Exercice I.
1. On part de

$$k(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum k_n e^{ni\theta}.$$

Donc $\int_0^{2\pi} k(\mu) d\mu = k_0$ et

$$\int_0^{2\pi} k(\theta - \mu) f(x, t, \mu) d\mu$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \left(\sum k_n e^{ni(\theta-\mu)} \right) \left(\sum f_n e^{ni\mu} \right) d\mu$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum k_n f_n e^{ni\theta}.$$

En suite on a

$$k_n = \int_0^{2\pi} \sqrt{k}(\theta)(\sqrt{k}(\theta) e^{ni\theta}) d\theta.$$

Donc par Cauchy-Schwarz

$$|k_n| \leq \left(\int_0^{2\pi} k(\theta) d\theta \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{2\pi} |\sqrt{k}(\theta) e^{ni\theta})|^2 d\theta \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq k_0$$

ce qui montre l'inégalité large.

L'inégalité stricte est une conséquence du fait que les fonctions $\sqrt{k}$ et $\sqrt{k} e^{ni\theta}$ ne sont pas proportionelles pour $n \neq 0$.

2 et 3. La hiérarchie en ε s'écrit

$$K(f^0) - f^0 = 0,$$

$$v.\nabla f^0 = \sigma \left(K(f^1) - f^1 \right),$$

puis

$$\partial_t f^p + v.\nabla f^{p+1} = \sigma \left(K(f^{p+2}) - f^{p+2} \right). \quad p \geq 0.$$

Passons en Fourier. Tout d'abord

$$\frac{1}{2\pi} \sum (\frac{k_n}{k_0} - 1) f_n^0 e^{ni\theta} = 0$$

donc tous les coefficients de Fourier de f^0 sont nuls, sauf k_0. Donc f^0 est constante en angle.

Ensuite on a

$$v.\nabla f^0 = \frac{1}{4\pi} e^{i\theta} (\partial_x f_0^0 + i \partial_y f_0^0) + \frac{1}{4\pi} e^{-i\theta} (\partial_x f_0^0 - i \partial_y f_0^0)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sigma \sum (\frac{k_n}{k_0} - 1) f_n^1 e^{ni\theta}.$$

Donc

$$f^1 = \alpha + \frac{1}{\frac{k_1}{k_0} - 1} \frac{\partial_x f_0^0 + i \partial_y f_0^0}{2\sigma} e^{i\theta}$$

$$+ \frac{1}{\frac{k_{-1}}{k_0} - 1} \frac{\partial_x f_0^0 - i \partial_y f_0^0}{2\sigma} e^{-i\theta}.$$

Pour cntinuer les calculs plus simplement on fait $k_1 = k_{-1} = 0$ ce qui correspond par exemple au noyau constant $k = 1$. Alors

$$f^1 = \alpha - \frac{1}{\sigma} v.\nabla f_0^0.$$

La constante $\alpha(x, t)$ est arbitraire.

Enfin on part de l'équation d'évolution de $\partial_t f^0$ que l'on intègre en angle. Donc

$$\partial_t f_0^0 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v.\nabla f^1$$

$$= \sigma \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (K f^2 - f^2) d\theta \equiv 0.$$

Le terme intégral disparait, ce qui est le point important.

Donc on obtient

$$\partial_t f_0^0 - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v.\nabla(\alpha + v.\nabla f_0^0) d\theta = 0.$$

Or

$$v.\nabla(\alpha + v.\nabla f_0^0) = \cos\theta^2 \partial_{xx} f_0^0 + \sin\theta^2 \partial_{xy} f_0^0$$

$$+\cos\theta\sin\theta\partial_{xy}f_0^0+\cos\theta\partial_x\alpha+\sin\theta\partial_y\alpha.$$

D'où l'équation de diffusion

$$\partial_t f_0^0-\frac{1}{2\sigma}\Delta f_0^0=0$$

qui ne dépend pas du noyau k.

En dimension 3, on a sous les mêmes hypothèses

$$\partial_t f_0^0-\frac{1}{3\sigma}\Delta f_0^0=0$$

4. Soit la fonction

$$g=f_0^0+\varepsilon f^1=f_0^0+\frac{\varepsilon}{\sigma}v.\nabla f_0^0.$$

Alors on a

$$\partial_t g+\frac{1}{\varepsilon}v.\nabla g-\frac{\sigma}{\varepsilon^2}(K(g)-g)$$

$$=\left(\partial_t f_0^0+v.\nabla\frac{1}{\sigma}v.\nabla f_0^0\right)$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\left(v.\nabla f_0^0-\sigma(K(f^1)-f^1)\right)$$

$$-\frac{1}{\varepsilon^2}\sigma(K(f_0^0)-f_0^0))$$

$$=\partial_t f_0^0+v.\nabla\frac{1}{\sigma}v.\nabla f_0^0.$$

Soit l'erreur $e=g-f$

$$\partial_t e+\frac{1}{\varepsilon}v.\nabla e-\frac{\sigma}{\varepsilon^2}(K(e)-e)=R\equiv\partial_t f_0^0+v.\nabla\frac{1}{\sigma}v.\nabla f_0^0.$$

