**MAT431 – Distributions, Fourier et Systèmes Dynamiques — Année 2012/2013**

**Feuille d'exercices no. 9**

**Exercice 1.** Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels et les formes linéaires sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ définies par:

$$T : \phi \mapsto \sum_{n\geq 1} a_n \phi(1/n) \text{ et } S : \phi \mapsto \sum_{n\geq 1} a_n \phi^{(n)}.$$

(i) Montrer que $S$ et $T$ sont des distributions sur $\mathbb{R}_+^*$.
(ii) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes:

1. $\exists u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tel que $T = u|]0, \infty[$.
2. $\exists \ell \geq 0$ tel que $a_n = \mathcal{O}(n^\ell)$ pour $n \to \infty$.

(iii) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes:

1. $\exists v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tel que $S = v|]0, \infty[$.
2. $\exists N \geq 0$ tel que $a_n = 0$ pour tout $n \geq N$.

**Exercice 2.** Soit $f \in L^1_{loc}(]0, \infty[)$ avec $f \geq 0$ p.p. Montrer que $f$ se prolonge en une distribution sur $\mathbb{R}$ si et seulement s'il existe $\ell \geq 0$ tel que $\int_\epsilon^1 f(x)\, dx = \mathcal{O}(\epsilon^{-\ell})$ quand $\epsilon \to 0$.

**Exercice 3.** Démontrer que la relation suivante définit une distribution $T$ sur $\mathbb{R}^2$:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2), \quad \langle T, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{\{|x|,|y|>\varepsilon\}} \frac{\varphi(x, y)}{xy}\, dx\, dy.$$

Démontrer que $T = \mathrm{vp}(1/x) \otimes \mathrm{vp}(1/y)$. Quel est l'ordre de $T$?

**Exercice 4.** (i) Soit $T$ une distribution sur $\mathbb{R}^d$ telle que, pour tout multiindice $\alpha$ de longueur $p+1$, $\partial^\alpha T = 0$. Démontrer que $T$ est définie par une fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à $p$.
(ii) Soit $P$ un polynôme à $d$ variables et $T$ une distribution à support compact. Démontrer que $T \star P$ est un polynôme.

**Exercice 5.** Calculer la transformée de Fourier des fonctions suivantes : (i) $1_{[a,b]}(x)$ $(x \in \mathbb{R})$, (ii) $e^{-|x|}$ $(x \in \mathbb{R})$, (iii) $(1+x^2)^{-1}$ $(x \in \mathbb{R})$, (iv) $e^{-x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$, (v) $e^{-x^2}/(1+y^2)$ $((x, y) \in \mathbb{R}^2)$,(vi) $\exp -Ax \cdot x$ ($A$ matrice $n \times n$ symétrique définie positive, $x \in \mathbb{R}^n$).

**Exercice 6.** Trouver toutes les fonctions $f \in L^1(\mathbb{R})$ vérifiant $f * f = f$.

**Exercice 7.** Soit $\mathcal{T} = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : \lim_{|x|\to\infty} |x|^n f(x) = 0$ pour tout entier $n\}$. La transformée de Fourier envoie-t-elle $\mathcal{T}$ dans lui-même?

**Exercice 8.**
(i) Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ à valeurs complexes. Montrer

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2\, dx \int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2\, d\xi \geq (2\pi) \left( \int_{\mathbb{R}} x\, Re\left(\bar{f}(x) f'(x)\right)\, dx \right)^2$$

(ii) En déduire:

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 \, dx \int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2 \, d\xi \geq (\pi/2) \left( \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, dx \right)^2$$

(iii) Soit $\bar{x}, \bar{\xi} \in \mathbb{R}$ et supposons $\int |f(x)|^2 dx = 1$. Calculer la borne inférieure suivante (minimisation sur $f, \bar{x}, \bar{\xi}$):

$$\inf \int_{\mathbb{R}} (x - \bar{x})^2 |f(x)|^2 dx \int_{\mathbb{R}} (\xi - \bar{\xi})^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

On pourra considérer le cas où $f$ est une gaussienne.
Comment s'interprète le résultat de ce calcul dans le cadre de la mécanique quantique?

**Exercice 9.** Soit $\tau_a : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ défini par $(\tau_a f)(x) = f(x - a)$. Montrer que si $E \subset \mathbb{R}$ est mesurable alors $M_E = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \hat{f}_{|E} = 0\}$ vérifie $\tau_a(M_E) \subset M_E$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. Etudier une réciproque. *Indications:* Considérer $\hat{M} = \{\hat{f} : f \in M\}$ et $P : L^2(\mathbb{R}) \to \hat{M}$ la projection orthogonale et montrer que pour tous $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, $(f - Pf) \cdot \overline{Pg} = 0$ puis en déduire que $f \cdot \overline{Pg} = \overline{g} \cdot Pf$ et conclure.

