Transport et diffusion

G. ALLAIRE

Cours no. 8 — le 2/III/2011

Calcul critique (fin)

- Problèmes aux valeurs propres et criticité
  - Diffusion à deux groupes
  - Transport mono-cinétique
- Taille critique (François Golse)
- Calcul critique
  - Problèmes à sources
  - Analyse de sensibilité
- Calcul numérique de la criticité (si le temps le permet...)

(1) Problèmes aux valeurs propres et criticité

- Pour étudier le comportement asymptotique en temps, on a introduit un problème aux valeurs propres (cf. cours précédent).
- Pour étudier l'équilibre entre absorption et fission, on va introduire un nouveau problème aux valeurs propres.
- Notion de facteur multiplicatif effectif en neutronique.
- Dans la section suivante on introduira la notion de taille critique.
- On commence par un rappel sur la diffusion à deux groupes d'énergie.

(1-a) Diffusion à deux groupes d'énergie

On étudie le comportement, quand $t \to +\infty$, de la solution de

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u_1}{\partial t} - \operatorname{div}(D_1 \nabla u_1) + \sigma_1 u_1 = \sigma_{12}^f u_2 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} - \operatorname{div}(D_2 \nabla u_2) + \sigma_2 u_2 = \sigma_{21}^c u_1 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u_1 = u_2 = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u_1(t=0,x) = u_1^0(x)\,, u_2(t=0,x) = u_2^0(x) & \text{dans } \Omega, \end{array} \right.$$

où Ω est borné régulier, les coefficients sont des fonctions bornées telles que

$$D_1(x)\,, D_2(x)\,, \sigma_{12}^f(x)\,, \sigma_{21}^c(x) \geq C > 0 \quad \text{et} \quad \sigma_1 \geq \sigma_{12}^f\,, \sigma_2 \geq \sigma_{21}^c\,.$$

Le problème aux valeurs propres correspondant à ce problème d'évolution est:

trouver $\lambda \in \mathbf{C}$ et $(\psi_1, \psi_2) \neq 0$ tels que

$$\begin{cases} -\lambda\psi_1 - \operatorname{div}(D_1 \nabla \psi_1) + \sigma_1 \psi_1 = \sigma_{12}^f \psi_2 & \text{dans } \Omega, \\ -\lambda\psi_2 - \operatorname{div}(D_2 \nabla \psi_2) + \sigma_2 \psi_2 = \sigma_{21}^c \psi_1 & \text{dans } \Omega, \\ \psi_1 = \psi_2 = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Proposition (Krein-Rutman). Il existe une plus petite valeur propre réelle et simple λ telle que sa fonction propre associée (ψ_1, ψ_2) est la seule à être strictement positive dans Ω et pour toute autre valeur propre $\mu \in \mathbf{C}$ on a $\lambda < |\mu|$.

Remarque. C'est l'extension en dimension infinie du théorème de Perron-Frobenius.

Comportement en temps grand de la diffusion à deux groupes

Pour étudier la limite en temps grand de la diffusion nous avons besoin d'introduire le problème adjoint

$$\left\{\begin{array}{ll} -\lambda\psi_1^* - \operatorname{div}(D_1\nabla\psi_1^*) + \sigma_1\psi_1^* = \sigma_{21}^c\psi_2^* & \text{dans } \Omega, \\ -\lambda\psi_2^* - \operatorname{div}(D_2\nabla\psi_2^*) + \sigma_2\psi_2^* = \sigma_{12}^f\psi_1^* & \text{dans } \Omega, \\ \psi_1^* = \psi_2^* = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array}\right.$$

On peut, bien sûr, montrer que le problème adjoint admet, comme en dimension finie, la même plus petite valeur propre λ que le problème "direct", avec un vecteur propre positif (ψ_1^*, ψ_2^*).

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} - \operatorname{div}(D_1 \nabla u_1) + \sigma_1 u_1 = \sigma_{12}^f u_2 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} - \operatorname{div}(D_2 \nabla u_2) + \sigma_2 u_2 = \sigma_{21}^c u_1 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u_1 = u_2 = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u_1(t=0,x) = u_1^0(x)\,, u_2(t=0,x) = u_2^0(x) & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

Proposition. On suppose que $u_1^0, u_2^0 \geq 0$. Une condition nécessaire pour que le problème d'évolution admette une limite non nulle quand $t \to +\infty$ est que la plus petite valeur propre du problème spectral soit $\lambda = 0$.

Si cette limite existe, alors elle est du type

$$\lim_{t \to +\infty} (u_1(t), u_2(t)) = c\,(\psi_1, \psi_2) \qquad \text{avec } c = \int_\Omega \left(u_1^0 \psi_1^* + u_2^0 \psi_2^*\right) dx\,.$$

Remarque. Le profil spatial asymptotique est le premier et seul vecteur propre positif (ψ_1, ψ_2). Le coefficient de proportionnalité c est le produit scalaire de la donnée initiale et du premier vecteur propre adjoint (ψ_1^*, ψ_2^*), positif lui aussi, appelé fonction d'importance en neutronique.

Problème critique

En neutronique on préfère une autre formulation du problème aux valeurs propres, appelée **problème critique**

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(D_1 \nabla \psi_1\right) + \sigma_1 \psi_1 = \dfrac{1}{k} \sigma_{12}^f \psi_2 & \text{dans } \Omega, \\ -\operatorname{div}\left(D_2 \nabla \psi_2\right) + \sigma_2 \psi_2 = \sigma_{21}^c \psi_1 & \text{dans } \Omega, \\ \psi_1 = \psi_2 = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $1/k$ est une valeur propre.

