Transport et diffusion

Cours no. 3 — le 23/I/2013

Problème aux limites, équation de transport stationnaire

Thm Soient Ω ouvert à bord de classe C^1 de $\mathbf{R}^N$, et $v \in \mathbf{R}^N \setminus \{0\}$. Supposons que A est une fonction continue sur $\overline{\Omega}$ telle que

$$A(x) \geq 0 \text{ pour tout } x \in \overline{\Omega}\,.$$

Soient $\lambda > 0$, $Q \in C_b(\Omega)$ et $F_b^- \in L^\infty(\partial\Omega^-)$. Alors le problème aux limites pour l'équation de transport stationnaire

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda F(\lambda, x) + v \cdot \nabla_x F(\lambda, x) + A(x) F(\lambda, x) = Q(x), \quad x \in \Omega, \\ \\ F(\lambda, \cdot)\big|_{\partial\Omega^-} = F_b^-\,, \end{array}\right.$$

admet une unique solution généralisée $F \in L^\infty(\Omega)$.

$\ldots / \ldots$

Cette solution est donnée par la formule

$$F(x) = \int_0^{\tau_x} \exp\left(-\lambda s - \int_0^s A(x - \tau v)d\tau\right) Q(x - sv)ds$$
$$+ \mathbf{1}_{\tau_x < +\infty} F_b^-(x^*) \exp\left(-\lambda \tau_x - \int_0^{\tau_x} A(x - \tau v)d\tau\right)$$

p.p. en $x \in \Omega$. Elle satisfait en outre les estimations suivantes

a) si $Q \geq 0$ sur Ω et $F_b^- \geq 0$ sur $\partial\Omega^-$, alors $F(\lambda, \cdot) \geq 0$ p.p. sur Ω ;

b) de plus

$$\|F(\lambda, \cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \max\left(\frac{1}{\lambda}\|Q\|_{L^\infty(\Omega)}, \|F_b^-\|_{L^\infty(\partial\Omega^-)}\right)$$

Dém : la preuve est basée sur le fait que la **transformation de Laplace**

$$\boxed{f(t,x) \mapsto \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t,x)dt = F(\lambda,x)}$$

transforme le problème d'évolution

$$\begin{cases} (\partial_t + v\cdot\nabla_x)f(t,x) + A(x)f(t,x) = 0 \\ f\Big|_{\mathbf{R}_+\times\partial\Omega^-} = \lambda F_b^- \,, \qquad f\Big|_{t=0} = Q\,, \end{cases}$$

en problème stationnaire

$$\begin{cases} \lambda F(\lambda,x) + v\cdot\nabla_x F(\lambda,x) + A(x)F(\lambda,x) = Q(x), \quad x\in\Omega, \\ \\ F(\lambda,\cdot)\Big|_{\partial\Omega^-} = F_b^-\,, \end{cases}$$

L'équation de Boltzmann linéaire

Inconnue : fonction de distribution $f \equiv f(t,x,v)$

$$\boxed{\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + af = \mathcal{K} f}$$

où

$$\mathcal{K} f(t,x,v) = \int_{\mathbf{R}^N} k(t,x,v,w) f(t,x,w) d\mu(w)$$

avec

$$\begin{cases} a \equiv a(t,x,v) \geq 0 & \text{(taux d'absorption)} \\ k \equiv k(t,x,v,w) \geq 0 & \text{(taux de transition } w \to v\text{)} \end{cases}$$

La notation $d\mu(v)$ désigne

a) l'élément de surface sur la sphère unité $\mathbf{S}^{N-1}$ de $\mathbf{R}^N$ (transfert radiatif)

b) la mesure de Lebesgue sur une couronne sphérique (neutronique)

c) l'élément de surface sur une réunion de sphères concentriques (modèles multigroupe)

d) la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^N$...

