Distributions, analyse de Fourier, EDP
Amphi no. 7

Déf: A tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ on associe sa transformée de Fourier

$$\mathcal{F}\phi(\xi) = \int_{\mathbf{R}^N} e^{-i\xi\cdot x}\phi(x)dx\,, \quad \xi \in \mathbf{R}^N$$

<u>PROPRIETES:</u> a) soit $\phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$; alors $\mathcal{F}\phi \in C^1(\mathbf{R}^N)$ et on a:

$$\boxed{\partial_{\xi_k}\mathcal{F}\phi = \mathcal{F}(-ix_k\phi)\,, \quad \mathcal{F}(\partial_{x_k}\phi) = i\xi_k\mathcal{F}\phi}$$

$\mathcal{F}$ ECHANGE DERIVATION ET MULTIPLICATION PAR $\pm ix$ ou $\pm i\xi$

b) Transformation de Fourier et translations

$$\boxed{\mathcal{F}\left[\phi(\cdot - a)\right](\xi) = e^{-ia\cdot\xi}\mathcal{F}(\phi)(\xi)\,, \quad \mathcal{F}[e^{+ia\cdot x}\phi](\xi) = \mathcal{F}\phi(\xi - a)}$$

$\mathcal{F}$ ECHANGE TRANSLATION ET MULTIPLICATION PAR $e^{ia\cdot x}$ ou $e^{ia\cdot\xi}$

Transformée de Fourier des gaussiennes: soit $A \in M_N(\mathbf{R})$

$$0 < A = A^T \Rightarrow G_A(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det(A)}} e^{-\frac{1}{2}(A^{-1}x|x)} \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$$

et on a

$$\boxed{\mathcal{F}(G_A)(\xi) = e^{-\frac{1}{2}(A\xi|\xi)}}$$

Thm d'inversion de Fourier: $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbf{R}^N) \to \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ est un isomorphisme continu d'inverse continu donné par

$$\boxed{\mathcal{F}^{-1}\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbf{R}^N} e^{ix\cdot\xi} \psi(\xi) d\xi = \frac{1}{(2\pi)^N} \mathcal{F}\psi(-x)}$$

Formule de Plancherel: pour $\phi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$, on a

$$\boxed{(\mathcal{F}\phi|\mathcal{F}\psi)_{L^2(\mathbf{R}^N_\xi)} = (2\pi)^N (\phi|\psi)_{L^2(\mathbf{R}^N_x)}}$$

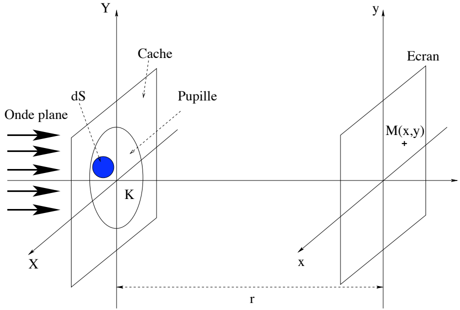
Inconvénients de la théorie de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$

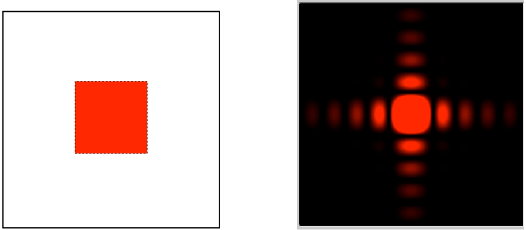
•Pour appliquer l'analyse de Fourier à l'étude des EDP, on a vu qu'il faut pouvoir manipuler des "solutions peu régulières" (i.e. des distributions)

•Mais même en dehors du cadre des EDP, le thm d'inversion de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ est insuffisant dans de nombreuses situations

Exemple: diffraction de Fraunhofer L'amplitude de l'onde diffractée par l'ouverture K au point M de coordonnées (x, y) de l'écran vaut

$$A\left|\iint_{\mathbf{R}^2} \mathbf{1}_K(X,Y)e^{-i\frac{2\pi}{\lambda r}(xX+yY)}dXdY\right| = A|\mathcal{F}(\mathbf{1}_K)(\tfrac{2\pi}{\lambda r}(x,y))|$$