Proposition. Il existe une plus petite valeur propre réelle et simple $1/k_{\text{eff}}$ telle que son vecteur propre associé (ψ_1, ψ_2) est le seul à être strictement positif dans Ω et pour toute autre valeur propre $1/k \in \mathbf{C}$ on a $1/k_{\text{eff}} < 1/|k|$.

La valeur k_{eff} est appelée facteur multiplicatif effectif.

Remarquons que $k_{\rm eff} = 1$ si et seulement si $\lambda = 0$ et que, dans ce cas, les vecteurs propres associés sont les mêmes.

Si $k_{\rm eff} \neq 1$, alors $\lambda = 0$ (i.e. il existe un état stationnaire) si le taux de fission σ_{12}^{f} est divisé par $k_{\rm eff}$.

Autrement dit, $k_{\rm eff}$ est une mesure du changement qu'il faut apporter aux fissions pour qu'il puisse exister un état stationnaire.

On interprète donc ainsi le facteur multiplicatif effectif:

1. si $k_{\rm eff} = 1$, le milieu est dit **critique** (les réactions de fission sont équilibrées par la diffusion et l'absorption),
2. si $k_{\rm eff} > 1$, le milieu est dit **sur-critique** (les réactions de fission dominent la diffusion et l'absorption),
3. si $k_{\rm eff} < 1$, le milieu est dit **sous-critique** (les réactions de fission sont trop faibles en comparaison de la diffusion et l'absorption).

(1-b) Transport mono-cinétique

Problème critique: trouver $1/k \in \mathbf{C}$ et $\phi(x,\omega) \neq 0$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega \cdot \nabla\phi + \sigma(x)\phi - \displaystyle\int_{|\omega'|=1} \sigma^c(x, \omega\cdot\omega')\phi(x,\omega')\,d\omega' = \\ \qquad\qquad \displaystyle\frac{1}{k}\int_{|\omega'|=1} \sigma^f(x,\omega\cdot\omega')\phi(x,\omega')\,d\omega' \text{ dans } \Omega \times \{|\omega| = 1\}, \\ \phi(x,\omega) = 0 \quad \text{ sur } \Gamma^- = \{x \in \partial\Omega \,|\, v\cdot n_x < 0\}. \end{array} \right.$$

On a séparé les collisions des fissions !

On suppose que l'absorption totale est positive ou nulle (pas restrictif)

$$\sigma(x) - \int_{|\omega'|=1} \sigma^c(x,\omega\cdot\omega')\,d\omega' \geq 0 \quad \forall\, x, \omega.$$

Hypothèse essentielle sur la section efficace de fission strictement positive

$$\sigma^c(x,\omega\cdot\omega') \geq 0, \quad \sigma^f(x,\omega\cdot\omega') \geq C > 0 \quad \forall\, x, \omega\cdot\omega',$$

Proposition. Il existe une plus petite valeur propre réelle et simple $1/k_{\text{eff}}$, appelée facteur multiplicatif effectif, solution du problème critique telle que son vecteur propre associé ϕ est le seul à être strictement positif dans $\Omega \times \{|\omega| = 1\}$ et pour toute autre valeur propre $1/k \in \mathbf{C}$ on a $1/k_{\text{eff}} < 1/|k|$.

(2) Taille critique

Cf. François Golse.

(3) Calcul critique

- But: montrer que la criticité est utile pour résoudre d'autres problèmes.
- Cadre: pour éviter des questions techniques délicates on travaille sur une **version matricielle** des problèmes.

Problème critique:

$$A\psi = \frac{1}{k} F\psi \, ,$$

où F est la matrice de fission et A est la matrice de diffusion ou de transport.

Hypothèses: A inversible, A^{-1} et F positifs, $K = A^{-1}F$ strictement positif.

Le Théorème de Perron-Frobenius affirme que K admet une plus grande valeur propre réelle et simple k_{eff}.

Problème à source: étant donné b, trouver la solution u de

$$Au = Fu + b\,.$$

Proposition. Il existe une unique solution u si $k_{\text{eff}} \neq 1$, c'est-à-dire si le milieu n'est pas critique.

Si le milieu est sous-critique, $k_{\text{eff}} < 1$, alors on a le principe du maximum, c'est-à-dire que $b \geq 0$ implique que $u \geq 0$.

Si le milieu est sur-critique, $k_{\text{eff}} > 1$, alors $b \geq 0$, n'implique pas que $u \geq 0$.

Remarque. La violation du principe du maximum dans le cas sur-critique est évidemment non physique, mais pas surprenante. En effet, dans ce cas le problème d'évolution n'a pas de limite stationnaire.

Preuve. Avec la notation $K = A^{-1}F$ l'équation est équivalente à

$$(\,\mathrm{Id} - K)u = A^{-1}b$$

et l'alternative de Fredholm dit qu'il existe une solution unique si 1 n'est pas valeur propre de K, i.e. si $k_{\mathrm{eff}} \neq 1$.

Lorsque $k_{\mathrm{eff}} < 1$, on sait grâce au Théorème de Perron-Frobenius que $\rho(K) = k_{\mathrm{eff}} < 1$ et donc la série suivante converge

$$(\,\mathrm{Id} - K)^{-1} = \sum_{p \geq 0} K^p.$$

Comme K est positif (A^{-1} aussi), on en déduit que $b \geq 0$ implique $u \geq 0$.