**Exercice 10.** Déterminer parmi les fonctions suivantes celles qui définissent une distribution tempérée sur $\mathbb{R}$: (i) $e^x$, (ii) $e^x \cos(e^x)$. Montrer que pour tout entier $n$, $\exp\left(x^n + ie^{x^n}\right)$ définit bien une distribution tempérée. *Indication:* on pourra faire un changement de variable bien choisi suivi d'une intégration par partie.

**Exercice 11.** Calculer la transformée de Fourier des distributions tempérées suivantes ($k \in \mathbb{N}$): (i) $x^k e^{ix}$, (ii) $1_{x>0}$, (iii) $x^2/(1 + x^2)$, (iv) $e^{ix^2/2}$ ($x \in \mathbb{R}$ — on pourra introduire une équation différentielle en $\hat{f}$ puis utiliser une fonction test bien choisie), (v) $\mathrm{vp}(1/x)$, (vi) $|x|$.

**Exercice 12.** Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\hat{f}$ pour que $u - u * f = f$ possède une solution $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

**Exercice 13.** Pour $\lambda > 0$, le peigne de Dirac est $W_\lambda = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{\lambda k}$. Montrer que les distributions $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ vérifiant

$$(\delta_\lambda - \delta_0) * u = 0 \quad \text{et} \quad (e^{2i\pi x/\lambda} - 1) \cdot u = 0$$

sont exactement les multiples de $W_\lambda$. En déduire que $\widehat{W_\lambda} = C(\lambda) W_{2\pi/\lambda}$. En calculant $\langle W_\lambda, \phi \rangle$ pour $\phi$ une gaussienne bien choisie calculer $C(\lambda)$. Retrouver la formule sommatoire de Poisson: pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)$$

**Exercice 14.** Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $\lambda > 0$. Montrer que les distributions $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ telles que $u^{(4)} + \lambda u = f$ satisfont $u^{(s)} \in L^2(\mathbb{R})$ pour $0 \leq s \leq 4$.

**Exercice 15.** Calculer la transformée de Fourier de la mesure de surface de la sphère de rayon $R > 0$ de $\mathbb{R}^3$.

**Exercice 16.** Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ avec $f(x) = 1/x + \mathcal{O}(x^{-2})$ quand $x \to \infty$. Montrer que $\hat{f}$ est continue partout sauf en zéro et qu'elle y admet une limite à droite et une limite à gauche. *Indication:* On pourra considérer une distribution dont la restriction à un voisinage de l'infini coincide avec $1/x$.

**Exercice 17.** Soit $u$ une distribution sur $\mathbb{R}^n$ telle que $\Delta u$ est continue. Montrer que $u$ est elle-même continue. *Indication:* montrer que $u - (\psi E) * (\Delta u)$ est $C^\infty$ pour $E$ solution de $\Delta E = \delta_0$ et $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ avec $\psi = 1$ au voisinage de l'origine.

**Exercice 18.** Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ avec $\sup |f| < \infty$ et $\hat{f}(x) = 0$ pour $|x| < 1$. Soit $u$ une primitive de $f$. Montrer que $u$ est bornée. Déterminer le support de $\hat{u}$.

**Exercice 19.** Soit $\mathbb{R}^N_+ := \{x \in \mathbb{R}^N : x_N > 0\}$. Soit $f \in C(\overline{\mathbb{R}^N_+})$ harmonique. Définissons $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ par: $F(x) = f(x)$ si $x_N > 0$ et $F(x) = -f(x_1, \ldots, x_{N-1}, -x_N)$ sinon (extension par imparité par rapport à la dernière variable).
(i) Montrer que $F$ définit une distribution sur $\mathbb{R}^N$ et calculer $\Delta F$ au sens des distributions.
(ii) Supposons $N \geq 3$. Soit $g \in C_c(\mathbb{R}^{N-1})$. Enoncer et démontrer un résultat d'existence et d'unicité pour le problème de Dirichlet:

$$\Delta f = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^N_+ \text{ et } f|_{x_N=0} = g.$$

On prendra soin de préciser le sens de la condition de Dirichlet $f|_{x_N=0} = g$.

**Exercice 20.**
(i) Calculer pour tout $r \in [0, 1[$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$, $P_r(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in\theta}$. Montrer que ceci est de signe constant, à préciser.
(ii) Pour tout $f \in L^1([-\pi, \pi])$, on pose: $F(re^{i\theta}) = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f(t)\, dt$ pour tout $re^{i\theta}$ dans le disque unité ouvert $U$. Montrer que $F$ est $C^2$ et $\Delta F = 0$ dans $U$. *Indication:* calcul direct ou fonction holomorphe bien choisie.
(iii) Comportement de $F(re^{i\theta})$ pour $r \to 1^-$, $\theta$ fixé.
(iv) Même question si $f$ est continue et $2\pi$-périodique
(v) En déduire un énoncé portant sur la résolution du problème de Dirichlet suivant:

$$\Delta F = 0 \text{ dans } U \text{ et } F|\partial U = f$$

On prendra soin de préciser le sens de la condition au bord.