Sur le laplacien de Neumann semi-classique avec champ magnétique variable

Nicolas Raymond

Université Paris-Sud 11

Séminaire XEDP,
20 Octobre 2009

Plan

1. Introduction
   - Problème
   - Le cas du champ magnétique constant
   - Résultats connus (dans Ω)
2. La famille d'opérateurs $H(\theta)$
   - La fonction propre u_θ
   - Des formules...
3. Réduction à un opérateur modèle
   - Coordonnées normales près de x_0
   - Approximations de la métrique et du champ magnétique
4. Construction de quasimode
   - Transformation de Fourier et translation
   - Construction formelle

Plan

1. Introduction
   - Problème
   - Le cas du champ magnétique constant
   - Résultats connus (dans Ω)
2. La famille d'opérateurs $H(\theta)$
   - La fonction propre u_θ
   - Des formules...
3. Réduction à un opérateur modèle
   - Coordonnées normales près de x_0
   - Approximations de la métrique et du champ magnétique
4. Construction de quasimode
   - Transformation de Fourier et translation
   - Construction formelle

Plan

1. Introduction
   - Problème
   - Le cas du champ magnétique constant
   - Résultats connus (dans Ω)
2. La famille d'opérateurs $H(\theta)$
   - La fonction propre u_θ
   - Des formules...
3. Réduction à un opérateur modèle
   - Coordonnées normales près de x_0
   - Approximations de la métrique et du champ magnétique
4. Construction de quasimode
   - Transformation de Fourier et translation
   - Construction formelle

Le laplacien magnétique

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$ à bord régulier et $\mathbf{A} \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)$.
Dans cet exposé, nous nous intéressons à la réalisation de Neumann sur Ω de $(ih\nabla + \mathbf{A})^2$ notée $P^h_{\mathbf{A},\Omega}$.

Problème semi-classique

On souhaite étudier :

$$\lambda_1^h(\mathbf{A}, \Omega) \text{ quand } h \to 0.$$

L'invariance de jauge :

$$e^{-i\phi/h} P^h_{\mathbf{A},\Omega} e^{i\phi/h} = P^h_{\mathbf{A}+\nabla\phi,\Omega},$$

implique que le spectre de $P^h_{\mathbf{A},\Omega}$ ne dépend que du champ magnétique :

$$\boldsymbol{\beta} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

Plan

1. Introduction
   - Problème
   - Le cas du champ magnétique constant
   - Résultats connus (dans Ω)
2. La famille d'opérateurs $H(\theta)$
   - La fonction propre u_θ
   - Des formules...
3. Réduction à un opérateur modèle
   - Coordonnées normales près de x_0
   - Approximations de la métrique et du champ magnétique
4. Construction de quasimode
   - Transformation de Fourier et translation
   - Construction formelle

Cas $\mathbb{R}^3$: "Intérieur de Ω"

On considère la réalisation auto-adjointe sur $\mathbb{R}^3$ de

$$\mathcal{H} = (hD_r - s\|\boldsymbol{\beta}\|)^2 + h^2 D_s^2 + h^2 D_t^2.$$

On a :

$$\lambda_1^h(\mathbf{A}, \mathbb{R}^3) = h\|\boldsymbol{\beta}\|.$$

Cas $\mathbb{R}^3_+$: "Près du bord de Ω"

On considère la réalisation de Neumann ($h = 1$, $\|\boldsymbol{\beta}\| = 1$) sur $\mathbb{R}^3_+ = \{t > 0\}$ de

$$\mathcal{H}(\theta) = (D_r + t\cos\theta - s\sin\theta)^2 + D_s^2 + D_t^2.$$

On définit :

$$\sigma(\theta) = \inf \sigma(\mathcal{H}(\theta)). \tag{1.1}$$

Après renormalisation :

$$\lambda_1^h(\mathbf{A}, \mathbb{R}^3_+) = h\sigma(\theta)\|\boldsymbol{\beta}\|.$$

La fonction σ

Lemma ([LP99])

On a :

1. σ *est analytique sur* $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$,
2. σ *est strictement croissante sur* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,
3. $0 < \sigma(0) < 1$ *et* $\sigma\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Plan

1. Introduction
   - Problème
   - Le cas du champ magnétique constant
   - Résultats connus (dans Ω)
2. La famille d'opérateurs $H(\theta)$
   - La fonction propre u_θ
   - Des formules...
3. Réduction à un opérateur modèle
   - Coordonnées normales près de x_0
   - Approximations de la métrique et du champ magnétique
4. Construction de quasimode
   - Transformation de Fourier et translation
   - Construction formelle