Preuve (suite). Supposons maintenant que $k_{\text{eff}} > 1$. Ecrivons alors le problème critique adjoint

$$A^*\psi^* = \frac{1}{k_{\text{eff}}} F^*\psi^* \,,$$

où $\psi^* > 0$ est le premier vecteur propre positif. On multiplie $Au = Fu + b$ par ψ^* pour obtenir

$$\langle u, A^*\psi^* \rangle = \langle u, F^*\psi^* \rangle + \langle b, \psi^* \rangle$$

qui devient

$$\left(\frac{1}{k_{\text{eff}}} - 1 \right) \langle u, F^*\psi^* \rangle = \langle b, \psi^* \rangle \,.$$

Si $b \geq 0$ et $b \neq 0$, comme $\psi^* > 0$, le membre de droite est strictement positif et, puisque $1/k_{\text{eff}} < 1$, on doit avoir $\langle u, F^*\psi^* \rangle = \langle Fu, \psi^* \rangle < 0$ ce qui oblige Fu, donc u, à avoir des composantes négatives.

Problèmes légèrement sous-critiques

Proposition. On suppose que le milieu est légèrement sous-critique

$$\exists\, \epsilon > 0 \quad \text{tel que} \quad k_{\text{eff}} = 1 - \epsilon\,.$$

On considère le problème à sources, petites de l'ordre de ϵ,

$$A u_\epsilon = F u_\epsilon + \epsilon b\,.$$

Alors la solution vérifie

$$u_\epsilon = \langle A^{-1} b, \psi^* \rangle\, \psi + \mathcal{O}(\epsilon)\,,$$

où ψ et ψ^* sont les premiers vecteurs propres positifs définis par

$$A\psi = \frac{1}{k_{\text{eff}}} F\psi\,, \quad A^*\psi^* = \frac{1}{k_{\text{eff}}} F^*\psi^*\,,$$

et normalisés par $\|\psi\| = 1$, $\langle \psi, \psi^* \rangle = 1$.

Preuve. L'équation $Au_\epsilon = Fu_\epsilon + \epsilon b$ est équivalente à

$$(\,\mathrm{Id} - K)u_\epsilon = \epsilon z \qquad \text{avec } K = A^{-1}F \text{ et } z = A^{-1}b\,.$$

Par le Théorème de Perron-Frobenius on sait que le sous-espace propre associé à k_{eff} est $\mathrm{Vect}(\psi)$. Tout vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ peut s'écrire

$$v = \langle v, \psi^* \rangle \psi + \tilde{v} \qquad \text{avec } \tilde{v} = v - \langle v, \psi^* \rangle \psi \text{ tel que } \langle \tilde{v}, \psi^* \rangle = 0\,.$$

Donc $\mathrm{Vect}(\psi^*)^\perp$ est un sous-espace supplémentaire de $\mathrm{Vect}(\psi)$ dans $\mathbb{R}^n$, qui est stable par K. Comme toutes les valeurs propres $k \neq k_{\text{eff}}$ de K, vérifient $|k| < k_{\text{eff}} = 1 - \epsilon$, on en déduit que $(\,\mathrm{Id} - K)$ est inversible sur $\mathrm{Vect}(\psi^*)^\perp$ et que la norme de l'inverse est bornée indépendamment de ϵ. On écrit

$$z = \langle z, \psi^* \rangle \psi + \tilde{z} \;\; \text{et} \;\; u_\epsilon = \langle u_\epsilon, \psi^* \rangle \psi + \tilde{u}_\epsilon \qquad \text{avec } \tilde{z}\,, \tilde{u}_\epsilon \in \mathrm{Vect}(\psi^*)^\perp.$$

Un simple calcul montre alors que

$$\langle u_\epsilon, \psi^* \rangle = \langle z, \psi^* \rangle \;\; \text{et} \;\; |\tilde{u}_\epsilon| \le \left\| (\,\mathrm{Id} - K)^{-1}\big|_{\mathrm{Vect}(\psi^*)^\perp} \right\| \, |\epsilon \tilde{z}| \le C\epsilon |\tilde{z}|$$

Analyse de sensibilité

But: étudier la variation de la criticité en fonction des variations des coefficients ou sections efficaces (très important en pratique).

Proposition. La variation du facteur multiplicatif effectif sous l'effet de variations δA et δF des opérateurs de transport/diffusion et fission est

$$\delta k = k_{\text{eff}}^2 \frac{\langle \left(-\delta A + \frac{1}{k_{\text{eff}}} \delta F \right) \psi, \psi^* \rangle}{\langle F\psi, \psi^* \rangle} \, .$$

Remarque. On comprend à nouveau le nom de fonction d'importance pour ψ^*. Puisque $\psi, \psi^*, F \geq 0$, on en déduit qu'une augmentation des fissions, $\delta F \geq 0$, ou une diminution de l'absorption, $\delta A \leq 0$, contribue à une augmentation de la criticité.

Lemme technique. Si une valeur propre d'une matrice est simple alors elle et son vecteur propre, convenablement normalisé, sont (localement) continuement dérivables comme fonctions de cette matrice.

Remarque. L'hypothèse de simplicité de la valeur propre est essentielle !

