Ecole Polytechnique
Formation préparatoire

Corrigé de la feuille 1

Exercice 1. On note $n = dim(E)$. Soit $k = dim\ Ker(f)$. Il faut montrer qu'une base de $Im\ f$ est composée de $n-k$ vecteurs.

Soit $(e_1, \dots e_k)$ une base de $Ker(f)$ que l'on complète en $(e_1, \dots e_n)$ une base de E (Théorème de la base incomplète).

Tout x de E s'écrit $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots x_ne_n$ et donc $f(x) = x_{k+1}f(e_{k+1}) + \dots x_nf(e_n)$ puisque $f(e_i) = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant k$. La famille $(f(e_{k+1}), \dots, f(e_n))$ est donc une famille génératrice de $Im(f)$.

Montrons que cette famille est libre. Soit $a_{k+1}, \dots a_n$ tels que $a_{k+1}f(e_{k+1}) + \dots a_nf(e_n) = 0$. Comme f est linéaire ceci donne $f(a_{k+1}e_{k+1} + \dots a_ne_n) = 0$. Ainsi, le vecteur $a_{k+1}e_{k+1} + \dots a_ne_n$ appartient à $Ker(f)$. Puisque que $(e_1, \dots e_k)$ est une base de $Ker(f)$, il existe $a_1, \dots a_k$ tels que $a_{k+1}e_{k+1} + \dots a_ne_n = a_1e_1 + \dots a_ke_k$. Comme la famille $(e_1, \dots e_n)$ est libre, on obtient $a_1 = a_2 = \dots = a_k = a_{k+1} = \dots a_n = 0$.

On conclut donc que $(f(e_{k+1}), \dots, f(e_n))$ est une base de $Im(f)$ et donc $dim\ Im(f) = n - k = dim(E) - dim\ Ker(f)$.

Exercice 2. Pour $v \in V$, on a $f^2(v) = f[f(v)]$ et donc on a toujours $Im(f^2) \subset Im(f)$ et $Ker(f) \subset Ker(f^2)$.

Montrons (1) $\Rightarrow$ (2). Soit $v = f(w) \in Im(f)$. Par (1), on écrit $w = w_1 + w_2$ avec $w_1 \in Ker(f)$ et $w_2 \in Im(f)$. On obtient alors $v = f(w_2) \in Im(f^2)$ ce qui donne $Im(f) \subset Im(f^2)$. Comme, on a toujours $Im(f^2) \subset Im(f)$, on obtient (2).

Montrons (2) $\Rightarrow$ (3). L'hypothèse (2) donne $dim\ Im(f) = dim\ Im(f^2)$ et donc $dimKer(f) = dim\ V - dim\ Im(f) = dimKer(f^2)$. Comme, on a toujours $Ker(f) \subset Ker(f^2)$, on obtient l'égalité ce qui donne (3).

Montrons (3) $\Rightarrow$ (1). Comme $dimKer(f) + dim\ Im(f) = dim\ V$, il suffit de montrer $Ker(f) \cap Im(f) = \{0\}$. Soit $v \in Ker(f) \cap Im(f)$. Il existe $y \in V$ tel que $x = f(y)$. Comme $x \in Ker(f)$, on a $y \in Ker(f^2) = Ker(f)$ et donc $x = f(y) = 0$.

Exercice 3. Soit $k \in \mathbb{N}$. Le théorème du rang appliqué aux fonctions f^k et f^{k+1} donne que :

$$dim\ Imf^k + dim\ Ker\ f^k = dim(E) = dim\ Imf^{k+1} + dim\ Ker\ f^{k+1}.$$

Ainsi les suites (u_k) et (v_k) sont égales. Montrons donc par exemple que (u_n) vérifie les propriétés cherchées.

On applique le théorème du rang à la restriction $f_{|Imf^k}$ de f à Imf^k. Par définition de Imf^{k+1}, on a : $Imf^{k+1} = Im(f_{|Imf^k})$. Comme $Ker(f_{|Imf^k}) = Kerf \cap Imf^k$, on obtient :

$$dim\ Imf^k = dim\ Imf^{k+1} + dim(Kerf \cap Imf^k).$$

Et donc :

$$u_k = dim\ Imf^k - dim\ Imf^{k+1} = dim(Kerf \cap Imf^k) \geqslant 0.$$

L'inclusion évidente $Imf^{k+1} \subset Imf^k$ donne alors que la suite (u_k) est décroissante.
Notons que si $Imf^{k+1} = Imf^k$ alors la restriction $f_{|Imf^k}$ de f à Imf^k est alors surjective de Imf^k dans lui-même, donc injective, ce qui implique $u_k = dim(Kerf \cap Imf^k) = 0$.
Si la suite $(u_k)_k$ ne tendait pas vers 0, alors elle serait toujours supérieure ou égale à 1. Alors on aurait une suite infinie strictement décroissante d'espaces vectoriels : $E = Imf^0 \supsetneq Imf \supsetneq \ldots \supsetneq Imf^k \supsetneq \ldots$
Ceci est impossible, car E est de dimension finie.

