Distributions, analyse de Fourier, EDP
Amphi no. 8

•Méthode générale pour l'étude des EDP à coefficients constants: notion de solution élémentaire

•Les EDP sont une branche des mathématiques pour laquelle il n'existe pas de théorie générale satisfaisante (contrairement aux EDO): il faut donc étudier séparément des exemples venant (par ex.) de la physique

Opérateurs différentiels: généralités

Notations: $D = (D_1, \dots, D_N)$ avec $D_k = \frac{1}{i}\partial_k$
Déf: Un opérateur différentiel à coefficients constants sur $\mathbf{R}^N$ est une application linéaire $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^N) \to \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$ de la forme

$$P(D) = \sum_{|\alpha| \le d} b_\alpha D^\alpha \quad \text{où } b_\alpha \in \mathbf{C}$$

Ordre de $P(D)$:=degré du symbole complet de $P(D)$

$$\sigma(P)(\xi) = \sum_{|\alpha| \le d} b_\alpha \xi^\alpha , \qquad \text{symbole complet de } P(D)$$

$$\sigma_d(P)(\xi) = \sum_{|\alpha| = d} b_\alpha \xi^\alpha , \qquad \text{symbole principal de } P(D)$$

où d =ordre de $P(D)$

EXEMPLES FONDAMENTAUX:

a) laplacien sur $\mathbf{R}^N$:

$$\Delta = \sum_{k=1}^{N} \partial_k^2$$

b) d'Alembertien sur $\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N$:

$$\Box_{t,x} = \partial_t^2 - \Delta_x$$

c) opérateur de la chaleur sur $\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N$:

$$\partial_t - \tfrac{1}{2}\Delta_x$$

d) opérateur de Schrödinger sur $\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N$:

$$i\partial_t + \tfrac{1}{2}\Delta_x$$

Solution élémentaire

Déf: Solution élémentaire de $P(D)$ opérateur différentiel à coefficients constants sur $\mathbf{R}^N$ = une distribution $E \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$ t.q.

$$P(D)E = \delta_0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$$

<u>INTERET DE CETTE NOTION:</u> supposons qu'on veuille résoudre l'EDP d'inconnue $f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$:

$$P(D)f = S\,, \quad \text{où } S \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^N) \text{ est donnée}$$

Thm: On obtient une solution par la formule

$$f = E \star S$$

<u>PBMS:</u> est-ce la seule solution? ($\Leftrightarrow \ker P(D) = ?$) Régularité de f?

a) utiliser la transformation de Fourier

Prop: Soit $S \in \mathcal{E}'(\mathbf{R})$; une distribution tempérée $f \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$ vérifie

$$P(D)f = S \Leftrightarrow \sigma(P)(\xi)\mathcal{F}f = \mathcal{F}S$$

CAS DE LA SOLUTION ELEMENTAIRE: $S = \delta_0$, donc $\mathcal{F}S = 1$

$$\sigma(P)(\xi)\mathcal{F}E = 1\,, \qquad \text{mais } \frac{1}{\sigma(P)(\xi)} \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)???$$

b) utiliser les symétries de l'opérateur différentiel — cad. les transformations géométriques laissant invariante l'EDP à résoudre

OBSERVATION: a) laplacien invariant par les matrices orthogonales

$$\Delta(f \circ R) = (\Delta f) \circ R\,, \quad R \in O_N(\mathbf{R})$$

b) laplacien des fonctions radiales: pour tout $\phi \in C^\infty(\mathbf{R}_+^*)$

$$\Delta\left[\phi(|x|)\right] = \phi''(|x|) + \tfrac{N-1}{|x|}\phi'(|x|)\,, \quad x \in \mathbf{R}^N \setminus \{0\}$$

Thm: pour $N \geq 3$, une solution élémentaire de Δ sur $\mathbf{R}^N$ est

$$E_N(x) = -\frac{1}{c_N}|x|^{2-N} \qquad \text{où } c_N = (N-2)|\mathbf{S}^{N-1}| = \tfrac{\Gamma(N/2)}{2(N-2)\pi^{N/2}}$$

Pour $N = 1, 2$, des solutions élémentaires de Δ sur $\mathbf{R}^N$ sont

$$E_1(x) = \tfrac{1}{2}|x|\,, \quad E_2(x) = \tfrac{1}{2\pi}\ln|x|$$

LEMME D'UNICITÉ: soit $f \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N)$

$$\boxed{(\partial_t - \tfrac{1}{2}\Delta_x)f = 0 \text{ et } \mathrm{supp}(f) \subset \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N \Rightarrow f = 0}$$

Thm: il existe une unique solution élémentaire E de $\partial_t - \frac{1}{2}\Delta_x$ vérifiant

$$E \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^N)\,, \quad \text{et } \mathrm{supp}(E) \subset \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N$$

Elle est donnée par la formule

$$E(t,x) = \frac{\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(t)}{(2\pi t)^{N/2}} e^{-|x|^2/2t}$$

Solution élémentaire de l'opérateur de Schrödinger

Thm: il existe une unique solution élémentaire E de $i\partial_t + \frac{1}{2}\Delta_x$ vérifiant $E \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}^N_x)$ et $\mathrm{supp}(E) \subset \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N$.