Preuve de la Proposition. On dérive $A\psi = \frac{1}{k_{\text{eff}}} F\psi$ pour obtenir

$$\left(A - \frac{1}{k_{\text{eff}}} F\right) \delta\psi = \left(-\delta A + \frac{1}{k_{\text{eff}}} \delta F - \frac{\delta k}{k_{\text{eff}}^2} F\right) \psi.$$

On ne peut résoudre que si le second membre est orthogonal à ψ^*. On multiplie alors par ψ^*

$$\begin{aligned} \langle \left(A - \frac{1}{k_{\text{eff}}} F\right) \delta\psi, \psi^* \rangle \quad &= \langle \delta\psi, \left(A^* - \frac{1}{k_{\text{eff}}} F^*\right) \psi^* \rangle = 0 \\ &= \langle \left(-\delta A + \frac{1}{k_{\text{eff}}} \delta F - \frac{\delta k}{k_{\text{eff}}^2} F\right) \psi, \psi^* \rangle \end{aligned}$$

d'où l'on déduit la formule voulue.

Remarquons que $\delta\psi$ n'est défini qu'à l'addition d'un multiple de ψ près. Mais en différentiant la normalisation $\|\psi\| = 1$, on obtient $\langle \psi, \delta\psi \rangle = 0$, ce qui fixe l'indétermination pour $\delta\psi$.

(4) Calcul numérique de la criticité

Méthode de la puissance pour calculer la plus grande valeur propre d'une matrice K de valeurs propres $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$.

Nous faisons l'hypothèse que K est strictement positive donc, par Perron-Frobenius, il existe une valeur propre dominante simple

$$\lambda_n > |\lambda_i| \quad \text{pour tout } 1 \leq i \leq n-1,$$

et son vecteur propre associé e_n peut être choisi strictement positif.

Algorithme

1. Initialisation: $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $x_0 > 0$.

2. Itérations: pour $k \geq 1$

   1. $y_k = Kx_{k-1}$

   2. $x_k = y_k / \max(y_k)$ où $\max(y)$ désigne la plus grande composante en module du vecteur y,

   3. test de convergence: si $\|x_k - x_{k-1}\| \leq \varepsilon$, on arrête.

Dans le test de convergence, ε est typiquement égal à 10^{-6}.

Si $\delta_k = x_k - x_{k-1}$ est petit, alors x_k est un vecteur propre approché de K de valeur propre approchée $\max(y_k)$ car

$$K x_k - \max(y_k) x_k \; = \; K \delta_k \, .$$

Proposition. On suppose que la matrice K est strictement positive. Alors la méthode de la puissance converge, c'est-à-dire que

$$\lim_{k\to+\infty} \max(y_k) = \lambda_n, \qquad \lim_{k\to+\infty} x_k = e_n / \max(e_n).$$

De plus, la vitesse de convergence est proportionnelle au rapport $|\lambda_{n-1}|/\lambda_n$.

Preuve. Supposons pour simplifier que K est diagonalisable avec des vecteurs propres $(e_1, \cdots, e_n)$ correspondant aux valeurs propres $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. Soit $x_0 = \sum_{i=1}^n \beta_i e_i > 0$ le vecteur initial. Par Perron-Frobenius, le vecteur propre adjoint e_n^* de K^* vérifie aussi $e_n^* > 0$, donc $\beta_n = x_0 \cdot e_n^* > 0$. Une récurrence facile montre que

$$x_k = \frac{K^k x_0}{\max(K^k x_0)} = \frac{\sum_{i=1}^n \beta_i (\lambda_i)^k e_i}{\max\left(\sum_{i=1}^n \beta_i (\lambda_i)^k e_i\right)} = \frac{e_n + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\beta_i}{\beta_n} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_n}\right)^k e_i}{\max\left(e_n + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\beta_i}{\beta_n} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_n}\right)^k e_i\right)}.$$

Comme $|\lambda_i| < \lambda_n$, x_k converge vers $e_n / \max(e_n)$. Comme $y_k = K x_k$ converge vers $\lambda_n e_n / \max(e_n)$, on en déduit que $\max(y_k)$ converge vers λ_n.

Preuve (suite). Si K n'est pas diagonalisable, alors il faut utiliser la base $(e_1, \cdots, e_n)$ de sa forme de Jordan. Pour fixer les idées et simplifier les notations, supposons que tous les vecteurs e_i sont en fait des vecteurs propres sauf e_{n-2} qui appartient au sous-espace spectral de la valeur propre $\lambda_{n-1} = \lambda_{n-2}$ sans être vecteur propre. Autrement dit, on a

$$Ke_{n-2} = \lambda_{n-1}e_{n-2} + e_{n-1} \quad \text{et } Ke_i = \lambda_i e_i \text{ pour } i \neq (n-1)\,.$$

Dans ce cas, la formule ci-dessus pour x_k doit être modifiée comme suit

$$x_k = \frac{\beta_n e_n + (\beta_{n-1} + k\beta_{n-2}/\lambda_{n-1}) \left(\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right)^k e_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-2} \beta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_n}\right)^k e_i}{\max\left(\beta_n e_n + (\beta_{n-1} + k\beta_{n-2}/\lambda_{n-1}) \left(\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right)^k e_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-2} \beta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_n}\right)^k e_i\right)}.$$

On a toujours les mêmes convergences de x_k et $\max(y_k)$ puisque $k(\lambda_{n-1}/\lambda_n)^k$ tends toujours vers zéro lorsque k tends vers $+\infty$, même si la convergence est un peu plus lente.

Algorithme de la puissance “inverse”

But: calculer la **plus petite** valeur propre d’une matrice A.

1. Initialisation: $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $x_0 > 0$.
2. Itérations: pour $k \geq 1$
   1. résoudre $Ay_k = x_{k-1}$
   2. $x_k = y_k / \max(y_k)$
   3. test de convergence: si $\|x_k - x_{k-1}\| \leq \varepsilon$, on arrête.