Notation

Pour $x \in \partial\Omega$, on pose :

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}(x) = \sigma(\theta(x))\|\boldsymbol{\beta}(x)\|.$$

Premier terme de l'asymptotique

Théorème ([LP99])

On a :

$$\lambda_1^h(\boldsymbol{A},\Omega) = \min(\inf_{\Omega} \|\boldsymbol{\beta}(x)\|, \inf_{\partial\Omega} \hat{\boldsymbol{\beta}}(x))h + O(h^{5/4}).$$

À partir de maintenant, nous supposerons :

$$\inf_{\partial\Omega} \hat{\boldsymbol{\beta}} < \inf_{\Omega} \|\boldsymbol{\beta}(x)\|. \tag{1.2}$$

Cette inégalité est automatiquement satisfaite dans le cas du champ de norme constante.

Localisation près du bord

La condition (1.2) implique une localisation des fonctions propres associées à $\lambda_1^h(\mathbf{A}, \Omega)$:

Proposition ([HM04])

Soit u_h une fonction propre associée à $\lambda_1^h(\mathbf{A}, \Omega)$. Il existe $\alpha > 0$, $C > 0$ et $h_0 > 0$ tels que pour tout $0 < h \leq h_0$:

$$\int e^{\alpha h^{-1/2} t(x)} \{|u_h|^2 + h^{-1}|(ih\nabla + \mathbf{A})u_h|^2\} dx \leq C\|u_h\|^2,$$

où $t(x) = d(x, \partial\Omega)$.

Champ constant dans Ω

Sous des hypothèses génériques, on a :

Théorème ([HM04])

Si β est constant (et $\|\beta\| = 1$), on dispose de l'asymptotique à deux termes :

$$\lambda_1^h(\boldsymbol{A}, \Omega) = \sigma(0)h + \hat{\gamma}_0 h^{4/3} + O(h^{4/3+\eta}),$$

pour un certain $\eta > 0$ et où $\hat{\gamma}_0$ est connu explicitement.

Hypothèses

(1.3) $\hat{\beta}$ admet un minimum non-dégénéré en x_0.

(1.4) $$0 < \theta(x_0) = \theta < \frac{\pi}{2}.$$

(1.5) $$\inf_{\partial\Omega} \hat{\beta} < \inf_{\Omega} \|\beta(x)\|.$$

Un invariant

Considérons

$$\mathfrak{S}_\beta(r,s) = \frac{1}{2}\partial_r^2\hat{\beta}(x_0)r^2 + \frac{1}{2}\partial_{rs}^2\hat{\beta}(x_0)(rs+sr) + \frac{1}{2}\partial_s^2\hat{\beta}(x_0)s^2.$$

On introduit alors un opérateur capital :

$$\tilde{\mathfrak{S}}_\beta = \mathfrak{S}_\beta(D_\tau, \frac{\tau}{\sin\theta}).$$

Théorème principal

Théorème

Sous les hypothèses (1.3) et (1.4), il existe $d \in \mathbb{R}$ et $C^{\beta,K}(x_0)$ (une constante explicite) tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $D_n > 0$ et $h_n > 0$ tels que, pour $0 < h \leq h_n$, il existe une valeur propre μ_n de P_A^h telle que :

$$|\mu_n - (\hat{\beta}(x_0)h + C^{\beta,K}(x_0)\|\beta(x_0)\|^{1/2}h^{3/2} + (\gamma_n(\tilde{\mathfrak{S}}_\beta) + d)h^2)| \leq D_n h^{5/2},$$

où $\gamma_n(\tilde{\mathfrak{S}}_\beta)$ est la n-ième valeur propre de $\tilde{\mathfrak{S}}_\beta$.