Hypothèse : $a \geq 0$ et $k \geq 0$ sont supposées continues et bornées sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_x^N \times \mathbf{R}_v^N$ et sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_x^N \times \mathbf{R}_v^N \times \mathbf{R}_w^N$ respectivement ; de plus

$$\sup_{(t,x,v)\in\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^N} \int_{\mathbf{R}^N} k(t,x,v,w)d\mu(w) < +\infty$$

Equation de Boltzmann linéaire : solutions généralisées

Définition Une fonction $f \equiv f(t,x,v)$ continue bornée sur $]0,T[\times\Omega\times\mathbf{R}^N$ est solution généralisée de l'équation de Boltzmann linéaire

$$\partial_t f + v\cdot\nabla_x f + af = \mathcal{K}f$$

ssi, pour tout $(t,x,v) \in]0,T[\times\Omega\times\mathbf{R}^N$, la fonction

$$s \mapsto f(t+s, x+s, v) \text{ est de classe } C^1 \text{ pour } x+sv\in\Omega$$

et vérifie, pour tout $s\in\mathbf{R}$ t.q. $x+sv\in\Omega$

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{d}{ds}f(t+s,x+sv,v) + a(t+s,x+sv,v)f(t+s,x+sv,v)\\ = \mathcal{K}f(t+s,x+sv,v)\end{aligned}}$$

Equation de Boltzmann linéaire : problème de Cauchy

Thm : soient une donnée initiale $f^{in} \equiv f^{in}(x,v) \in C_b(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N)$ et un terme source $Q \equiv Q(t,x,v) \in C_b([0,T] \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N)$. Alors le problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f + af = \mathcal{K}f + Q\,, \quad t \in]0,T[\,,\ x,v \in \mathbf{R}^N \\ f\Big|_{t=0} = f^{in} \end{array} \right.$$

admet une unique solution généralisée $f \in C_b([0,T] \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N)$

1ère formulation intégrale : pour tout

$$f(t,x,v) = \exp\left(-\int_0^t a(s,x+(s-t)v,v)ds\right) f^{in}(x-tv,v)$$
$$+\int_0^t (\mathcal{K}f+Q)(s,x+(s-t)v,v)\exp\left(-\int_s^t a(\tau,x+(\tau-t)v,v)d\tau\right)ds$$

2ème formulation intégrale :

$$f(t,x,v) = f^{in}(x-tv,v) + \int_0^t (\mathcal{K}f + Q - af)(s, x+(s-t)v, v)ds$$

Dém : La démonstration du théorème ci-dessus est basée sur un argument de point fixe pour la 1ère formulation intégrale, c.a.d. que l'on cherche une fonction f telle que $f = F[f^{in}, Q] + \mathcal{T}f$, en posant

$$F[f^{in},Q](t,x,v) := \exp\left(-\int_0^t a(s,x+(s-t)v,v)ds\right) f^{in}(x-tv,v)$$
$$+ \int_0^t Q(s,x+(s-t)v,v) \exp\left(-\int_s^t a(\tau,x+(\tau-t)v,v)d\tau\right) ds$$

$$\mathcal{T}g(t,x,v) :=$$
$$\int_0^t \mathcal{K}g(s,x+(s-t)v,v) \exp\left(-\int_s^t a(\tau,x+(\tau-t)v,v)d\tau\right) ds$$

par un argument de point fixe dans $C_b([0,T]\times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N)$.

Estimation L^∞ pour le problème de Cauchy

Thm : soient une donnée initiale $f^{in} \equiv f^{in}(x,v) \in C_b(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N)$ et un terme source $Q \equiv Q(t,x,v) \in C_b([0,T] \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N)$. Si on a

$$f^{in} \geq 0 \text{ sur } \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N \text{ et } Q \geq 0 \text{ sur } [0,T] \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$$

la solution généralisée $f \in C_b([0,T] \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N)$ du problème de Cauchy

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f + af = \mathcal{K} f + Q\,, \quad t \in]0,T[\,,\ x,v \in \mathbf{R}^N \\ f\big|_{t=0} = f^{in} \end{array}\right.$$

vérifie

$$f \geq 0 \text{ sur } [0,T] \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N\,.$$

NB : elle vérifie aussi

$$f(t,x,v) \leq (\|f^{in}\|_{L^\infty(\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^N)} + T\|Q\|_{L^\infty([0,T]\times\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^N)})e^{Mt}$$

avec

$$M = \sup_{(t,x,v)\in[0,T]\times\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^N} \int_{\mathbf{R}^N} k(x,v,w)d\mu(w)$$

Insuffisant pour l'approximation par la diffusion — cf. amélioration plus loin

Dém : Utiliser la représentation de la solution généralisée par la formule

$$f = \sum_{n\geq 0} \mathcal{T}^n F[f^{in}, Q]$$

et le fait que $f^{in}, Q \geq 0 \Rightarrow F[f^{in}, Q] \geq 0$ et $g \geq 0 \Rightarrow \mathcal{T} g \geq 0$.