On multiplie par e et on intègre

$$\int_x\int_v e^2dxdv+0+\frac{\sigma}{\varepsilon^2}\int_0^T\int_x\int_v(K(e)-e)^2dtdxdv$$

$$=\int_0^T\int_x\int_v Re=\int_0^T\int_x\int_v R(e-K(e))dtdxdv.$$

On a supposé pour simplifier que $e(0)=0$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\frac{\sigma}{\varepsilon^2}\int_0^T\int_x\int_v(K(e)-e)^2dtdxdv\le\int_0^T\int_x\int_v R^2dtdxdv.$$

Donc

$$||e-K(e)||_{t,x,v}^2\le C\varepsilon$$

pour une donnée initiale régulière. Finalement

$$||e(T)||_{x,v}^2\le D\varepsilon$$

donc e tend vers 0 au moins en $\sqrt{\varepsilon}$ dans $L^2(x,v)$ au temps T.

On remarque par ailleurs que toutes les estimations explosent pour $\sigma\to 0$. Ce qui montre que l'approximation de diffusion est (grossièrement ?) fausse dans ce régime.

Exercice II.

1. Le terme $-f$ correspond à une “perte”. Mais le terme $\langle f\rangle$ est une redistribution uniforme, le total étant préservé car

$$\int_v(\langle f\rangle-f)=0.$$

Ces “pertes” et “gains” se produisent lors de l'interaction photon-matière (scattering).

2. σ est l'inverse d'une longueur. Ici

$$\sigma\approx 10^{13}km^{-1}.$$

3. La limite de diffusion est

$$\partial_t f-\frac{c}{\sigma}\partial_{xx}f=0.$$

Donc

$$f(t,x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi tK}}\int_{\mathbb{R}}e^{-\frac{(x-y)^2}{Kt}}f_0(y)dy,\quad K=\frac{c}{\sigma}.$$

On a

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi tK}}\int_{\mathbb{R}}e^{-\frac{(x-y)^2}{Kt}}dy=1,$$

donc les coefficients $\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(x-y)^2}{Kt}}$ peuvent s'interpréter comme des probabilités.

La fonction

$$t\mapsto 2\frac{1}{\sqrt{2\pi tK}}e^{-\frac{R^2}{Kt}}$$

donne alors la probabilité qu'un photon situé au centre du soleil atteigne l'un ou l'autre bord au temps $t>0$.

On a

$$\frac{R^2}{K}\approx(6000)^2\times 10^8/3\approx 10^{14}.$$

Pour que l'exponentielle soit non négligeable, il faut que

$$t \approx 10^{14}.$$

Or un an équivaut à

$$T_{an} = 365 \times 24 \times 3600 \approx 310^7 s.$$

Donc un temps t de 1 million d'année permet d'avoir des termes non négligeables.

L'ordre de grandeur est donné. Cependant on a triché. Il faudrait calculer

$$A = \int_R^\infty 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi t K}} e^{-\frac{R^2}{Kt}} dt$$

et s'assurer des T tels que $A \geq 10^{-1}$ par exemple. A est le nombre de photons qui à l'extérieur du soleil. On a

$$A = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\frac{R}{\sqrt{Kt}}}^\infty e^{-u^2} dt.$$

Posons

$$f(s) = \int_s^\infty e^{-u^2} dt.$$

Alors

$$f(s) \leq \int_s^\infty \frac{u}{A} e^{-u^2} dt = \frac{e^{-A^2}}{2A}.$$

Plus précisément on peut montrer l'encadrement (voir Abramowitz-Stegun)

$$\frac{e^{-s^2}}{s + \sqrt{s^2 + 2}} < f(s) < \frac{e^{-s^2}}{s + \sqrt{s^2 + \frac{4}{\pi}}}, \quad s > 0.$$

Au final la condition s'écrit

$$\frac{R}{\sqrt{Kt}} = A \text{ pour un } A \text{ bien choisi.}$$

Les conclusions sont du même ordre qu'avec l'analyse simplifiée (en trichant).

4. Le temps d'arrivée des photons en vol direct est

$$T = \frac{1.5 \; 10^8 km}{3 \; 10^5 km \; s^{-1}} = 500s \approx 8mn.$$

Les neutrinos produits au coeur du soleil n'interragissent pas avec la matière. Leur temps d'arrivée est aussi de $\approx$ 8 mn.