MAT431 — Distributions, analyse de Fourier et EDP

Feuille d'exercices n°7 **2012-2013**

Exercice 1. Montrer qu'il n'existe pas de distribution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ dont la restriction à $\mathbb{R} \setminus 0$ soit donnée par la fonction $e^{1/x}$. (On pourra considérer une fonction $\phi \in \mathcal{D}$ positive et à support dans $[1/2, 1]$ et étudier $\langle u, \phi(nx) \rangle$).

Exercice 2.
(i) Soit μ une mesure positive borélienne sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\mu(\mathbb{R}) = 1$. Montrer que la fonction f définie par :

$$f(x) = \mu(]-\infty, x[)$$

est positive, croissante, vérifie $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$, et que sa dérivée au sens des distributions est $f' = \mu$.
(ii) Soit f une fonction positive, croissante, vérifiant $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$. Montrer que sa dérivée au sens des distributions est une mesure borélienne positive sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3. (i) Calculer une primitive de $\frac{1}{x+i\varepsilon}$.
(ii) Montrer que l'on définit une distribution sur $\mathbb{R}$ en posant

$$\frac{1}{x+i0} := \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \frac{1}{x+i\varepsilon}$$

et l'exprimer à l'aide de ditributions usuelles.
(iii) Calculer $\dfrac{1}{x-i0} := \lim\limits_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \dfrac{1}{x-i\varepsilon}$. En déduire, au sens des distributions :

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \frac{\varepsilon}{\pi(x^2+\varepsilon^2)}.$$

Exercice 4(*). Calculer la limite des suites de distributions sur $\mathbb{R}$ définies par les fonctions suivantes :

$$T_n(x) = \sin(nx) \quad ; \quad T_n(x) = \frac{\sin(nx)}{x} \quad ; \quad T_n(x) = n \sin(nx) \mathbf{1}_{x \geq 0}$$

Exercice 5. Etudier le développement limité pour $\epsilon \to 0$ de

$$U_\epsilon(\phi) = \iint_{x^2+y^2 \geq \epsilon^2} \phi(x,y)(x^2+y^2)^{-3/2}$$

pour $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. En déduire une distribution sur $\mathbb{R}^2$ dont la restriction à $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ soit donnée par la fonction $(x^2+y^2)^{-3/2}$.

Exercice 6(*). Parties finies de Hadamard (pseudofonctions, 1932)
(i) Soit $\alpha < -1$ un réel tel que $|\alpha| \notin \mathbb{N}$. montrer que, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on peut écrire

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} x^{\alpha}\varphi(x)dx = P_{\varphi}(\varepsilon) + R_{\varphi}(\varepsilon)$$

où $P_{\varphi}(\varepsilon)$ est une combinaison linéaire de puissances strictement négatives de ε et où $R_{\varphi}(\varepsilon)$ admet une limite lorsque ε tend vers 0.
(ii) Montrer que la formule

$$\langle \mathrm{pf}(x_+^{\alpha}), \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} R_{\varphi}(\varepsilon)$$

définit une distribution sur $\mathbb{R}$.
(iii) Calculer les distributions $x\mathrm{pf}(x_+^{\alpha})$ et $\frac{d}{dx}\mathrm{pf}(x_+^{\alpha})$.
(iv) Adapter les résultats précédents au cas α entier négatif.

Exercice 7. Distributions homogènes
Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on pose $\varphi_{\lambda}(x) = \varphi(\frac{x}{\lambda})$.
Pour $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, on note u_{λ} la distribution définie par $\langle u_{\lambda}, \varphi\rangle := |\lambda|^d \langle u, \varphi_{\frac{1}{\lambda}}\rangle$.
On dit que u est **homogène de degré** k si pour tout $\lambda > 0$, on a $u_{\lambda} = \lambda^{-k}u$.
(i) Montrer que si u est définie par une fonction localement intégrable f, alors u est homogène de degré k si et seulement si $f(\lambda x) = \lambda^k f(x)$ presque partout, $\forall \lambda > 0$.
(ii) Montrer que δ_0 est homogène de degré $-d$ dans $\mathbb{R}^d$. Montrer que dans $\mathbb{R}$, vp est homogène de degré -1 et $\mathrm{pf}(x_+^{\alpha})$ est homogène de degré α si $\alpha \notin -\mathbb{N}$.
(iii) Montrer que si $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ est homogène de degré k, alors $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ est homogène de degré k–1.
(iv) Montrer que les distributions homogènes de degrés distincts sont linéairement indépendantes.
(v) Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, $\lambda, \lambda_0 \in \mathbb{R}_+^*$, $\lambda \neq \lambda_0$ et $\psi_{\lambda}(x) = \frac{\varphi_{\frac{1}{\lambda}}(x) - \varphi_{\frac{1}{\lambda_0}}(x)}{\lambda - \lambda_0}$. Montrer que quand $\lambda \to \lambda_0$, les ψ_{λ} convergent dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Quelle est la limite ?
(vi) Montrer que $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ est homogène de degré k si et seulement si

