Transport et diffusion

Cours no. 4 — le 30/I/2013

Rappels sur l'équation de la chaleur

Soit Ω ouvert borné de $\mathbf{R}^N$ à bord de classe C^∞.

Equation de la chaleur, pbm de Dirichlet d'inconnue $u \equiv u(t,x) \in \mathbf{R}$

$$\left\{\begin{array}{l}\partial_t u(t,x) - \frac{1}{2}\kappa^2 \Delta_x u(t,x) = 0\,, \quad x \in \Omega\,,\ t > 0\,,\\ u\Big|_{\partial\Omega} = u_b\,,\\ u\Big|_{t=0} = u^{in}\end{array}\right.$$

<u>Données :</u>

Données :	condition initiale	$u^{in} \equiv u^{in}(x)$
	condition de Dirichlet	$u_b \equiv u_b(t,x)$

Thm Supposons que $u^{in} \in C^\infty(\overline{\Omega})$ et que $u_b \in C^\infty([0,T]\times\partial\Omega)$ vérifient les relations de compatibilité pour tout $k \geq 0$:

$$\partial_t^k u_b(0,y) = \left(\tfrac{1}{2}\kappa^2\Delta_x\right)^k u^{in}(y)\,, \quad y \in \partial\Omega\,.$$

Il existe une unique solution $u \in C^\infty([0,T]\times\overline{\Omega})$ au problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \frac{1}{2}\kappa^2\Delta_x u(t,x) = 0\,, \quad x \in \Omega\,,\ t > 0\,, \\ u\big|_{\partial\Omega} = u_b\,, \qquad u\big|_{t=0} = u^{in} \end{cases}$$

Principe du maximum De plus, cette solution vérifie

$$\|u\|_{L^\infty([0,T]\times\Omega)} \leq \max\left(\|u^{in}\|_{L^\infty(\Omega)}, \|u_b\|_{L^\infty([0,T]\times\partial\Omega)}\right)$$

ainsi que la propriété de positivité :

$$\left.\begin{array}{l} u^{in} \geq 0 \text{ sur } \Omega \\ u_b \geq 0 \text{ sur } [0,T]\times\partial\Omega \end{array}\right\} \Rightarrow u \geq 0 \text{ sur } [0,T]\times\Omega$$

Pbm de Cauchy pour l'équation de la chaleur lorsque $\Omega = \mathbf{R}^N$, on considère le problème de Cauchy d'inconnue $u \equiv u(t,x)$

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t u(t,x) - \frac{1}{2}\kappa^2 \Delta_x u(t,x) = 0\,, \quad x \in \mathbf{R}^N\,,\ t > 0\,, \\ u\Big|_{t=0} = u^{in} \end{array}\right.$$

avec $u \equiv u^{in}(x)$ donnée.

Solution élémentaire gaussienne : on notera

$$E(t,x) := \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2t}\right)\,, \quad x \in \mathbf{R}^N\,,\ t > 0\,.$$

Thm pour tout $u^{in} \in L^2(\mathbf{R}^N)$, le problème de Cauchy ci-dessus admet une unique solution $u \in C^\infty(\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^N)$, qui est donnée par la formule

$$u(t,x) = \int_{\mathbf{R}^N} E(\kappa^2 t, x-y) u^{in}(y) dy\,, \quad x \in \mathbf{R}^N\,,\ t > 0\,.$$

Evidemment, si $u^{in} \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$, alors la solution $u \in C^\infty(\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^N)$.

Principe du maximum pour tout $(t,x) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N$, on a l'encadrement

$$\inf_{y \in \mathbf{R}^N} u^{in}(y) \le u(t,x) \le \sup_{y \in \mathbf{R}^N} u^{in}(y)$$

Approximation par la diffusion

Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ ouvert convexe à bord de classe C^∞, dont on note n_x la normale unitaire extérieure au bord $\partial\Omega$ au point $x \in \partial\Omega$. Dans tout ce qui suit $v \in \mathcal{V} = \overline{B(0,R)}$.