Exercice 4. Si $\varphi(P) = 0$ alors $P(X+1) = P(X)$. Montrons par l'absurde que P est un polynôme constant. Si P n'est pas constant, il admet une racine x_0 dans $\mathbb{C}$. Mais dans ce cas $P(x_0+1) = P(x_0) = 0$ et donc, $x_0 + 1$ est également une racine de P. En recommençant, on obtient que pour tout entier k, le nombre complexe $x_0 + k$ est une racine de P et donc P aurait une infinité de racines ce qui n'est pas possible (sur $\mathbb{C}$, un polynôme de degré N a au plus N racines).

Donc si $\varphi(P) = 0$ alors P est un polynôme constant, et donc le noyau de φ est

$$Ker(\varphi) = \mathbb{C}.$$

Une famille génératrice de $Im(\varphi)$ est donnée par l'image d'une base de $\mathbb{C}_n[X]$. On a $\varphi(1) = 0$ et pour $k \geqslant 1$, on a $\varphi(X^k)$ est un polynôme de degré $k-1$. Donc, on a

$$Im(\varphi) \subset \{a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots a_{n-1}X^{n-1}; a_j \in \mathbb{C}\}.$$

On a $dim\ Im(\varphi) = dim\mathbb{C}_n[X] - dimKer\varphi = n$. L'inclusion précédente permet donc de conclure :

$$Im(\varphi) = \mathbb{C}_{n-1}[X] = \{a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots a_{n-1}X^{n-1}; a_j \in \mathbb{C}\}.$$

(si F et G sont deux sous-espaces vectoriels tels que $F \subset G$ et $dim\ F = dim\ G$ alors $F = G$).

Exercice 5. L'implication $(b) \Longrightarrow (a)$ est immédiate.

Montrons l'implication $(a) \Longrightarrow (b)$. On suppose donc que $Ker(f) = Ker(g)$. Il y a deux possibilités : en effet, comme $Im(f) \subset \mathbb{R}$, on a $dim\ Im(f) = 0$ ou 1.

1. Si $dim\ Im(f) = dim\ Im(g) = 0$ alors $Ker(f) = Ker(g) = \mathbb{R}^n$. Ainsi, f et g sont identiquement nulles, elles sont donc égales.

2. Si $dim\ Im(f) = dim\ Im(g) = 1$ alors $Im(f) = Im(g) = \mathbb{R}$ et $dim\ Ker(f) = dim\ Ker(g) = n-1$. Il existe donc $u \in \mathbb{R}^n$ tel que $u \notin Kerf = Kerg$. Ainsi, on a $f(u) \neq 0$ et $g(u) \neq 0$. On obtient la décomposition $\mathbb{R}^n = Kerf \oplus \mathbb{R}u$ avec $Kerg = Kerf$ par hypothèse. On a alors $f(x) = \dfrac{f(u)}{g(u)}g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et donc $\lambda = \dfrac{f(u)}{g(u)} \neq 0$ convient.

Exercice 6. Le polynôme caractéristique C_m de $A(m)$ est $C_m(X) = (1-X)(2-X)(m-X)$.
1er cas. $m \neq 1$ et $m \neq 2$. Dans ce cas, la matrice $A(m)$ a trois valeurs distinctes réelles, donc elle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Son polynôme minimal est $-C_m(X)$.

On a $Ker(A(m) - I_3) = \mathbb{R}(e_1 + e_2)$, $Ker(A(m) - 2I_3) = \mathbb{R}(e_1 + e_3)$ et $Ker(A(m) - mI_3) = \mathbb{R}(e_1 + e_2 + (m-1)e_3)$. On a donc $A(m) = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & m-1 \end{pmatrix}$ et
$P^{-1} = \dfrac{1}{1-m}\begin{pmatrix} -1 & 2-m & 1 \\ 1-m & m-1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

ATTENTION. L'ordre des colonnes de P a une importance, par exemple, on a $A(m) = P_0 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} P_0^{-1}$ avec $P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & m-1 \end{pmatrix}$.

2ème cas. $m = 1$. On a $A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Son polynôme carcatériqtique est $(1-X)^2(2-X)$ et 1 est une valeur propre double. On a $(A(1) - Id)(xe_1 + ye_2 + ze_3) = 0$ si et seulement si $z = 0$ et $x - y + z = 0$. Donc $Ker(A(1) - Id) = \mathbb{R}(e_1 + e_2)$ est de dimension 1. La matrice $A(1)$ n'est pas diagonalisable. Son polynôme minimal est $-C_1(X)$.

3ème cas. $m = 2$. On a $A(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et 2 est une valeur propre double. On a $(A(2) - 2Id)(xe_1 + ye_2 + ze_3) = 0$ si et seulement si $x = z$ et donc $Ker(A(2) - 2Id) = \mathbb{R}(e_1 + e_3) + \mathbb{R}e_2$ est de dimension 2. La matrice $A(2)$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et son polynôme minimal est $(X-1)(X-2)$.