Plan

1. Introduction
   - Problème
   - Le cas du champ magnétique constant
   - Résultats connus (dans Ω)
2. La famille d'opérateurs $H(\theta)$
   - La fonction propre u_θ
   - Des formules...
3. Réduction à un opérateur modèle
   - Coordonnées normales près de x_0
   - Approximations de la métrique et du champ magnétique
4. Construction de quasimode
   - Transformation de Fourier et translation
   - Construction formelle

Définition de l'opérateur réduit $H(\theta)$

Rappelons l'opérateur avec champ constant dans $\mathbb{R}^3_+$:

$$\mathcal{H}(\theta) = (D_r + t\cos\theta - s\sin\theta)^2 + D_s^2 + D_t^2.$$

Après transformation de Fourier en r, on obtient la famille dépendant de τ :

$$(\tau + t\cos\theta - s\sin\theta)^2 + D_s^2 + D_t^2.$$

Supposant $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ et effectuant la translation $s + \frac{\tau}{\sin\theta}$, nous sommes réduits à étudier la réalisation de Neumann sur $\mathbb{R}^2_+$ de

$$H(\theta) = (\cos\theta t - \sin\theta s)^2 + D_s^2 + D_t^2.$$

Plan

1. Introduction
   - Problème
   - Le cas du champ magnétique constant
   - Résultats connus (dans Ω)
2. La famille d'opérateurs $H(\theta)$
   - La fonction propre u_θ
   - Des formules...
3. Réduction à un opérateur modèle
   - Coordonnées normales près de x_0
   - Approximations de la métrique et du champ magnétique
4. Construction de quasimode
   - Transformation de Fourier et translation
   - Construction formelle

La valeur propre $\sigma(\theta)$

À partir de maintenant, nous supposons :

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Alors, on sait que :

$$\inf \sigma_{ess}(H(\theta)) = 1,$$

$$\sigma(\theta) \text{ est une valeur propre simple de } H(\theta).$$

On peut dès lors considérer la fonction positive et L^2-normalisée u_θ.

Décroissance exponentielle

u_θ satisfait (via le théorème de Persson : voir [FH09] et [Agm82]), pour $0 < \alpha < \sqrt{1-\sigma(\theta)}$:

$$\int_{\mathbb{R}^2_+} e^{\alpha\sqrt{s^2+t^2}} |u_\theta|^2 dsdt < +\infty.$$

Par une méthode de Grushin, on peut prouver que :

Proposition ([R.09])

u_θ appartient à la classe de Schwartz.

Plan

1. Introduction
   - Problème
   - Le cas du champ magnétique constant
   - Résultats connus (dans Ω)
2. La famille d'opérateurs $H(\theta)$
   - La fonction propre u_θ
   - Des formules...
3. Réduction à un opérateur modèle
   - Coordonnées normales près de x_0
   - Approximations de la métrique et du champ magnétique
4. Construction de quasimode
   - Transformation de Fourier et translation
   - Construction formelle

Boîte noire (1)

La fonction u_θ satisfait de nombreuses identités que nous devrons utiliser. Expliquons comment on obtient certaines d'entre elles. On a :

$$H(\theta)u_\theta = \sigma(\theta)u_\theta.$$

En dérivant par rapport à s, on trouve :

$$(H(\theta) - \sigma(\theta))\partial_s u_\theta = 2(\cos\theta t - \sin\theta s)u_\theta.$$

En multipliant par u_θ et en intégrant par parties, on obtient :

$$\int_{t>0} (\cos\theta t - \sin\theta s)|u_\theta|^2 dsdt = 0.$$

Boîte noire (2)

On introduit un paramètre d'échelle ρ et on considère :

$$H(\theta,\rho) = \frac{1}{\rho}(D_s^2 + D_t^2) + \rho(\cos\theta t - \sin\theta s)^2.$$

Appliquons l'opérateur $j(\theta,\rho) = \sigma'(\theta)\partial_\rho - \frac{\sigma(\theta)}{\rho}\partial_\theta$ à (combinaison du théorème du viriel et de la formule de Feynman-Hellmann) :

$$H(\theta,\rho)u_{\theta,\rho} = \sigma(\theta)u_{\theta,\rho}$$

et on obtient une solution w_0 de :

$$(H(\theta) - \sigma(\theta))w_0 = -2\sigma' V_\theta^2 u_\theta + 2\sigma V_\theta \partial_\theta V_\theta u_\theta,$$

où $V_\theta = \cos\theta t - \sin\theta s$.

Intermède

L'opérateur $\mathcal{H}(\theta)$ avec champ constant dans $\mathbb{R}^3_+$ peut être réduit à $H(\theta)$ dans $\mathbb{R}^2_+$ dont l'état fondamental u_θ est dans la classe de Schwartz et permet de construire de nombreuses solutions à des équations de la forme :

$$(H(\theta) - \sigma(\theta))f = g.$$

Plan

1. Introduction
   - Problème
   - Le cas du champ magnétique constant
   - Résultats connus (dans Ω)
2. La famille d'opérateurs $H(\theta)$
   - La fonction propre u_θ
   - Des formules...
3. Réduction à un opérateur modèle
   - Coordonnées normales près de x_0
   - Approximations de la métrique et du champ magnétique
4. Construction de quasimode
   - Transformation de Fourier et translation
   - Construction formelle

Intermède

Rappelons nos hypothèses pincipales :

(3.6) $\hat{\beta}$ admet un minimum non-dégénéré en x_0.