Si $\delta_k = x_k - x_{k-1}$ est petit, alors x_{k-1} est un vecteur propre approché de valeur propre approchée $1/\max(y_k)$ car

$$Ax_{k-1} - \frac{x_{k-1}}{\max(y_k)} = -A\delta_k \, .$$

On suppose que A est une M-matrice irréductible. Dans ce cas, on sait que A admet une plus petite valeur propre réelle simple λ_1 telle que

$$\lambda_1 < |\lambda_i| \quad \text{pour tout } 2 \leq i \leq n,$$

et son vecteur propre associé peut être choisi strictement positif.

Proposition. On suppose que A est une M-matrice irréductible. Alors la méthode de la puissance inverse converge, c'est-à-dire que

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{1}{\max(y_k)} = |\lambda_1|, \quad \lim_{k \to +\infty} x_k = e_1 / \max(e_1).$$

La vitesse de convergence est proportionnelle au rapport $\lambda_1 / |\lambda_2|$.

Transport et diffusion

Cours no. 8bis — le 2/III/2011

MOTIVATION : TAILLE CRITIQUE

Exemple : considérons l'équation de Boltzmann linéaire monocinétique avec scattering isotrope et symétrie de type slab

$$\partial_t f + \mu \partial_x f = \sigma(1+\gamma)\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f d\mu - \sigma f \qquad \begin{cases} |x| < L \\ |\mu| < 1 \end{cases}$$

et conditions aux limites absorbantes au bord de l'intervalle $[-L, L]$

$$f(t, -L, +\mu) = f(t, L, -\mu) = 0\,, \quad 0 < \mu < 1\,,\ t > 0$$

Deux effets opposés :

a) $\gamma > 0 \Rightarrow$ création de particules en excès par rapport à l'absorption

b) fuite de particules au bord du domaine spatial $[-L, L]$

Intuition physique :

•à $\gamma > 0$ fixé, plus L est grand, moins l'effet de fuite au bord du domaine spatial est important

•à L fixé, plus $\gamma > 0$ est petit, plus l'excès de particules secondaires crées par le milieu est petit

Pbm de la taille critique : étant donnés les paramètres $\sigma > 0$ et $\gamma > 0$, trouver la taille $L > 0$ du domaine spatial pour laquelle il y a équilibre entre la création de particules secondaires ($\gamma > 0$) et l'effet de fuite au bord

$\Leftrightarrow$ la plus grande valeur propre de l'équation de Boltzmann linéaire est 0

Difficultés :

1) le problème spectral pour l'équation de Boltzmann linéaire est en dimension infinie et pas auto-adjoint $\Rightarrow$ pas "diagonalisable" a priori ; peut-on parler de sa "plus grande valeur propre" ?

2) comment calculer cette "plus grande valeur propre" ? peut-on se servir de la modélisation par l'équation de diffusion ?

Valeurs propres de l'opérateur de diffusion 1D

Considérons le problème de Dirichlet aux valeurs propres

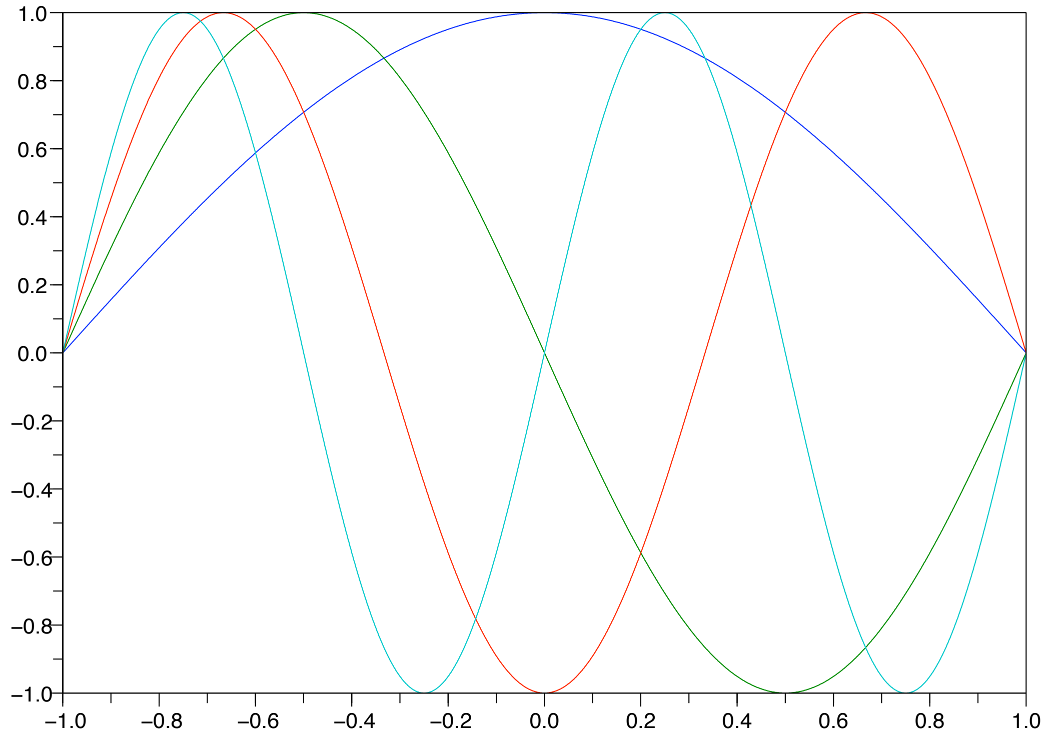
$$\begin{cases} -\frac{d^2\phi}{dx^2}(x) = \lambda\phi(x)\,, & |x| < L \\ \phi(+L) = \phi(-L) = 0 \end{cases}$$