A gauche, ouverture carrée; à droite son image diffractée sur l'écran

Si $K = [-1,1]^2$, la fonction $\mathbf{1}_K \notin C(\mathbf{R}^2)$ et d'ailleurs

$$\mathcal{F}(\mathbf{1}_K)(\xi,\eta) = \frac{(\sin\xi)(\sin\eta)}{\xi\eta} \notin L^1(\mathbf{R}^2_{\xi,\eta})$$

Conclusion: La transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ ne suffit pas pour modéliser la diffraction

Déf: Distribution tempérée = forme linéaire T continue sur $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$:

il existe $p, C_p \geq 0$ t.q. $|\langle T, \phi\rangle| \leq C_p \mathcal{N}_p(\phi)$ pour tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$

Notation: l'espace des distributions tempérées sur $\mathbf{R}^N$ est noté $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$

•$\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N) \subset \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$: la restriction de T à $C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ est une distribution

$$\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N) \Rightarrow \mathcal{N}_p(\phi) \leq C_{K,p} \max_{|\alpha|\leq p} \sup_{x\in X} |\partial^\alpha \phi(x)|$$

$$\text{où } C_{K,p} = (p+1)^{2N} \max_{x\in K}(1+|x|)^p$$

EXEMPLES: a) $L^p(\mathbf{R}^N)$ et $\mathcal{E}'(\mathbf{R}^N) \subset \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$

b) $\{$fonctions continues de période 2π sur $\mathbf{R}\} \subset \mathcal{S}'(\mathbf{R})$

c) mais aucune des fonctions $\exp, \cosh, \sinh$ n'appartient à $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$

PROPRIETES: soient $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$ et $f \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$

a) $\partial^\alpha T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$ pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^N$

b) $f(x) = O(|x|^n)\,,\ \partial^\alpha f(x) = O(|x|^{n_\alpha})\,\forall\alpha \ \Rightarrow fT \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$

c) $S \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^N) \Rightarrow S \star T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$

Déf: soit $(T_n)_{n\geq 1}$ suite de $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$; on dit que $T_n \to T$ dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$ ssi $\langle T_n, \phi\rangle \to \langle T, \phi\rangle$ pour tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$

Prop: soient $T_n \to T$ dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$ et $f \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$

a) $\partial^\alpha T_n \to \partial^\alpha T$ dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$ pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^N$

b) $f(x) = O(|x|^n)\,,\ \partial^\alpha f(x) = O(|x|^{n_\alpha})\,\forall\alpha \ \Rightarrow fT_n \to fT$ dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$

Transformation de Fourier sur $\mathcal{S}'$ (pp. 166–176)

•<u>Observation:</u> pour $\phi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$, d'après le théorème de Fubini

$$\int_{\mathbf{R}^N} \phi(x)\mathcal{F}\psi(x)dx = \int_{\mathbf{R}^N} \psi(y)\mathcal{F}\phi(y)dy$$

Déf: A tout $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$ on associe $\mathcal{F}T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$ définie par

$$\boxed{\langle \mathcal{F}T, \phi \rangle = \langle T, \mathcal{F}\phi \rangle \,, \quad \phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)}$$

PROPRIETES

$$\boxed{\mathcal{F}(\partial_{x_k} T) = i\xi_k \mathcal{F}T \,, \quad \partial_{\xi_k} \mathcal{F}T = \mathcal{F}(-ix_k T)}$$

$\mathcal{F}$ ECHANGE DERIVATION ET MULTIPLICATION PAR $\pm ix$ ou $\pm i\xi$

$$\boxed{T_n \to T \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N) \Rightarrow \mathcal{F}T_n \to \mathcal{F}T \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)}$$

CAS PARTICULIERS a) si $T = T_f$ avec $f \in L^1(\mathbf{R}^N)$, alors

$$\mathcal{F}T_f = T_{\hat{f}}\,, \quad \text{où } \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}^N} e^{-i\xi\cdot x} f(x)dx$$