(3.7) $$0 < \theta(x_0) = \theta < \frac{\pi}{2}.$$

(3.8) $$\inf_{\partial\Omega} \hat{\beta} < \inf_{\Omega} \|\beta(x)\|.$$

Avec les estimées de Agmon, on peut prouver que les fonctions propres associées à $\lambda_1^h(\mathbf{A})$ sont localisées près de x_0 en un certain sens (mais à l'échelle $h^{1/2}$ dans la variable normale).

Plan

1. Introduction
   - Problème
   - Le cas du champ magnétique constant
   - Résultats connus (dans Ω)
2. La famille d'opérateurs $H(\theta)$
   - La fonction propre u_θ
   - Des formules...
3. Réduction à un opérateur modèle
   - Coordonnées normales près de x_0
   - Approximations de la métrique et du champ magnétique
4. Construction de quasimode
   - Transformation de Fourier et translation
   - Construction formelle

Coordonnées (r, s, t) près x_0

L'application exponentielle fournit des coordonnées normales (r, s, t) près de x_0. Si on note Φ le difféomorphisme correspondant, on obtient la réalisation de Neumann sur $L^2(|\det D\Phi^{-1}|dy)$ de :

$$(3.9) \quad \tilde{P}^h_{\mathbf{A}} = |\det D\Phi| \sum_{k,j} (ih\nabla_j + \tilde{A}_j)|\det D\Phi^{-1}|g^{kj}(ih\nabla_k + \tilde{A}_k),$$

où (g^{kj}) est la métrique duale induite et où :

$$A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3 = \tilde{A}_1 dr + \tilde{A}_2 ds + \tilde{A}_3 dt.$$

Plan

1. Introduction
   - Problème
   - Le cas du champ magnétique constant
   - Résultats connus (dans Ω)
2. La famille d'opérateurs $H(\theta)$
   - La fonction propre u_θ
   - Des formules...
3. Réduction à un opérateur modèle
   - Coordonnées normales près de x_0
   - Approximations de la métrique et du champ magnétique
4. Construction de quasimode
   - Transformation de Fourier et translation
   - Construction formelle

Approchant la métrique et le champ magnétique par leurs approximations de Taylor à l'ordre 2, on obtient un opérateur $\mathcal{H}^{\mathcal{M}}$ tel que pour tout ψ convenable, on a :

$$\|\tilde{P}^h_{\mathbf{A}}\psi - \mathcal{H}^{\mathcal{M}}\psi\| \leq Ch^2 \sum_{k,j} \|(|r|^3 + |s|^3 + t^3)|D_k D_j \psi|\|$$
$$+Ch\|(|r|^3 + |s|^3 + t^3)|\psi|\| + Ch \sum_j \|(r^4 + s^4 + t^4)|D_j\psi|\|$$
$$+C\|(|r|^5 + |s|^5 + t^5)|\psi|\|.$$

Plan

1. Introduction
   - Problème
   - Le cas du champ magnétique constant
   - Résultats connus (dans Ω)
2. La famille d'opérateurs $H(\theta)$
   - La fonction propre u_θ
   - Des formules...
3. Réduction à un opérateur modèle
   - Coordonnées normales près de x_0
   - Approximations de la métrique et du champ magnétique
4. Construction de quasimode
   - Transformation de Fourier et translation
   - Construction formelle

On commence par changer d'échelle :

$$t = h^{1/2}\tilde{t}, s = h^{1/2}\tilde{s}, r = h^{1/2}\tilde{r}. \tag{4.10}$$

On omet les tildes, on divise par h et, au lieu de $\mathcal{H}^{\mathcal{M}}$, on considère :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{h,new} = n^h_{app} D_t m^h_{app} D_t + f^h_{11}(D_r + \overline{A}^h_r)^2 + f^h_{22}(D_s + \overline{A}^h_s)^2 \\ + f^h_{12}(D_r + \overline{A}^h_r)(D_s + \overline{A}^h_s) + f^h_{12}(D_s + \overline{A}^h_s)(D_r + \overline{A}^h_r) \\ + h\tilde{R}_1(r,s,t)D_r + h\tilde{R}_2(r,s,t)D_s.\end{aligned}$$