Fonctions propres et valeurs propres associées :

$$\phi_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{2L}(x+L)\right)\,, \qquad \lambda_k = \frac{k^2\pi^2}{4L^2}\,, \qquad k \in \mathbf{N}^*$$

Plus petite valeur propre : pour $k = 1$

$$\phi_1(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\,, \qquad \lambda_1 = \frac{\pi^2}{4L^2}$$



Fonctions propres du laplacien de Dirichlet sur l'intervalle $[-1, 1]$ pour les valeurs propres $k^2\pi^2/4$ avec $k = 1, 2, 3, 4$

PROBLEME SPECTRAL POUR L'EQUATION DE BOLTZMANN

Bien que le problème spectral pour l'équation de Boltzmann linéaire ne soit pas auto-adjoint $\Rightarrow$ pas "diagonalisable" a priori, certains cas se ramènent à un problème spectral auto-adjoint.

Exemple : le cas monocinétique avec scattering isotrope $1D$ avec symétrie de type slab dans un intervalle fini.

$$(\partial_t + \mu\partial_x) f(t,x,\mu) = \sigma(1+\gamma)\langle f\rangle(t,x) - \sigma f(t,x,\mu)$$

avec $\sigma > 0$, $\gamma > -1$ et la notation

$$\langle \phi \rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \phi(\mu) d\mu \, .$$

Problème spectral :

1) pour quelles valeurs de λ existe-t-il $\phi \equiv \phi(x,\mu)$ t.q.

$$\begin{cases} A\phi = \lambda\phi\,, & \phi \neq 0\,, \\ \phi(-L,\mu) = \phi(L,-\mu) = 0\,, & 0 < \mu \leq 1\,, \end{cases}$$

où

$$A\phi = -\mu\partial_x\phi + \sigma(1+\gamma)\langle\phi\rangle - \sigma\phi$$

2) pour quelles valeurs propres λ de l'équation de Boltzmann existe-t-il des fonctions propres ϕ vérifiant en outre $\phi \equiv \phi(x,\mu) \geq 0$ (densité de particules) ?

Valeurs propres de l'opérateur de Boltzmann linéaire monocinétique 1D

Théorème : Soient $\sigma > 0$ et $\gamma > -1$.

1) Il existe un unique réel $\lambda_L(\sigma, \gamma)$ dans l'intervalle $]-\sigma, +\infty[$ qui est la plus grande valeur propre de l'opérateur A défini sur $[-L, L] \times [-1, 1]$ par

$$A\phi = -\mu \partial_x \phi + \sigma(1+\gamma)\langle\phi\rangle - \sigma\phi\,,$$

avec conditions aux limites absorbantes sur $[-L, L] \times [-1, 1]$.

2) L'opérateur A admet une fonction propre ≥ 0 associée à la plus grande valeur propre $\lambda_L(\sigma, \gamma)$.

3) Les autres valeurs propres de A sont toutes réelles, de multiplicités finies, et appartiennent à l'intervalle $]-\sigma, \lambda_L(\sigma, \gamma)]$.

Schéma de la preuve : réduction au cas auto-adjoint

• Dire que ϕ est solution généralisée du problème ci-dessus, c'est dire que

$$\phi(x,\mu)=\int_{-L}^{x}\frac{\sigma(1+\gamma)}{\mu}e^{-(\sigma+\lambda)(x-y)/\mu}\langle\phi\rangle(y)dy\,,\qquad 0<\mu\leq 1\,,$$

$$\phi(x,\mu)=\int_{x}^{L}\frac{\sigma(1+\gamma)}{|\mu|}e^{-(\sigma+\lambda)(y-x)/|\mu|}\langle\phi\rangle(y)dy\,,\qquad -1\leq \mu<0\,,$$

• Moyenner ϕ par rapport à $\mu \Rightarrow$ équation intégrale pour $\langle\phi\rangle$:

$$\langle\phi\rangle(x)=\int_{-L}^{x}\left(\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\sigma(1+\gamma)}{\mu}e^{-(\sigma+\lambda)(x-y)/\mu}d\mu\right)\langle\phi\rangle(y)dy$$
$$+\int_{x}^{L}\left(\frac{1}{2}\int_{-1}^0\frac{\sigma(1+\gamma)}{|\mu|}e^{-(\sigma+\lambda)(y-x)/|\mu|}d\mu\right)\langle\phi\rangle(y)dy$$

•Cette équation intégrale se met sous la forme

$$\langle\phi\rangle(x) = \sigma(1+\gamma)\int_{-L}^{L} E((\sigma+\lambda)|x-y|)\langle\phi\rangle(y)dy\,, \quad |x| \leq L\,.$$

où

$$E(z) = \frac{1}{2}\int_z^\infty e^{-v}\frac{dv}{v}\,, \quad z > 0\,,$$

Notation : Pour tout $\lambda > -\sigma$, on définit l'opérateur K_λ par la formule

$$K_\lambda\psi(x) = \int_{-L}^{L} E((\sigma+\lambda)|x-y|)\psi(y)dy\,.$$

Lemme : Pour tout $\lambda > -\sigma$, l'opérateur K_λ est un opérateur de Hilbert-Schmidt auto-adjoint sur $L^2([-L,L])$. De plus, pour tout $\psi \in L^2([-L,L])$, la fonction $K_\lambda\psi$ est (p.p. égale à) une fonction continue sur $[-L,L]$.