Thm (Riemann-Lebesgue): de plus $\hat{f} \in C(\mathbf{R}^N)$ et $\hat{f} \to 0$ à l'∞

b) **Notation:** $e_\xi(x) := e^{i\xi\cdot x}$

$$\boxed{T \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^N) \Rightarrow \mathcal{F}T \in C^\infty(\mathbf{R}^N) \quad \text{avec } \mathcal{F}T(\xi) = \langle T, e_{-\xi}\rangle = O(|\xi|^n)}$$

EXEMPLES: transformée de Fourier des masses de Dirac

a) $\mathcal{F}\delta_0 = 1$ et $\mathcal{F}\delta_a = e^{-i\xi\cdot a}$

b) $\mathcal{F}(\partial^\alpha\delta_0) = (i\xi)^\alpha$ et $\mathcal{F}(\partial^\alpha\delta_a) = (i\xi)^\alpha e^{-i\xi\cdot a}$

Thm. d'inversion de Fourier dans $\mathcal{S}'$: $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N) \to \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$ est un isomorphisme d'inverse donné par la formule

$$\boxed{\mathcal{F}^{-1}T = \frac{1}{(2\pi)^N}\widetilde{\mathcal{F}T}}$$

Notation: $\tilde{S} = S \circ (-Id)$, cad. $\langle \tilde{S}, \phi \rangle = \langle S, x \mapsto \phi(-x) \rangle$

<u>EXEMPLES:</u> transformée de Fourier des polynômes

$$\boxed{\mathcal{F}1 = (2\pi)^N \delta_0\,, \quad \mathcal{F}(x^\alpha) = (2\pi)^N i^{|\alpha|} \partial^\alpha \delta_0}$$

Transformation de Fourier et convolution:

$$T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N) \text{ et } S \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^N) \Rightarrow \mathcal{F}(S \star T) = (\mathcal{F}S)(\mathcal{F}T)$$

$\mathcal{F}$ ECHANGE PRODUIT PONCTUEL ET CONVOLUTION

Thm. de Plancherel:

a) $f \in L^2(\mathbf{R}^N) \subset \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N) \Rightarrow \mathcal{F}f \in L^2(\mathbf{R}^N)$

b) pour tout $f, g \in L^2(\mathbf{R}^N)$, on a

$$(\mathcal{F}f|\mathcal{F}g)_{L^2(\mathbf{R}^N)} = (2\pi)^N (f|g)_{L^2(\mathbf{R}^N)}$$

Transformation de Fourier partielle sur $\mathcal{S}(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N)$:
Soit $\phi = \phi(t,x) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N)$, on définit sa transformée de Fourier partielle en x par la formule

$$\boxed{\mathcal{F}_x\phi(t,\xi) = \int_{\mathbf{R}^N} e^{-i\xi\cdot x}\phi(x)dx}$$

La transformation de Fourier partielle

$$\mathcal{F}_x : \mathcal{S}(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N) \to \mathcal{S}(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_\xi^N)$$

est un isomorphisme continu d'inverse

$$\boxed{\mathcal{F}_x^{-1}\psi(t,x) = \tfrac{1}{(2\pi)^N}\int_{\mathbf{R}^N} e^{+i\xi\cdot x}\psi(t,\xi)dx}$$

Transformation de Fourier partielle sur $\mathcal{S}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}^N_x)$:
Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}^N_x)$, sa transformée de Fourier partielle en x, notée $\mathcal{F}_x\phi \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}^N_\xi)$, est définie par

$$\boxed{\langle \mathcal{F}_x T, \phi \rangle = \langle T, \mathcal{F}_x \phi \rangle \quad \text{pour tout } \phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N)}$$

Inversion de Fourier partielle dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}^N_x)$: la transformation de Fourier partielle

$$\mathcal{F}_x : \mathcal{S}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}^N_x) \to \mathcal{S}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}^N_\xi)$$

est un isomorphisme continu d'inverse donné par

$$\boxed{\mathcal{F}_x^{-1} T = \frac{1}{(2\pi)^N} \mathcal{F}_x T \circ J \quad \text{avec } J : (t, x) \mapsto (t, -x)}$$