Pour la majoration du NB, utiliser que

$$|\mathcal{T}^n g(t,x,v)| \leq \frac{M^n t^n}{n!}\|g\|_{L^\infty([0,T]\times\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^N)}$$

Corol : soient une donnée initiale $f^{in} \equiv f^{in}(x,v) \in C_b(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N)$ et un terme source $Q \equiv Q(t,x,v) \in C_b([0,T] \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N)$. Alors la solution généralisée $f \in C_b([0,T] \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N)$ du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f + af = \mathcal{K} f + Q \,, \quad t \in]0,T[\,, \; x,v \in \mathbf{R}^N \\ f\Big|_{t=0} = f^{in} \end{cases}$$

vérifie, pour tout $(t,x,v) \in [0,T] \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$

$$f(t,x,v) \leq (\|f^{in}\|_{L^\infty(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N)} + T\|Q\|_{L^\infty([0,T]\times\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^N)})e^{Dt}$$

où

$$D = \sup_{(t,x,v)\in[0,T]\times\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^N} \left(\int_{\mathbf{R}^N} k(t,x,v,w)d\mu(w) - a(t,x,v) \right)_+$$

— avec la notation habituelle $z_+ = \max(z,0)$.

Cas particuliers importants :

1) supposons que l'absorption domine la création de particules, c.a.d.

$$\mathcal{K}1(t,x,v) = \int_{\mathbf{R}^N} k(t,x,v,w)d\mu(w) \le a(t,x,v)$$

Alors, pour tout $(t,x,v) \in [0,T] \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$

$$f(t,x,v) \le \|f^{in}\|_{L^\infty(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N)} + T\|Q\|_{L^\infty([0,T]\times\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^N)}$$

2) **Principe du maximum faible :** si l'absorption domine la création de particules et que de plus $Q = 0$, alors

$$f(t,x,v) \le \|f^{in}\|_{L^\infty(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N)}, \quad (t,x,v) \in [0,T] \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$$

Equation de Boltzmann linéaire : problème aux limites

Soit Ω ouvert convexe borné à bord de classe C^1 de $\mathbf{R}^N$; on note n_x le vecteur normal unitaire au point $x \in \partial\Omega$ pointant vers l'extérieur de Ω