Elle est définie par sa transformée de Fourier partielle en x

$$\hat{E}(t,\xi) = \mathbf{1}_{]0,+\infty[}(t) e^{-\frac{1}{2}it|\xi|^2}$$

ou, de façon équivalente

$$E(t,x) = \frac{\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(t)}{(\sqrt{2\pi i t})^N} e^{-|x|^2/2it} := \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(t)}{\left(\sqrt{2\pi(\epsilon+i)t}\right)^N} e^{-\frac{|x|^2}{2(\epsilon+i)t}}$$

où $\sqrt{\ }$ =détermination principale de la racine carrée, et $\lim_{\epsilon\to 0^+}$ est prise au sens de $\mathcal{S}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}^N_x)$

Equation de Laplace / de Poisson (Chap. 8)

Inconnue: une fonction (ou distribution) f sur un ouvert Ω de $\mathbf{R}^N$

Equation de Laplace	$-\Delta f = 0$	
Equation de Poisson	$-\Delta f = S$	avec S donnée

L'EDP ne suffit pas à déterminer f; il faut y ajouter des conditions au bord

Exemples classiques:

a) $\Omega = \mathbf{R}^N$ et on impose que $f \to 0$ à l'infini
b) Ω est un ouvert à bord de classe C^1 et on impose la

$$\text{Condition de Dirichlet} \quad f\big|_{\partial\Omega} = b$$

$$\text{Condition de Neuman} \quad \frac{\partial f}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0$$

Problème: résoudre l'équation de Poisson

$$\boxed{-\Delta f = S \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)\,, \qquad \text{où } S \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^N) \text{ est donnée}}$$

•On sait qu'il EXISTE UNE solution $f = E \star S \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$

•<u>Unicité?</u> $\Leftrightarrow$ déterminer $\ker \Delta$

•<u>Régularité?</u> $S \in C^\infty(\Omega) \Rightarrow f \in C^\infty(\Omega)$?

Déf: Soient Ω ouvert de $\mathbf{R}^N$ et $f \in C^2(\Omega)$

$$\boxed{f \text{ harmonique dans } \Omega \Leftrightarrow \Delta f = 0}$$

Ex: $N = 2$, $\Omega \subset \mathbf{R}^2 \simeq \mathbf{C}$ ouvert;

$$u \text{ holomorphe sur } \Omega \Rightarrow \Re(u) \text{ et } \Im(u) \text{ harmoniques dans } \Omega$$

Propriété de la moyenne: Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ ouvert. Une fonction $f \in C^2(\Omega)$ est harmonique dans Ω ssi

$$\boxed{f(x_0) = \frac{1}{|\mathbf{S}^{N-1}|} \int_{\mathbf{S}^{N-1}} f(x_0 + r\omega) d\sigma(\omega)}$$

pour tout $x_0 \in \Omega$ et tout $r > 0$ t.q. $\overline{B(x_0, r)} \subset \Omega$, où $d\sigma =$ élément de surface sur $\mathbf{S}^{N-1}$.

Thm. de Liouville: toute fonction harmonique sur $\mathbf{R}^N$ tendant vers 0 à l'infini est identiquement nulle sur $\mathbf{R}^N$

Principe du maximum fort: soit Ω ouvert connexe de $\mathbf{R}^N$ et $f \in C^2(\Omega; \mathbf{R})$ harmonique. S'il existe $a \in \Omega$ t.q.

$$\boxed{f(x) \leq f(a) \text{ pour tout } x \in \Omega \Rightarrow f \text{ est constante sur } \Omega}$$

Application: soient $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ ouvert borné et $f \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$.

$$\boxed{f \text{ harmonique dans } \Omega \Rightarrow \sup_{x \in \Omega} f(x) = \max_{x \in \partial\Omega} f(x)}$$

Variante de la pté de la moyenne: soient $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ ouvert et $f \in C^2(\Omega)$ harmonique. Alors, pour tout $x_0 \in \Omega$, tout $r > 0$ t.q. $\overline{B(x_0, r)} \subset \Omega$, et toute fonction continue $\psi \in C(\mathbf{R}_+)$

$$\boxed{f(x_0) \int_{|y| \leq r} \psi(|y|) dy = \int_{|y| \leq r} f(x_0 + y) \psi(|y|) dy}$$