Equation de Boltzmann linéaire d'inconnue $f \equiv f(t,x,v)$, avec $t \geq 0$, $x \in \Omega$ et $v \in \mathcal{V}$, de la forme

$$(\partial_t + v \cdot \nabla_x) f + af = a(1+\gamma)\mathcal{K}f$$

où $a > 0$ et γ sont deux constantes, et où

$$\mathcal{K}f(t,x,v) = \int_{\mathcal{V}} k(v,w) f(t,x,w) d\mu(w)$$

Hypothèses :

1) on suppose μ mesure de Radon positive sur $\mathcal{V}$ t.q.

$$\int_{\mathcal{V}} d\mu(v) < +\infty \qquad \text{et} \qquad \int_{\mathcal{V}} v d\mu(v) = 0$$

2) on suppose que $k \in C(\mathcal{V} \times \mathcal{V})$ vérifie

$$\begin{cases} 0 < k(v,w) = k(w,v) \text{ pour tout } v,w \in \mathcal{V}\,, \\ \\ \mathcal{K}1(v) = \int_{\mathbf{R}^N} k(v,w) d\mu(w) = 1 \text{ pour tout } v \in \mathcal{V} \end{cases}$$

Loi d'échelle de la diffusion

Scaling l'approximation de l'équation de Boltzmann linéaire sera justifiée sous les hypothèses

1) $a \gg 1$ (régime fortement collisionnel)

2) $\gamma \ll 1$ (quasi-équilibre absorption/création)

3) $\partial_t f \ll 1$ (solution lentement variable en temps)

Plus précisément, on introduit un petit paramètre $0 < \epsilon \ll 1$ et on suppose

$$a = \frac{\widehat{a}}{\epsilon}, \qquad \gamma = \epsilon^2 \widehat{\gamma}$$

tandis que

$$f(t,x,v) = f_\epsilon(\epsilon t, x, v) \text{ avec } \begin{cases} f_\epsilon \equiv f_\epsilon(\widehat{t}, x, v) \\ \partial_{\widehat{t}} f_\epsilon = O(1) \end{cases}$$

L'équation de Boltzmann devient donc

$$\epsilon \partial_{\widehat{t}} f_\epsilon + v \cdot \nabla_x f_\epsilon + \frac{\widehat{a}}{\epsilon}\Big(f_\epsilon - (1 + \epsilon^2 \widehat{\gamma}) \mathcal{K} f_\epsilon \Big) = 0$$

But : étudier le comportement asymptotique des solutions de cette équation lorsque le petit paramètre $\epsilon \to 0^+$

Solution série formelle de Hilbert

On cherche une solution f_ϵ de l'équation

$$\epsilon \partial_t f_\epsilon + v \cdot \nabla_x f_\epsilon + \frac{a}{\epsilon}\Big(f_\epsilon - (1+\epsilon^2\gamma)\mathcal{K} f_\epsilon \Big) = 0$$

série **formelle** en puissances de ϵ à coefficients C^∞ :

$$f_\epsilon(t,x,v) = \sum_{n\geq 0} \epsilon^n f_n(t,x,v) \in C_b(v; C_b^\infty(t,x))[[\epsilon]]$$

Attention : la série ne converge pas en général — d'ailleurs seuls les premiers termes de cette série formelle nous serviront

•On substitue la série dans l'équation de Boltzmann linéaire et on identifie les coefficients des puissances successives de ϵ.

Ordre ϵ^{-1} :

$$a(f_0 - \mathcal{K} f_0) = 0$$

Ordre ϵ^{0} :

$$v \cdot \nabla_x f_0 + a(f_1 - \mathcal{K} f_1) = 0$$

Ordre ϵ^{1} :

$$\partial_t f_0 + v \cdot \nabla_x f_1 + a(f_2 - \mathcal{K} f_2) - a\gamma \mathcal{K} f_0 = 0$$

De façon générale, on trouve, pour tout $n \geq 1$, la relation

Ordre ϵ^{n} :

$$\partial_t f_{n-1} + v \cdot \nabla_x f_n + a(f_{n+1} - \mathcal{K} f_{n+1}) - a\gamma \mathcal{K} f_{n-1} = 0$$

•Etudions la 1ère équation :

$$f_0 - \mathcal{K} f_0 = 0$$

Lemme Si $\phi \in L^2(\mathcal{V}, d\mu)$, alors $\phi = \mathcal{K}\phi \Rightarrow \phi =$ Const. p.p..