Conséquence :

1) Il existe une base hilbertienne $(\phi_n)_{n\geq 0}$ de $L^2([-L,L])$, et une suite de réels

$$\rho_0(\lambda) \geq \rho_1(\lambda) \geq \ldots \geq \rho_n(\lambda) \geq \ldots \geq 0$$

telle que

$$K_\lambda \phi_n = \rho_n(\lambda)\phi_n\,, \quad n \geq 0\,.$$

2) De plus

$$\rho_0(\lambda) = \max_{\substack{\phi\in L^2([-L,L])\\ \phi\neq 0}} \frac{\displaystyle\int_{-L}^{L} \overline{\phi(x)} K_\lambda \phi(x)dx}{\displaystyle\int_{-L}^{L} |\phi(x)|^2 dx}\,.$$

Proposition : Notons l'opérateur de Boltzmann linéaire

$$Af = -\mu\partial_x f + \sigma(1+\gamma)\langle f\rangle - \sigma f$$

Il y a équivalence entre

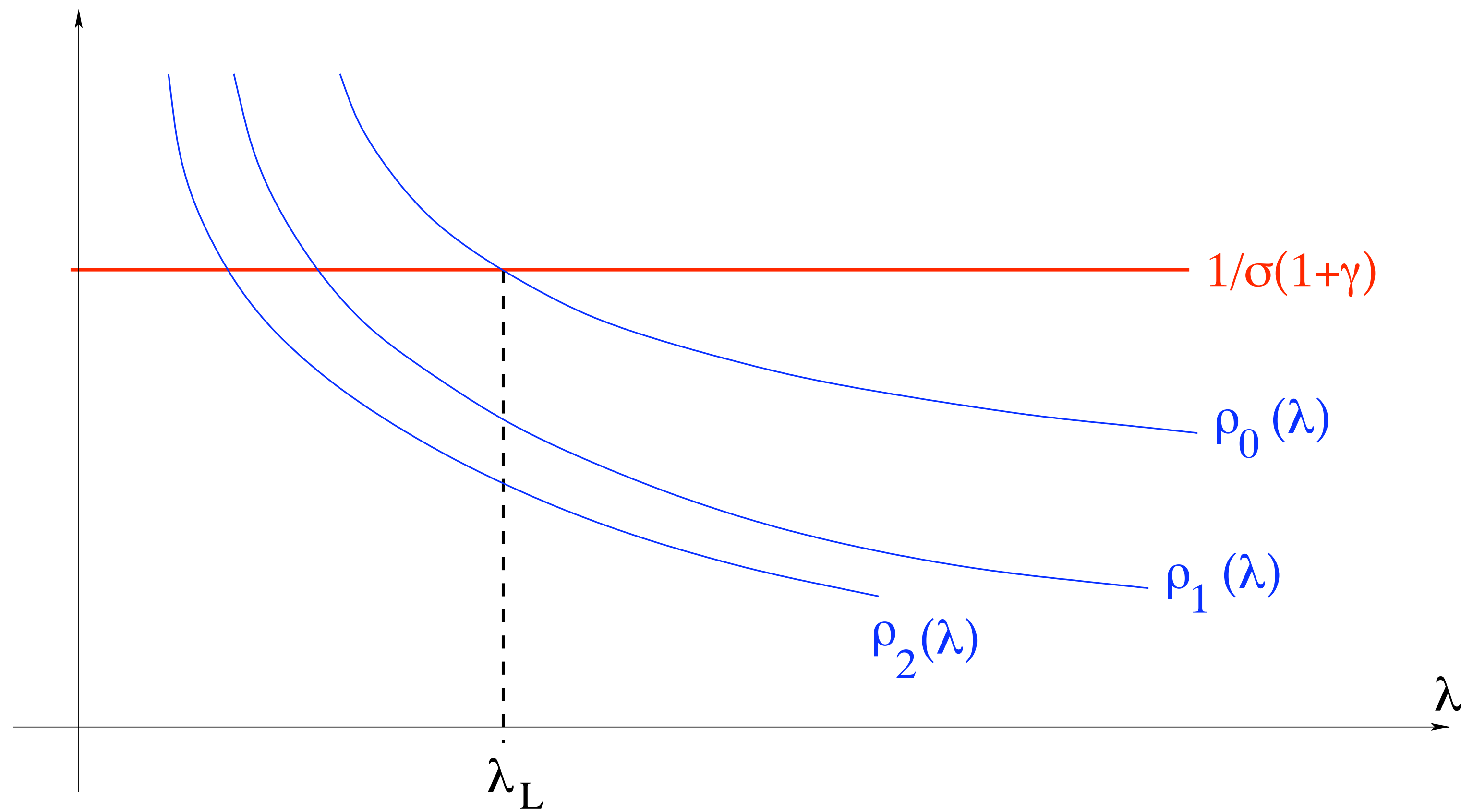
a) $\phi \in L^2([-L,L]\times[-1,1])$ est solution généralisée du problème aux valeurs propres

$$\begin{cases} A\phi = \lambda\phi\,, & \phi \neq 0\,, \\ \phi(-L,\mu) = \phi(L,-\mu) = 0\,, & 0 < \mu \leq 1\,, \end{cases}$$

pour la valeur propre $\lambda > -\sigma$;

b) $\langle\phi\rangle$ est fonction propre de l'opérateur K_λ pour la valeur propre $\frac{1}{\sigma(1+\gamma)}$.

On se ramène donc à résoudre en λ l'équation $\rho_0(\lambda) = \frac{1}{\sigma(1+\gamma)}$.