Régularité des distributions harmoniques: soit $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ ouvert

$$\boxed{T \in \mathcal{D}'(\Omega) \text{ et } \Delta T = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \Rightarrow T \in C^\infty(\Omega)}$$

Cas $\Omega = \mathbf{R}^N$: soit $\zeta_\epsilon \equiv \zeta_\epsilon(|x|)$ suite régularisante radiale dans $\mathbf{R}^N$

a) $\Delta(\zeta_\epsilon \star T) = \zeta_\epsilon \star \Delta T = 0$, donc $\zeta_\epsilon \star T$ fonction harmonique C^∞ $\Rightarrow \zeta_\epsilon \star T = \zeta_1 \star (\zeta_\epsilon \star T)$

b) pour $\epsilon \to 0$, on a $T = \zeta_1 \star T$ donc $T \in C^\infty(\mathbf{R}^2)$

Structure des fonctions harmoniques dans $\mathbf{R}^N$

Thm: Toute distribution TEMPEREE harmonique sur $\mathbf{R}^N$ est un polynôme harmonique

Dém: si $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$ et $\Delta T = 0$, alors $\mathcal{F}(\Delta T) = -|\xi|^2 \mathcal{F} T = 0$

Donc $\mathrm{supp}(\mathcal{F}T) \subset \{0\}$, ce qui entraîne que

$$\mathcal{F}T = \sum_{finie} \lambda_\alpha \partial^\alpha \delta_0 \Rightarrow T = \frac{1}{(2\pi)^N} \sum_{finie} (-i)^{|\alpha|} x^\alpha$$

•Attention: dans cet énoncé, le mot “tempérée" est essentiel. Il existe des fonctions harmoniques sur $\mathbf{R}^2$ qui NE SONT PAS des polynômes: par exemple

$$f(x,y) = e^x \cos y (= \Re(e^z)) \text{ et } g(x,y) = e^x \sin y (= \Im(e^z))$$

L'équation de Poisson dans $\mathbf{R}^N$

Thm: Soit $N \geq 3$.
a) pour tout $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$

$$\Delta T \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^N) \Rightarrow T\big|_{\mathrm{supp}(\Delta T)^c} \in C^\infty(\mathrm{supp}(\Delta T)^c)$$

b) pour tout $S \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^N)$, il existe une solution unique $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$ de l'équation de Poisson

$$\left\{ \begin{array}{lll} -\Delta T & = S & \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N) \\ T(x) & \to 0 & \quad \text{pour } |x| \to \infty \end{array} \right.$$

Cette solution est donnée par la formule

$$T = E_N \star S\,, \qquad \text{où } E_N = \frac{1}{(N-2)|\mathbf{S}^{N-1}|}|x|^{2-N}$$

Thm:

soient $N \geq 3$, un ouvert $\Omega \subset \mathbf{R}^N$, et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

$$\boxed{\Delta T \in C^\infty(\Omega) \Rightarrow T \in C^\infty(\Omega)}$$

Thm. de régularisation elliptique

$$\boxed{T \text{ et } \Delta T \in L^2(\mathbf{R}^N) \Rightarrow \partial_{x_k}\partial_{x_l} T \in L^2(\mathbf{R}^N) \text{ pour } k, l = 1, \ldots, N}$$

Dém: sachant que $T \in L^2(\mathbf{R}^N) \subset \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$ et $\Delta T = S \in L^2(\mathbf{R}^N)$, en appliquant le thm. de Plancherel, on trouve que

$$|\xi|^2 \mathcal{F}T = -\mathcal{F}S \in L^2(\mathbf{R}^N) \Rightarrow -\xi_k \xi_l \mathcal{F}T = \mathcal{F}(\partial_{x_k}\partial_{x_l} T) \in L^2(\mathbf{R}^N)$$

Pour $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ ouvert et $m \in \mathbf{N}$, on note

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \,|\, \partial^\alpha u \in L^2(\Omega) \text{ pour } |\alpha| \leq m\}$$

C'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire hermitien

$$(u|v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega \overline{\partial^\alpha u(x)} \partial^\alpha v(x) dx$$

Analogue hilbertien de $C^m(\Omega)$ en remplaçant $C(\Omega)$ par $L^2(\Omega)$

•Le résultat de régularisation elliptique ci-dessus signifie que

$$\boxed{T \text{ et } \Delta T \in L^2(\mathbf{R}^N) \Rightarrow T \in H^2(\mathbf{R}^N)}$$