•Comme $f_0 \equiv f_0(t,x,v)$ est une fonction continue bornée des variables t,x,v, alors en particulier $f(t,x,\cdot) \in L^2(\mathcal{V}, d\mu)$ pour tous t,x. Donc

$$f_0 \equiv f_0(t,x) \text{ est indépendante de } v$$

•Passons maintenant à la 2ème équation :

$$(I - \mathcal{K}) f_1(t,x,v) = -\frac{1}{a} v \cdot \nabla_x f_0(t,x)$$

Les hypothèses sur k entraînent que

$$\iint_{\mathcal{V}\times\mathcal{V}} k(v,w)^2 d\mu(v)d\mu(w) < +\infty$$

c.a.d. que $\mathcal{K}$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt auto-adjoint sur $L^2(\mathcal{V}, d\mu)$

Alternative de Fredholm l'opérateur $\mathcal{K}$ auto-adjoint sur $L^2(\mathcal{V}, d\mu)$ vérifie

$$\mathrm{Im}(I-\mathcal{K}) = \mathrm{Ker}(I-\mathcal{K}^*)^\perp (= \mathrm{Ker}(I-\mathcal{K})^\perp = \mathbf{R}^\perp)$$

•Donc pour résoudre l'équation intégrale d'inconnue $\phi \in L^2(\mathcal{V}, d\mu)$

$$\phi - \mathcal{K}\phi = \psi$$

a) ou bien

$$\int_{\mathcal{V}} \psi(v) d\mu(v) \neq 0 \Rightarrow \text{ pas de solution}$$

b) ou bien

$$\int_{\mathcal{V}} \psi(v) d\mu(v) = 0 \Rightarrow \text{ il existe une solution } \phi_0$$

toutes les solutions sont de la forme $\phi = \phi_0 + \text{Const.}$

c) dans le cas b), il existe une unique solution $\Phi \perp \text{Ker}(I - \mathcal{K}) = \mathbf{R}$

$$\Phi = \phi_0 - \langle \phi_0 \rangle \,, \qquad \text{où} \quad \langle \phi \rangle = \frac{\int_{\mathcal{V}} \phi(v) d\mu(v)}{\int_{\mathcal{V}} d\mu(v)}$$

•Revenons à la 2ème équation :

$$(I - \mathcal{K}) f_1(t,x,v) = -\frac{1}{a} v \cdot \nabla_x f_0(t,x) = -\frac{1}{a} \sum_{j=1}^{N} v_j \partial_{x_j} f_0(t,x)$$

<u>Equation auxiliaire :</u> $(I - \mathcal{K}) b_j(v) = v_j$ pour $j = 1, \dots, N$

$$\int_{\mathcal{V}} v_j d\mu(v) = \left(\int_{\mathcal{V}} v d\mu(v) \right)_j = 0$$

donc il existe une unique solution $b_j(v) \in \mathrm{Ker}(I - \mathcal{K})^{\perp} = \mathbf{R}^{\perp}$

Les solutions de l'équation pour f_1 sont les fonctions de la forme

$$f_1(t,x,v) = -\frac{1}{a} \sum_{j=1}^{N} b_j(v) \partial_{x_j} f_0(t,x) + C_1(t,x)$$

•Passons à l'équation à l'ordre $O(\epsilon^2)$, que l'on écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} a(f_2 - \mathcal{K} f_2) &= -\partial_t f_0 - v \cdot \nabla_x f_1 + a\gamma \mathcal{K} f_0 \\ &= -(\partial_t f_0 + v \cdot \nabla_x f_1 - a\gamma f_0) \end{aligned}$$

Pour que f_2 existe, f_0 doit vérifier la condition de compatibilité

$$\langle \partial_t f_0 + v \cdot \nabla_x f_1 - a\gamma f_0 \rangle = 0$$

c.a.d.

$$\partial_t f_0 + \langle v \cdot \nabla_x f_1 \rangle - a\gamma f_0$$

Puis

$$\langle v \cdot \nabla_x f_1 \rangle = -\frac{1}{a} \sum_{i,j=1}^{N} \langle v_i b_j(v) \rangle \partial_{x_i} \partial_{x_j} f_0$$