Résolution de l'équation donnant la valeur propre principale de l'équation de Boltzmann linéaire monocinétique avec scattering isotrope et symétrie de type slab

Notion de taille critique

Définition : On dit que L est la taille critique pour l'opérateur de Boltzmann linéaire $A\phi = -\mu\partial_x\phi + \sigma(1+\gamma)\langle\phi\rangle - \sigma\phi$, avec conditions aux limites absorbantes SSI la valeur propre principale $\lambda_L(\sigma,\gamma) = 0$.

•**Scaling :** en posant $x = Lz$, et $\phi(x,\mu) = \Phi(z,\mu)$, le problème spectral

$$-\mu\partial_x\phi + \sigma(1+\gamma)\langle\phi\rangle - \sigma\phi = \lambda\phi\,, \qquad \phi(-L,\mu) = \phi(L,-\mu) = 0$$

se ramène à

$$-\mu\partial_z\Phi + L\sigma(1+\gamma)\langle\Phi\rangle - L\sigma\Phi = L\lambda\Phi\,, \qquad \Phi(-1,\mu) = \Phi(1,-\mu) = 0$$

de sorte que

$$\lambda_L(\sigma,\gamma) = \frac{1}{L}\lambda_1(L\sigma,\gamma)$$

$\boxed{\text{Estimation de la taille critique par la diffusion}}$

•**Hypothèse :** $L \gg 1$, $\gamma \ll 1$ t.q. $\gamma = \hat{\gamma}/L^2$

On cherche $\Phi \neq 0$ solution du problème spectral

$$\begin{cases} -\mu\partial_x\Phi + \sigma L\left(1 + \frac{\hat{\gamma}}{L^2}\right)\langle\Phi\rangle - \sigma L\Phi = L\lambda_1(L\sigma, \hat{\gamma}/L^2)\Phi \\ \Phi(-1,\mu) = \Phi(1,-\mu) = 0\,, \qquad 0 < \mu \leq 1\,. \end{cases}$$

Intuition : pour $L \gg 1$, l'effet de fuite de particules au bord est faible, et on s'attend à ce que λ_L soit du même ordre de grandeur que γ :

$$\lambda_L(\sigma, \hat{\gamma}/L^2) = O(1/L^2)$$

•Posant $L = 1/\epsilon$, le problème spectral ci-dessus se réécrit

$$\begin{cases} -\mu\partial_x\Phi + \frac{1}{\epsilon}\sigma\left(1+\epsilon^2\widehat{\gamma}\right)\langle\Phi\rangle - \frac{1}{\epsilon}\sigma\Phi = \epsilon\widehat{\lambda}\Phi \\ \\ \Phi(-1,\mu) = \Phi(1,-\mu) = 0\,, \qquad 0 < \mu \leq 1\,. \end{cases}$$

•Ce scaling suggère d'avoir recours à l'approximation par la diffusion

$$\Phi(x,\mu) \simeq \langle\Phi\rangle(x) - \frac{\epsilon}{\sigma}\mu\partial_x\langle\Phi\rangle(x) + \ldots$$

Moyennons le problème spectral par rapport à μ

$$-\partial_x\langle\mu\Phi\rangle + \epsilon\sigma\widehat{\gamma}\langle\Phi\rangle = \epsilon\widehat{\lambda}\langle\Phi\rangle$$

Puis, en remplaçant Φ par son approximation ci-dessus

$$\begin{cases} \frac{\epsilon}{3\sigma}\partial_x^2\langle\Phi\rangle + \epsilon\sigma\widehat{\gamma}\langle\Phi\rangle \simeq \epsilon\widehat{\lambda}\langle\Phi\rangle\,, \\ \\ \langle\Phi\rangle(-1) = \langle\Phi\rangle(+1) = 0\,, \end{cases}$$

•La **plus grande valeur propre** λ_{diff} du problème spectral

$$\begin{cases} \frac{1}{3\sigma}\partial_x^2 q(x) + \sigma\widehat{\gamma} q(x) = \lambda_{diff}\, q(x)\,, \\ \\ q(-1) = q(+1) = 0 \end{cases}$$

vaut $\sigma\widehat{\gamma} - \frac{1}{3\sigma}\lambda_1$ où $\lambda_1 = \frac{\pi^2}{4}$ est la plus petite valeur propre du problème aux valeurs propres de Dirichlet

$$\begin{cases} -\frac{d^2\phi}{dx^2}(x) = \lambda\phi(x)\,, \qquad |x| < 1 \\ \\ \phi(+1) = \phi(-1) = 0 \end{cases}$$

Donc

$$\lambda_{diff} = \sigma\widehat{\gamma} - \frac{\pi^2}{12\sigma}\,, \qquad q(x) = \cos(\tfrac{\pi}{2}x)$$

Estimation de la taille critique : $L \gg 1$, $\gamma \ll 1$ t.q. $\gamma = \widehat{\gamma}/L^2$

Dans les variables de départ,

$$L^2 \lambda_L(\sigma, \widehat{\gamma}/L^2) \simeq \lambda_{diff} = \sigma\widehat{\gamma} - \frac{\pi^2}{12\sigma},$$

La valeur propre principale de l'équation de Boltzmann linéaire vaut donc

$$\lambda_L(\sigma, \gamma) \simeq \sigma\gamma - \frac{\pi^2}{12\sigma L^2} + \dots,$$

•Valeur approchée de la taille critique pour la bande $[-L, L]$:

$$\lambda_L(\sigma, \gamma) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2L_c \simeq \frac{\pi}{\sqrt{3\gamma\sigma}}.$$