MAT431 — Distributions, Fourier et Systèmes dynamiques

Feuille d'exercices n°8 **2012-2013**

Exercice 1. Etudier la convergence dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ des suites, ainsi que l'ordre et le support des limites éventuelles
$n(\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_{-\frac{1}{n}})$; $n^2(\delta_{\frac{1}{n}} + \delta_{-\frac{1}{n}} - 2\delta_{\{0\}})$; $n^3(\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_{-\frac{1}{n}} - 2\delta'_{\{0\}})$; $(\delta_{\{0\}} - \frac{1}{n}\delta_{\frac{1}{n}})''$

Exercice 2. (i) Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f \in C^\infty(\Omega)$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On suppose que $fT = 0$. Montrer que $\mathrm{supp}(T) \subset \{x, f(x) = 0\}$.
(ii) Résoudre dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$
$\sin(x)\ T = 0$; $x^3\ \sin(x)\ T = 0$; $P(x)\ T = 0$, où P est un polynôme ; $\exp(-\frac{1}{x^2})\ T = 0$

Exercice 3. Soit $\chi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ une approximation de l'unité. Étudier la convergence dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ de la suite de distributions définies par $f_n(x, y) = \chi_n(y - x^2)$. Quel est le support de la limite ?

Exercice 4. (i) Soit $\alpha < -1$, α non entier. Déterminer toutes les distributions sur $\mathbb{R}$ qui soient homogènes de degré α.
(ii) Même question pour $\alpha = -m$, m entier ≥ 1.
(On considérera la distribution $\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x^m}\right) := \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\left(\frac{d}{dx}\right)^{m-1} \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$.)

Exercice 5. Montrer que les distributions sur $\mathbb{R}$ possèdent des primitives, bien définies à une constante près.

Exercice 6. (i) On considère l'équation

$$F'' + F' + \frac{5}{4}F = \delta' \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \tag{1}$$

On pose $F = e^{-\frac{t}{2}}G$. Quelle est l'équation satisfaite par G dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$?
(ii) On cherche des solutions sous la forme $G(t) = g(t).H(t)$, où g est une fonction de classe C^2 et H est la fonction de Heaviside. Donner l'équation que doit satisfaire g ainsi que les conditions initiales, puis donner une solution à l'équation (1). Quel est l'ensemble des solutions dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$?

Exercice 7. (i). Trouver une distribution $H \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad (H * f)' = f.$$

H est la fonction de Heaviside. Trouver un équivalent en dimension supérieure.

(ii). Calculer les convolutions suivantes (après en avoir justifié l'existence) :

$$\delta_a * H, \quad \delta' * 1, \quad (x^m\delta_0^{(n)}) * (x^p\delta_0^{(q)}), \quad (\mathbb{1}_{[a,b]} * \mathbb{1}_{[c,d]})'',$$
$$T * \mathbb{1}, \quad T * \exp, \quad \text{où } T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}).$$

(iii). Trouver $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que $u * \mathbb{1}_{[0,1]} = \delta_0$.

Exercice 8. Déterminer toutes les distributions $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telles que

$$\forall(\varphi, \psi) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})^2, \quad \langle u, \varphi \star \psi \rangle = \langle u, \varphi \rangle \langle u, \psi \rangle.$$

Indication: considérer les quantités $\langle u, \varphi \star \psi' \rangle$.

Exercice 9. Soit (a_n) une suite de nombres complexes tels que $|a_n| \leqslant C\, n^p$ pour $n \neq 0$, avec $C \in \mathbb{R}_+^*$ et $p \in \mathbb{N}$.

(i) Montrer que la suite $T_N = \displaystyle\sum_{n=-N}^{n=+N} a_n e^{2i\pi nx}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Sa limite sera représentée par la notation : $T = \displaystyle\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{2i\pi nx}$.

(ii) Montrer que T est périodique (après avoir donné un sens consistant à cette notion). Quelle est sa période ?

(iii) Montrer que $T' = \displaystyle\sum_{-\infty}^{+\infty} (2i\pi n) a_n e^{2i\pi nx}$.

(iv) Soit $S = \displaystyle\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi nx}$. Montrer que $(1 - e^{2i\pi x})S = 0$. En déduire que $S = \lambda \displaystyle\sum_{-\infty}^{+\infty} \delta_{\{n\}}$, avec $\lambda \in \mathbb{C}$.

(v) On considère la fonction $f(x) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}\, e^{2i\pi nx}$. Trouver une équation différentielle simple du second ordre vérifiée par f dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
En déduire que dans $]0, 1[$, $f(x) = \beta(e^{2\pi(x-1/2)} + e^{-2\pi(x-1/2)})$

(vi) Calculer f' et f'' dans $\mathcal{D}'(]-1, 1[)$ et relier β et λ.

(vii) Calculer la constante β en calculant $\int_0^1 f(x)dx$ de deux façons différentes et en déduire la valeur de λ.

(viii) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme complexe. Décrire la distribution $U_P = \displaystyle\sum_{-\infty}^{+\infty} P(n)\, e^{2i\pi nx}$.

(ix) Décrire $V_0 := \displaystyle\sum_{-\infty, n\neq 0}^{+\infty} \frac{1}{n}\, e^{2i\pi nx}$

(x) Soit $V_\alpha = \displaystyle\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n-\alpha}\, e^{2i\pi nx}$, pour $\alpha \notin \mathbb{Z}$. Montrer que V_α est une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. Décrire ses discontinuités.