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = ku.$$

(vii) Sur $\mathbb{R}$, quelles sont les distributions homogènes de degré 0 ? de degré -1 ?

Exercice 8(*). Division par x dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$
(i) Soit $\varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ vérifiant $\varphi(0) = 0$. Montrer que $\frac{\varphi(x)}{x} \in C^{\infty}(\mathbb{R})$.
(ii) Montrer que pour toute distribution $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, il existe une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vérifiant $xT = S$.
(iii) Résoudre dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ les équations :

$$xT = 1 \quad ; \quad xT = \delta_0 \quad ; \quad xT = \mathrm{vp}(\frac{1}{x}) \quad ; \quad xT = \mathrm{pf}(x_+^{\alpha}) \ (\alpha < -1)$$

Exercice 9(*). Résoudre dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'équation $xu' + u = 0$.

Exercice 10(*). On note (x, y) les coordonnées dans $\mathbb{R}^2$.
(i) Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ vérifiant $\dfrac{\partial T}{\partial x} = 0$. Montrer qu'il existe une distribution $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ on ait

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle S, \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y) dx \rangle.$$

(ii) Montrer que si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ vérifie $\dfrac{\partial T}{\partial x} = \dfrac{\partial T}{\partial y} = 0$, alors T est une constante.
(iii) Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ une distribution telle que $\dfrac{\partial T}{\partial x} \in C^0(\mathbb{R}^2)$ et $\dfrac{\partial T}{\partial y} \in C^0(\mathbb{R}^2)$. Montrer que T est une fonction de classe C^1.
(iv) Généraliser les résultats précédents au cas de $\mathbb{R}^d$.

Exercice 11(**). Soit $\mathbb{S}^{d-1}$ la sphère de centre 0, de rayon 1 dans $\mathbb{R}^d$. On note $d\sigma$ sa mesure superficielle. Soit $B(0, R)$ la boule de centre 0 et de rayon R.

Pour $x = (x_1, x_2, \cdots, x_d) \neq 0$, on pose $|x| = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{\frac{1}{2}}$ et $\sigma = \frac{x}{|x|}$.
(i) Montrer que pour tout $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, on a :

$$\int_{B(0,R)\setminus B(0,\epsilon)} f(x) dx = \int_{\epsilon}^{R} r^{d-1} (\int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(r\sigma) d\sigma) dr$$

(ii) Soit $d = 2$. On note $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}$. Soit $E = \frac{1}{2\pi} \log |x|$.
En utilisant les fonctions f_ε, $\varepsilon > 0$ définies par

$$f_\varepsilon = \begin{cases} \log |x| & \text{si } \ |x| \geq \varepsilon \\ \log \varepsilon & \text{si } \ |x| < \varepsilon \end{cases}$$

Montrer que $\Delta E = \delta_0$.
(iii) Trouver, pour $\varepsilon > 0$, des réels a_ε et b_ε tels que la fonction g_ε définie par

$$g_\varepsilon = \begin{cases} \log |x| & \text{si } \ |x| \geq \varepsilon \\ a_\varepsilon |x|^2 + b_\varepsilon & \text{si } \ |x| < \varepsilon \end{cases}$$

soit de classe C^1. Retrouver $\Delta E = \delta_0$.
(iv) Soit $d \geq 3$. On pose $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}$.

On note c_d l'aire de $\mathbb{S}^{d-1}$. Soit $E(x) = \dfrac{|x|^{2-d}}{(2-d)c_d}$.
a) Montrer que E est $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$.

b) Montrer que pour tout $j \in \{1, 2, \cdots, d\}$ on a :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} E = \frac{x_j}{c_d |x|^d} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$$

c) Montrer que $\Delta E = \delta_0$.
d) Calculer $c_d = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} d\sigma$. (On rappelle que $\sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$)