— le terme C_1 disparaît car $\langle v \cdot \nabla_x C_1(t,x) \rangle = \langle v \rangle \cdot \nabla_x C_1(t,x) = 0$

Conclusion le terme f_2 existe ssi

$$\partial_t f_0 - \frac{1}{a}\sum_{i,j=1}^{N} \langle v_i b_j(v)\rangle \partial_{x_i}\partial_{x_j} f_0 - a\gamma f_0 = 0$$

qui est une variante anisotrope de l'équation de la chaleur

Hypothèse supposons k invariant par les transformations orthogonales

$$k(Rv, Rw) = k(v, w) \text{ pour tous } v, w \in \mathcal{V}\,,\ \ R \in O_N(\mathbf{R})$$

ainsi que la mesure μ :

$$\int_{\mathcal{V}} g(Rv)d\mu(v) = \int_{\mathcal{V}} g(v)d\mu(v)$$

Lemme : Dans ce cas, le vecteur $b(v) = (b_1(v), \ldots, b_N(v))$ s'écrit

$$b(v) = \beta(|v|)v$$

Conséquence la matrice de diffusion est alors proportionnelle à l'identité :

$$\langle v_i b_j(v) \rangle = \frac{1}{N} \langle |w|^2 \beta(|w|) \rangle I$$

et de plus

$$\langle |w|^2 \beta(|w|) \rangle > 0$$

•La condition de compatibilité assurant l'existence de f_2 se met alors sous la forme de l'équation de diffusion

$$\partial_t f_0 - \frac{1}{2}\kappa^2 \Delta_x f_0 - a\gamma f_0 = 0$$

avec un coefficient de diffusion donné par la formule

$$\frac{1}{2}\kappa^2 = \frac{\langle |w|^2 \beta(|w|) \rangle}{Na}$$

•L'équation à l'ordre $O(\epsilon^2)$ devient

$$(f_2 - \mathcal{K} f_2) = \frac{1}{a^2} \sum_{i,j=1}^{N} (v_i b_j(v) - \langle v_i b_j(v) \rangle) \partial_{x_i} \partial_{x_j} f_0 - \frac{1}{a} v \cdot \nabla_x C_1$$

Soit $d_{ij}(v)$ la solution de l'équation intégrale

$$(I - \mathcal{K}) d_{ij}(v) = v_i b_j(v) - \langle v_i b_j(v) \rangle \,, \quad \langle d_{ij} \rangle = 0$$

Alors

$$f_2(t,x,v) = \frac{1}{a^2} \sum_{i,j=1}^{N} d_{ij}(v) \partial_{x_i} \partial_{x_j} f_0 - \frac{1}{a} b(v) \cdot \nabla_x C_1(t,x) + C_2(t,x)$$

Justification rigoureuse de l'approximation par la diffusion

Sous les hypothèse précédentes portant sur la mesure μ et le noyau intégral k on considère le problème aux limites

$$\left\{\begin{array}{l}\epsilon\partial_t f_\epsilon + v\cdot\nabla_x f_\epsilon + \dfrac{a}{\epsilon}\Big(f_\epsilon - (1+\epsilon^2\gamma)\mathcal{K}f_\epsilon\Big) = 0\,, \quad (x,v)\in\Omega\times\mathcal{V}\\ f_\epsilon\Big|_{\Gamma_-} = f_b\\ f_\epsilon\Big|_{t=0} = f^{in}\end{array}\right.$$

où on a noté

$$\Gamma_- = \{(x,v)\in\partial\Omega\times\mathcal{V}\,|\,v\cdot n_x < 0\}$$

Supposons que la donnée au bord $f_b \equiv f_b(t,x) \in C^\infty([0,T] \times \partial\Omega)$ et que la donnée initiale $f^{in} \equiv f^{in}(x) \in C^\infty(\overline{\Omega})$ vérifient la condition de compatibilité

$$\partial_t^k f_b(0,y) = \left(\tfrac{1}{2}\kappa^2 \Delta_x + a\gamma\right)^k f^{in}(y)\,, \quad y \in \partial\Omega\,.$$

avec

$$\tfrac{1}{2}\kappa^2 = \frac{\langle |w|^2 \beta(|w|)\rangle}{Na}$$

où la fonction β est t.q.