Plan

1. Introduction
   - Problème
   - Le cas du champ magnétique constant
   - Résultats connus (dans Ω)
2. La famille d'opérateurs $H(\theta)$
   - La fonction propre u_θ
   - Des formules...
3. Réduction à un opérateur modèle
   - Coordonnées normales près de x_0
   - Approximations de la métrique et du champ magnétique
4. Construction de quasimode
   - Transformation de Fourier et translation
   - Construction formelle

Grossièrement, on peut écrire :

$$\mathcal{H}^{h,new} = \mathcal{H}(\theta) + O(h^{1/2}).$$

Pour obtenir $H(\theta)$ comme premier terme de l'asymptotique de l'opérateur, on effectue une transformation de Fourier $\mathcal{F}$ en r et la translation U_θ :

$$s + \frac{\tau}{\sin\theta}.$$

On obtient $H^{h,new}$ qui est unitairement équivalent à $\mathcal{H}^{h,new}$:

$$H^{h,new} = U_\theta^{-1}\mathcal{F}^{-1}\mathcal{H}^{h,new}\mathcal{F}U_\theta.$$

Plan

1. Introduction
   - Problème
   - Le cas du champ magnétique constant
   - Résultats connus (dans Ω)
2. La famille d'opérateurs $H(\theta)$
   - La fonction propre u_θ
   - Des formules...
3. Réduction à un opérateur modèle
   - Coordonnées normales près de x_0
   - Approximations de la métrique et du champ magnétique
4. Construction de quasimode
   - Transformation de Fourier et translation
   - Construction formelle

Développement de $H^{h,new}$

On développe $H^{h,new}$ en puissances de $h^{1/2}$:

$$H^{h,new} = \sum_{j=0}^{+\infty} h^{j/2} H_j$$

On cherche un quasimode sous forme de série formelle en puissances de $h^{1/2}$:

$$u^h = \sum_{j=0}^{+\infty} h^{j/2} u_j$$

associée à une valeur propre sous la forme :

$$\lambda_1^h = \sum_{j=0}^{+\infty} h^{j/2} \lambda_j.$$

Système

On est conduit au système :

$$\begin{aligned} h^0 : \quad & H_0 u_0 = \lambda_0 u_0, \\ h^{1/2} : \quad & H_1 u_0 + H_0 u_1 = \lambda_1 u_0 + \lambda_0 u_1, \\ h : \quad & H_2 u_0 + H_1 u_1 + H_0 u_2 = \lambda_2 u_0 + \lambda_1 u_1 + \lambda_0 u_2. \end{aligned}$$

Coefficient de h^0

Rappelons que $H_0 = H(\theta)$ est un opérateur en s et t. On est ainsi amené à choisir $\lambda_0 = \sigma(\theta)$ et :

$$u_0(\tau, s, t) = \phi_0(\tau) u_\theta(s, t)\,, \tag{4.11}$$

avec ϕ_0 (de norme 1) à determiner.

Coefficient de $h^{1/2}$ (1)

On veut résoudre :

$$(H(\theta) - \sigma(\theta))u_1 = \lambda_1 u_0 - H_1 u_0,$$

avec λ_1 le plus petit possible.
On peut résoudre cette équation ssi

$$< \lambda_1 u_0 - H_1 u_0 >_{L^2(\mathbb{R}^2_+)} = 0.$$

Coefficient de $h^{1/2}$ (2)

On obtient une équation satisfaite par ϕ_0 sous la forme :

$$\mathfrak{A} D_\tau \phi_0 + \mathfrak{B} \tau D_\tau \phi_0 + \mathfrak{C} \tau \phi_0 + \mathfrak{D} \tau^2 \phi_0 + \mathfrak{E} \phi_0 = 0.$$

Les formules de la boîte noire fournissent (en utilisant que $\nabla_{r,s} \hat{\beta} = 0$) :

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{C} = \mathfrak{D} = 0,$$

et ainsi $\mathfrak{E} = 0$ et cela détermine un unique λ_1, sans déterminer ϕ_0 !
La même boîte noire fournit aussi un choix explicite de u_1 (dans la classe de Schwartz).