Transformation de Fourier: dictionnaire

Dérivation	Multiplication par $i\xi$
Intégrale	Valeur en 0
Convolution	Produit
Régularité	Décroissance à l'infini
Décroissance à l'infini	Régularité

INTRODUCTION A L'ETUDE DES EDP

•Méthode générale pour l'étude des EDP à coefficients constants: notion de solution élémentaire

•Les EDP sont une branche des mathématiques pour laquelle il n'existe pas de théorie générale satisfaisante (contrairement aux EDO): il faut donc étudier séparément des exemples venant (par ex.) de la physique

Opérateurs différentiels: généralités

Notations: $D = (D_1, \ldots, D_N)$ avec $D_k = \frac{1}{i}\partial_k$

Déf: Un opérateur différentiel à coefficients constants sur $\mathbf{R}^N$ est une application linéaire $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^N) \to \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$ de la forme

$$P(D) = \sum_{|\alpha| \le d} b_\alpha D^\alpha \quad \text{où } b_\alpha \in \mathbf{C}$$

Ordre de $P(D)$:=degré du symbole complet de $P(D)$

$$\sigma(P)(\xi) = \sum_{|\alpha| \le d} b_\alpha \xi^\alpha , \qquad \text{symbole complet de } P(D)$$

$$\sigma_d(P)(\xi) = \sum_{|\alpha| = d} b_\alpha \xi^\alpha , \qquad \text{symbole principal de } P(D)$$

où d =ordre de $P(D)$

EXEMPLES FONDAMENTAUX:

a) laplacien sur $\mathbf{R}^N$:

$$\Delta = \sum_{k=1}^{N} \partial_k^2$$

b) d'Alembertien sur $\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N$:

$$\Box_{t,x} = \partial_t^2 - \Delta_x$$

c) opérateur de la chaleur sur $\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N$:

$$\partial_t - \tfrac{1}{2}\Delta_x$$

d) opérateur de Schrödinger sur $\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N$:

$$i\partial_t + \tfrac{1}{2}\Delta_x$$

Solution élémentaire

Déf: Solution élémentaire de $P(D)$ opérateur différentiel à coefficients constants sur $\mathbf{R}^N$ = une distribution $E \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$ t.q.

$$P(D)E = \delta_0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$$

INTERET DE CETTE NOTION: supposons qu'on veuille résoudre l'EDP d'inconnue $f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$:

$$P(D)f = S\,, \quad \text{où } S \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^N) \text{ est donnée}$$

Thm: On obtient une solution par la formule

$$f = E \star S$$

PBMS: est-ce la seule solution? ($\Leftrightarrow$ ker $P(D)$ =?) Régularité de f?

a) utiliser la transformation de Fourier

Prop: Soit $S \in \mathcal{E}'(\mathbf{R})$; une distribution tempérée $f \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$ vérifie

$$P(D)f = S \Leftrightarrow \sigma(P)(\xi)\mathcal{F}f = \mathcal{F}S$$

CAS DE LA SOLUTION ELEMENTAIRE: $S = \delta_0$, donc $\mathcal{F}S = 1$

$$\sigma(P)(\xi)\mathcal{F}E = 1\,, \qquad \text{mais } \frac{1}{\sigma(P)(\xi)} \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)???$$

b) utiliser les symétries de l'opérateur différentiel — cad. les transformations géométriques laissant invariante l'EDP à résoudre

OBSERVATION: a) laplacien invariant par les matrices orthogonales

$$\Delta(f \circ R) = (\Delta f) \circ R\,, \quad R \in O_N(\mathbf{R})$$

b) laplacien des fonctions radiales: pour tout $\phi \in C^\infty(\mathbf{R}_+^*)$

$$\Delta\left[\phi(|x|)\right] = \phi''(|x|) + \tfrac{N-1}{|x|}\phi'(|x|)\,, \quad x \in \mathbf{R}^N \setminus \{0\}$$

