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ est un isomorphisme continu d'inverse continu donné par

$$\boxed{\mathcal{F}^{-1}\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbf{R}^N} e^{ix\cdot\xi} \psi(\xi) d\xi = \frac{1}{(2\pi)^N} \mathcal{F}\psi(-x)}$$

Formule de Plancherel: pour $\phi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$, on a

$$\boxed{(\mathcal{F}\phi|\mathcal{F}\psi)_{L^2(\mathbf{R}^N_\xi)} = (2\pi)^N (\phi|\psi)_{L^2(\mathbf{R}^N_x)}}$$

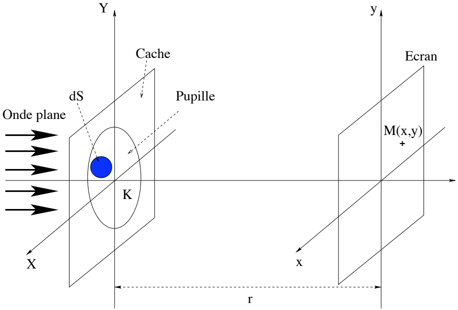
Inconvénients de la théorie de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$

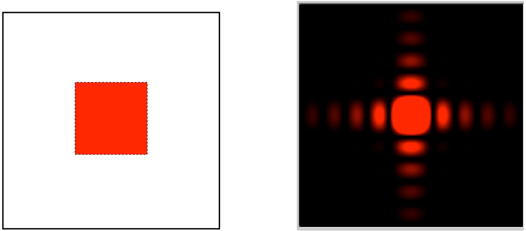
•Pour appliquer l'analyse de Fourier à l'étude des EDP, on a vu qu'il faut pouvoir manipuler des “solutions peu régulières" (i.e. des distributions)

•Mais même en dehors du cadre des EDP, le thm d'inversion de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ est insuffisant dans de nombreuses situations

Exemple: diffraction de Fraunhofer L'amplitude de l'onde diffractée par l'ouverture K au point M de coordonnées (x, y) de l'écran vaut

$$A\left|\iint_{\mathbf{R}^2} \mathbf{1}_K(X,Y)e^{-i\frac{2\pi}{\lambda r}(xX+yY)}dXdY\right| = A|\mathcal{F}(\mathbf{1}_K)(\tfrac{2\pi}{\lambda r}(x,y))|$$





A gauche, ouverture carrée; à droite son image diffractée sur l'écran

Si $K = [-1, 1]^2$, la fonction $\mathbf{1}_K \notin C(\mathbf{R}^2)$ et d'ailleurs

$$\mathcal{F}(\mathbf{1}_K)(\xi, \eta) = \frac{(\sin \xi)(\sin \eta)}{\xi \eta} \notin L^1(\mathbf{R}^2_{\xi,\eta})$$

Conclusion: La transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ ne suffit pas pour modéliser la diffraction