$$(I - \mathcal{K})(\beta(|v|)v) = v\,, \quad v \in \mathcal{V}$$

Thm Sous les hypothèses précédentes, il existe $C_T > 0$ t.q.

$$\sup_{(t,x,v)\in[0,T]\times\overline{\Omega}\times\mathcal{V}} |f_\epsilon(t,x,v) - u(t,x)| \leq C_T\epsilon$$

où u est la solution du problème de Dirichlet pour l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} \partial_t u - \frac{1}{2}\kappa^2 \Delta_x u - a\gamma u = 0\,, \quad x \in \Omega\,,\ t > 0 \\ u\Big|_{\partial\Omega} = f_b \\ u\Big|_{t=0} = f^{in} \end{cases}$$

Schéma de la preuve :

1) Soit u la solution du problème aux limites pour l'équation de diffusion. Définissons

$$f_0(t,x,v) := u(t,x)$$
$$f_1(t,x,v) := -\frac{1}{a}\beta(|v|)v \cdot \nabla_x u(t,x)$$
$$f_2(t,x,v) := \frac{1}{a^2}\sum_{i,j=1}^{N} d_{ij}(v)\partial_{x_i}\partial_{x_j}u(t,x)$$

Formons la solution formelle de Hilbert tronquée à l'ordre 2 en ϵ :

$$F_\epsilon(t,x,v) = f_0(t,x,v) + \epsilon f_1(t,x,v) + \epsilon^2 f_2(t,x,v)$$

2) Posons

$$R_\epsilon(t,x,v) = f_\epsilon(t,x,v) - F_\epsilon(t,x,v)$$

et calculons

$$\begin{cases} \partial_t R_\epsilon + \frac{1}{\epsilon} v \cdot \nabla_x R_\epsilon + \frac{a}{\epsilon^2}\Big(R_\epsilon - (1+\epsilon^2\gamma)\mathcal{K} R_\epsilon\Big) = S_\epsilon \\ R_\epsilon\Big|_{\Gamma_-} = R_\epsilon^b \\ \\ R_\epsilon\Big|_{t=0} = R_\epsilon^{in} \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} R_\epsilon^{in} = -\epsilon f_1\Big|_{t=0} - \epsilon^2 f_2\Big|_{t=0}, \qquad R_\epsilon^b = -\epsilon f_1\Big|_{\Gamma_-} - \epsilon^2 f_2\Big|_{\Gamma_-} \\ \\ S_\epsilon \;\; = -\epsilon\partial_t f_1 - \epsilon^2 \partial_t f_2 - \epsilon v \cdot \nabla_x f_2 + a\epsilon\gamma\mathcal{K} f_1 + a\epsilon^2\gamma\mathcal{K} f_2 \end{cases}$$

3) Par construction

$$|R_\epsilon^{in}(t,x,v)| \leq C_T^{in}\epsilon\,, \quad |R_\epsilon^{b}(t,x,v)| \leq C_T^{b}\epsilon\,, \quad |S_\epsilon(t,x,v)| \leq C_T^{s}\epsilon$$

D'autre part, la différence entre le terme de création et le terme d'absorption vaut

$$\frac{a}{\epsilon^2}\Big((1+\epsilon^2\gamma)\mathcal{K}1 - 1\Big) = a\gamma$$

D'après le principe du maximum pour l'équation de Boltzmann linéaire

$$|R_\epsilon(t,x,v)| \leq \epsilon \max\left(C_T^{in}, C_T^{b}\right) e^{a\gamma+T} + \epsilon T C_T^{s} e^{a\gamma+T}$$

d'où

$$|f_\epsilon(t,x,v) - u(t,x)| \leq \epsilon \max\left(C_T^{in}, C_T^{b}\right) e^{a\gamma+T} + \epsilon T C_T^{s} e^{a\gamma+T}$$
$$\epsilon\|f_1\|_{L^\infty([0,T]\times\overline{\Omega}\times\mathcal{V})} + \epsilon^2\|f_2\|_{L^\infty([0,T]\times\overline{\Omega}\times\mathcal{V})}$$