Coefficient de h (1)

On cherche u_2 et λ_2 (le plus petit possible) tels que :

$$(H(\theta) - \sigma(\theta))u_2 = \lambda_2 u_0 + \lambda_1 u_1 - H_2 u_0 - H_1 u_1.$$

Comme précédemment on analyse la condition :

$$< \lambda_2 u_0 + \lambda_1 u_1 - H_2 u_0 - H_1 u_1, u_\theta >_{L^2(\mathbb{R}^2_+)} = 0.$$

Coefficient de h (2)

Cette condition peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}(A_1\tau^2 D_\tau^2 + A_2\tau^4 + A_3\tau^3 D_\tau + A_4\tau D_\tau^3\tau + A_5\tau D_\tau^2 + A_6\tau^2 D_\tau + A_7\tau^3 \\ + A_8 D_\tau^3 + A_9 D_\tau^2 + A_{10}\tau D_\tau + A_{11}\tau^2 \\ + A_{12} D_\tau + A_{13}\tau + A_{14})\phi_0 = \lambda_2\phi_0.\end{aligned}$$

Coefficient de h (3)

Quelques calculs plus tard, on trouve :

$$A_i = 0 \quad \forall i \in \{1, \cdots, 8\}. \tag{4.12}$$

Remplaçant formellement τ par s et D_τ par r, on souhaiterait voir apparaître la hessienne de $\hat{\beta}$! En fait, on a :

$$A_9 = \frac{1}{2\sin^2\theta}\partial_s^2\hat{\beta}(x_0),$$

$$A_{10} = \frac{1}{2}\partial_r^2\hat{\beta}(x_0),$$

$$A_{11} = \frac{1}{\sin\theta}\partial_{rs}^2\hat{\beta}(x_0).$$

Coefficient of h (4)

λ_2 est donc une valeur propre (décalée) de $\tilde{\mathfrak{S}}_\beta$. ϕ_0 est une fonction propre associée (qui est dans la classe de Schwartz !). Pour chaque valeur de λ_2, on considère donc le quasimode :

$$\psi = \chi \left\{ \mathcal{F}^{-1} U_\theta^{-1} (u_0 + h^{1/2} u_1 + h u_2) \right\} (h^{-1/2} r, h^{-1/2} s, h^{-1/2} t).$$

Fin de la preuve

Avec la décroissance exponentielle de ψ, on trouve d'abord :

$$\|\tilde{P}^h_{\mathbf{A}}\psi - \mathcal{H}^{\mathcal{M}}\psi\| \leq Ch^{5/2}.$$

et ensuite :

$$\|(\mathcal{H}^{\mathcal{M}} - (\lambda_0 h + \lambda_1 h^{3/2} + (\gamma_n(\tilde{\mathfrak{S}}_\beta) + d)h^2))\psi\|_{L^2(m_{app}drdsdt)} = O(h^{5/2}).$$

Rassemblant toutes les estimations, on trouve :

$$\|(P^h_{\mathbf{A}} - (\lambda_0 h + \lambda_1 h^{3/2} + (\gamma_n(\tilde{\mathfrak{S}}_\beta) + d)h^2))\psi\|_{L^2} = O(h^{5/2}).$$

Conjectures

Nous savons que, si u_h est une fonction propre associée à $\lambda_1^h(\mathbf{A}, \Omega)$, alors elle est localisée près du bord dans un voisinage de taille $h^{1/2}$. L'échelle de localisation tangentielle près de x_0 n'est pas encore connue, mais on conjecture que (travail en cours avec M. Persson) :

- s est de l'ordre de $h^{1/2}$ (argument heuristique, bientôt numérique...),
- r est de l'ordre de $h^{1/2}$.

Cette connaissance de la localisation serait fort utile pour prouver une minoration du type :

$$\lambda_1^h(\mathbf{A}, \Omega) \geq \hat{\beta}(x_0)h - Ch^{3/2}$$

et améliorer simultanément les estimées de localisation.

S. Agmon.
Lectures on exponential decay of solutions of second-order elliptic equations : bounds on eigenfunctions of N-body Schrödinger operators.
Princeton University Press, 1982.

S. Fournais and B. Helffer.
Spectral methods in surface superconductivity.
To appear, 2009.

B. Helffer and A. Morame.
Magnetic bottles for the Neumann problem : curvature effects in the case of dimension 3 (general case).
Ann. Scient. E. Norm. Sup, 37(4):105–170, 2004.

K. Lu and X.-B. Pan.
Eigenvalue problems of Ginzburg-Landau in bounded domains.
J. Math. Phys., 40(6):2647–2670, 1999.

R.
On the semi-classical 3D Neumann Laplacian with variable magnetic field.
Submitted to Asymptotic Analysis, 2009.