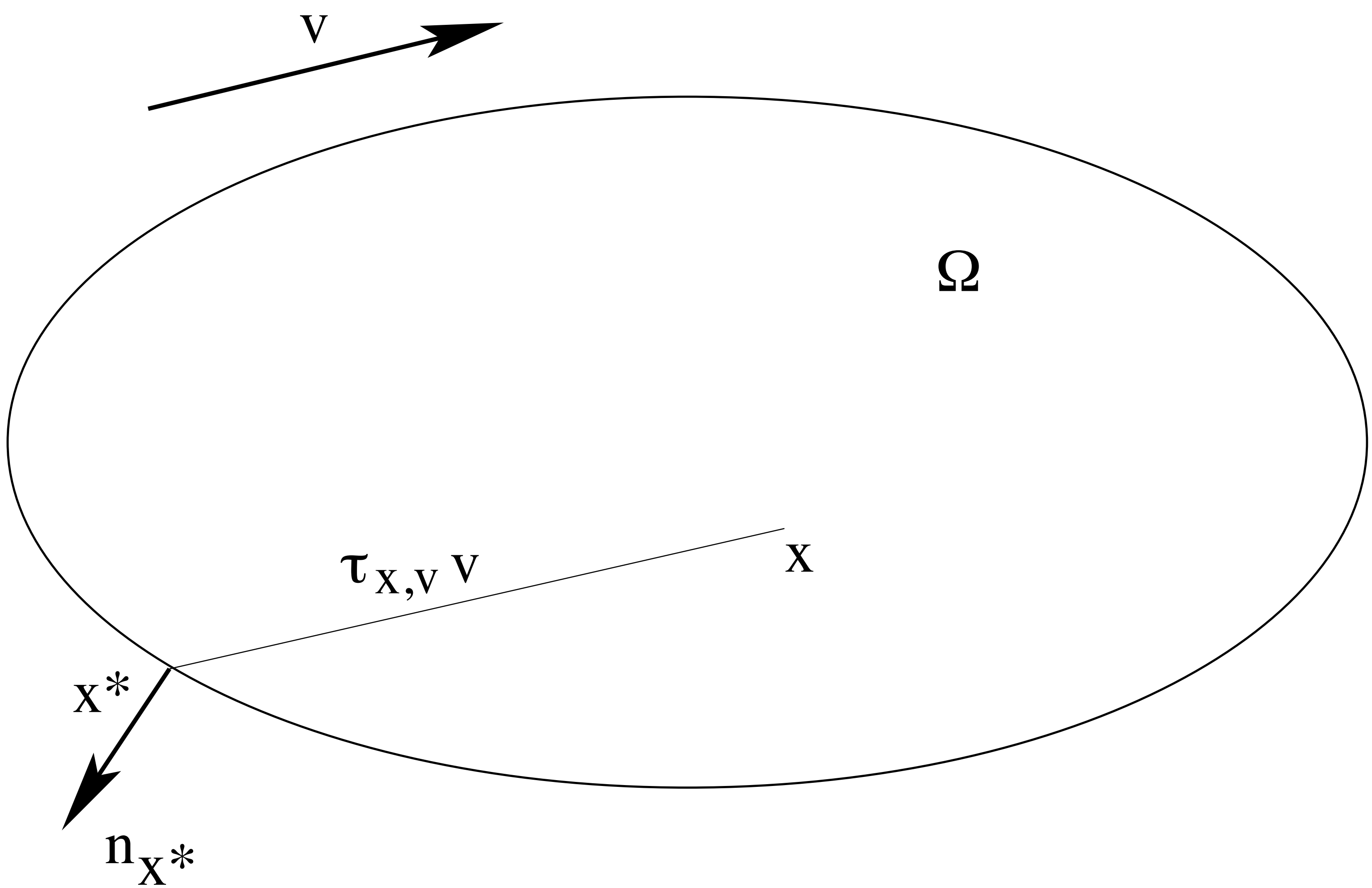
$$\Gamma_+ = \{(x,v) \in \partial\Omega \times \mathbf{R}^N \,|\, v \cdot n_x > 0\}$$
$$\Gamma_- = \{(x,v) \in \partial\Omega \times \mathbf{R}^N \,|\, v \cdot n_x < 0\}$$

Notons $\tau_{x,v}$ le temps de sortie de Ω dans la direction $-v$:

$$\tau_{x,v} = \inf\{t \geq 0 \,|\, x - tv \notin \overline{\Omega}\}$$

Hypothèse : $a \geq 0$ et $k \geq 0$ sont supposées continues et bornées sur $\mathbf{R}_+ \times \overline{\Omega}_x \times \mathbf{R}^N_v$ et sur $\mathbf{R}_+ \times \overline{\Omega}_x \times \mathbf{R}^N_v \times \mathbf{R}^N_w$ respectivement, de plus

$$\sup_{(t,x,v)\in\mathbf{R}_+\times\overline{\Omega}\times\mathbf{R}^N} \int_{\mathbf{R}^N} k(t,x,v,w)d\mu(w) < +\infty$$



Temps de sortie $\tau_{x,v}$, normale extérieure n_{x^*}, point entrant $x^* = x - \tau_{x,v}v$

Thm : Soient des données $f^{in} \in C_b(\overline{\Omega} \times \mathbf{R}^N)$ et $f_b^- \in C_b([0,T] \times \Gamma_-)$ t.q.

$$f_b^-(0,y,v) = f^{in}(y,v) \text{ pour tout } (y,v) \in \Gamma_-$$

et $Q \in C_b([0,T] \times \overline{\Omega} \times \mathbf{R}^N)$. Il existe $f \in C_b([0,T] \times \Omega \times \mathbf{R}^N)$ solution généralisée unique du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f + af = \mathcal{K}f + Q\,, \quad t \in]0,T[\,,\ x \in \Omega\,,\ v \in \mathbf{R}^N \\ f\Big|_{\Gamma_-} = f_b^- \\ f\Big|_{t=0} = f^{in} \end{array} \right.$$

1ère formulation intégrale :

$$f(t,x,v) = \mathbf{1}_{t\le\tau_{x,v}} f^{in}(x-tv,v)\exp\left(-\int_0^t a(s,x+(s-t)v,v)ds\right)$$
$$+\mathbf{1}_{t>\tau_{x,v}} f_b^-(t-\tau_{x,v},x^*,v)\exp\left(-\int_{t-\tau_x}^t a(s,x+(s-t)v,v)ds\right)$$
$$+\int_{(t-\tau_{x,v})_+}^t \exp\left(-\int_s^t a(\tau,x+(\tau-t)v,v)ds\right)$$
$$\times(\mathcal{K}f+Q)(s,x+(s-t)v,v)ds$$

où on rappelle que $x^* = x-\tau_{x,v}v$, et que $z_+ = \max(z,0)$.