Thm: pour $N \geq 3$, une solution élémentaire de Δ sur $\mathbf{R}^N$ est

$$E_N(x) = -\frac{1}{c_N}|x|^{2-N} \qquad \text{où } c_N = (N-2)|\mathbf{S}^{N-1}| = \tfrac{\Gamma(N/2)}{2(N-2)\pi^{N/2}}$$

Pour $N = 1, 2$, des solutions élémentaires de Δ sur $\mathbf{R}^N$ sont

$$E_1(x) = \tfrac{1}{2}|x|\,, \quad E_2(x) = \tfrac{1}{2\pi}\ln|x|$$

LEMME D'UNICITÉ: soit $f \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N)$

$$\boxed{(\partial_t - \tfrac{1}{2}\Delta_x)f = 0 \text{ et } \operatorname{supp}(f) \subset \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N \Rightarrow f = 0}$$

Thm: il existe une unique solution élémentaire E de $\partial_t - \frac{1}{2}\Delta_x$ vérifiant

$$E \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N), \quad \text{et } \operatorname{supp}(E) \subset \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N$$

Elle est donnée par la formule

$$E(t,x) = \frac{\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(t)}{(2\pi t)^{N/2}} e^{-|x|^2/2t}$$

Thm: l'opérateur de Schrödinger $i\partial_t + \frac{1}{2}\Delta_x$ admet une unique solution élémentaire

$$E \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}^N_x) \text{ à support dans } \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N$$

Elle est définie par sa transformée de Fourier partielle en x

$$\hat{E}(t,\xi) = \mathbf{1}_{]0,+\infty[}(t)e^{-\frac{1}{2}it|\xi|^2}$$

ou, de façon équivalente

$$E(t,x) = \frac{\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(t)}{(\sqrt{2\pi it})^N}e^{-|x|^2/2it} := \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(t)}{\left(\sqrt{2\pi(\epsilon+i)t}\right)^N}e^{-\frac{|x|^2}{2(\epsilon+i)t}}$$

où $\sqrt{\ }$ =détermination principale de la racine carrée, et $\lim_{\epsilon\to 0^+}$ est prise au sens de $\mathcal{S}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}^N_x)$

Solution dans $\mathcal{D}'$ d'un problème de Cauchy

PROBLÈME DE CAUCHY: trouver $f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N)$ solution de

$$\begin{cases} \partial_t f + P(D_x)f = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^N) \\ f\big|_{t=0} = f^{in} \end{cases}$$

où $P(D)$ opérateur différentiel sur $\mathbf{R}^N$ et $f^{in} \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$ est donnée.

DIFFICULTÉ: pour $f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N)$, on ne sait pas définir $f\big|_{t=0}$.

IDÉE: voir la donnée initiale comme un terme source localisé en $t = 0$.

•Si $f^{in} \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$, et $f \in C^\infty(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N)$ est solution du problème de Cauchy ci-dessus, alors $F(t,x) = \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+^*}(t) f(t,x)$ vérifie

$$\partial_t F + P(D_x)F = \delta_{t=0} \otimes f^{in} \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N)$$

Déf: une solution au sens des distributions du problème de Cauchy

$$\partial_t f + P(D_x)f = 0 \text{ sur } \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^N , \quad f\big|_{t=0} = f^{in}$$

où $f^{in} \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$ est une distribution $F \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N)$ telle que

$$\boxed{\partial_t F + P(D_x)F = \delta_{t=0} \otimes f^{in} , \quad \text{et } \operatorname{supp}(F) \subset \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N}$$

Prop: si E est solution élémentaire de $\partial_t + P(D_x)$ dans le futur (cad. à support dans $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N$) et $f^{in} \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^N)$, alors

$$E \star (\delta_{t=0} \otimes f^{in})$$

est solution au sens des distributions de

$$\partial_t f + P(D_x)f = 0 \text{ sur } \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^N , \quad f\big|_{t=0} = f^{in}$$