$\boxed{\textbf{Estimation } L^\infty \textbf{ pour le problème aux limites}}$

Thm : Soient des données $f^{in} \in C_b(\overline{\Omega} \times \mathbf{R}^N)$, $f_b^- \in C_b([0,T] \times \Gamma_-)$ t.q. $f_b^-\big|_{t=0} = f^{in}\big|_{\Gamma_-}$ et $Q \in C_b([0,T] \times \overline{\Omega} \times \mathbf{R}^N)$, et soit f la solution généralisée unique du problème

$$\begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f + af = \mathcal{K}f + Q\,, \quad t \in]0,T[\,,\ x \in \Omega\,,\ v \in \mathbf{R}^N \\ f\big|_{\Gamma_-} = f_b^- \\ f\big|_{t=0} = f^{in} \end{cases}$$

1) si $f^{in} \geq 0$ sur $\overline{\Omega}$, $f_b^- \geq 0$ sur $[0,T] \times \Gamma_-$, et $Q \geq 0$ sur $[0,T] \times \overline{\Omega} \times \mathbf{R}^N$

alors $f \geq 0$ sur $[0,T] \times \Omega \times \mathbf{R}^N$

2) de plus, pour tout $(t,x,v) \in [0,T] \times \overline{\Omega} \times \mathbf{R}^N$,

$$f(t,x,v) \leq \max(\|f^{in}\|_{L^\infty(\Omega\times\mathbf{R}^N)}, \|f_b^-\|_{L^\infty([0,T]\times\Gamma_-)})e^{Dt} + T\|Q\|_{L^\infty([0,T]\times\Omega\times\mathbf{R}^N)}e^{Dt}$$

en notant

$$D = \sup_{(t,x,v)\in[0,T]\times\Omega\times\mathbf{R}^N} \left(\int_{\mathbf{R}^N} k(t,x,v,w)d\mu(w) - a(t,x,v)\right)_+$$

Cas particuliers : si on a, pour tout $(t,x,v) \in [0,T \times \overline{\Omega} \times \mathbf{R}^N$,

$$\mathcal{K}1(t,x,v) = \int_{\mathbf{R}^N} k(t,x,v,w)d\mu(w) \leq a(t,x,v)$$

alors $D = 0$ et, pour tout $(t,x,v) \in [0,T \times \overline{\Omega} \times \mathbf{R}^N$,

$$f(t,x,v) \leq \max(\|f^{in}\|_{L^\infty(\Omega\times\mathbf{R}^N)}, \|f_b^-\|_{L^\infty([0,T]\times\Gamma_-)}) + T\|Q\|_{L^\infty([0,T]\times\Omega\times\mathbf{R}^N)}$$

Autres conditions aux limites

On se limite au cas de dimension $N = 1$; soit $\Omega =]x_L, x_R[\subset \mathbf{R}$

a) réflexion spéculaire : pour tout $t \geq 0$ et tout $v \in \mathbf{R}$

$$f(t, x_L, v) = f(t, x_L, -v)\,, \quad f(t, x_R, v) = f(t, x_R, -v)$$

b) réflexion diffuse :

$$\begin{aligned} f(t, x_L, v)v &= \int_0^\infty k_L(v, w) f(t, x_L, -w) w d\mu(w)\,, \quad && v > 0 \\ f(t, x_R, -v)v &= \int_0^\infty k_R(v, w) f(t, x_L, w) w d\mu(w)\,, \quad && v < 0 \end{aligned}$$

en supposant que les noyaux de transition $k_L, k_R \geq 0$ sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$ et

$$\int_0^\infty k_L(v, w) w d\mu(w) = v\,, \quad \int_0^\infty k_L(v, w) d\mu(v) = 1$$

avec des relations identiques pour k_R.