On a $Ker(A(2) - 2Id) = \mathbb{R}(e_1 + e_2)$ et donc $A(2) = P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 7. Soit $C_{M(a)}(X)$ le polynôme caractéristique de $M(a)$. On a

$$C_{M(a)}(X) = (2-X)(1-X)(2a-X) + (1-a)^2(1-X) = (1-X)(X-(a+1))^2.$$

<u>1er cas : $a = 0$</u>. Dans ce cas, 1 est valeur propre triple de $M(0)$. Comme $M(0)$ n'est pas la matrice identité, $M(0)$ n'est pas diagonalisable.

<u>1ème cas : $a \neq 0$</u>. Dans ce cas, 1 est valeur propre simple et $a+1$ est valeur propre double. On a

$$M(a) - (a+1)Id = \begin{pmatrix} 1-a & 0 & 1-a \\ -1 & -a & a-1 \\ a-1 & 0 & a-1 \end{pmatrix}.$$

Si $a \neq 1$ alors $rg(M(a) - (a+1)Id) = 2$, donc $M(a)$ n'est pas diagonalisable.

Si $a = 1$ alors $rg(M(1) - (2)Id) = 1$ donc $M(a)$ est diagonalisable. Dans ce cas

$$Ker(M(1) - 2Id) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et

$$Ker(M(1) - Id) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$M(1) = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8.

1. Montrons que la famille $(\varphi_0, \ldots, \varphi_n)$ est libre. Supposons $\alpha_0\varphi_0 + \ldots + \alpha_n\varphi_n = 0$. En évaluant ceci sur $R_i(X) = \prod_{j\neq i}(X - a_j)$, on obtient $\alpha_i(a_i - a_j) = 0$ ce qui donne $\alpha_i = 0$.
2. Avec les notations précédentes, on a $\varphi_i(R_j) = 0$ pour $i \neq j$ et $\varphi_i(R_i) = \prod_{j\neq i}(a_i - a_j)$. Il suffit donc de prendre
$$P_i(X) = \frac{\prod_{j\neq i}(X - a_j)}{\prod_{j\neq i}(a_i - a_j)}.$$

Exercice 9. On note $\mathcal{B}$ la famille $(v, f(v), \ldots f^{n-1})$.

I.1. Pour $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, on a $f[f^k(v)] = f^{k+1}(v)$ et $f^n(v) = a_0v + a_1f(v) + \ldots f^{n-1}(v)$. Donc pour tout élément $w \in \mathcal{B}$, on a $f(w) \in W$. On en déduit que W est stable par f.

I.2. La matrice de f_W dans la base $\mathcal{B}$ est

$$A_W := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & & a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & & & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Donc

$$C_{f_W}(X) = det(A_W - XI_n) = (-1)^n(X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \ldots - a_0).$$

I.3. Par définition de $C_{f_W}(f_W)$ et la question précédente, on a

$$C_{f_W}(f_W) = (-1)^n[f_W^n - a_{n-1}f_W^{n-1} - \ldots - a_1f_W - a_0Id].$$

Il faut montrer que, pour tout $w \in W$ on a $C_{f_W}(f_W)(w) = 0$. Il suffit de le vérifier pour $w \in \mathcal{B}$. Soit $k \in \{1, \ldots n-1\})$. On a :

$$\begin{aligned} C_{f_W}(f_W)(f^k(v)) &= (-1)^n[f^n\big(f^k(v)\big) - a_{n-1}f^{n-1}\big(f^k(v)\big) - \ldots - a_1f\big(f^k(v)\big) - a_0\big(f^k(v)\big) \\ &= (-1)^n f^k\Big[f^n(v) - a_{n-1}f^{n-1}(v) - \ldots a_1f(v) - a_0v\Big] = 0. \end{aligned}$$

On en déduit que $C_{f_W}(f_W) = 0$.

I.4. On complète la famille $\mathcal{B}$ est une base $\mathcal{B}_E$ de E. La matrice de f dans la base $\mathcal{B}_E$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} A_W & B \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

On a donc $C_f(X) = C_{f_W}(X)det(D - XId)$, et donc C_{f_W} divise C_f.

II. Il faut démontrer que pour tout $v \in E$ on a $C_f(f)(v) = 0$. Ceci est immédiat pour $v = 0$. Si $v \neq 0$, on fixe n et W comme dans I. Par I.4., il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $C_f(X) = Q(X)C_{f_W}(X)$ et donc $C_f(v) = Q(f)\Big(C_{f_W}(f_W)(v)\Big)$. Ceci est nul par la question I.3. On conclut donc que $C_f(f) = 0$;

Exercice 10. 1) Soit E_λ le sous-espace propre associé à la valeur propre λ de f. On veut montrer que : si $v \in E_\lambda$ alors $g(v) \in E_\lambda$.

Soit $v \in E_\lambda$. On a alors $f\big(g(v)\big) = f \circ g(v) = g \circ f(v) = \lambda g(v)$ ce qui donne le résultat voulu.

2) On considère la restriction g_0 de g à E_λ, c'est-à-dire

$$g_0 : \left\{ \begin{array}{ccc} E_\lambda & \rightarrow & E_\lambda \\ v & \mapsto & g(v) \end{array} \right.$$

Puisque g est diagonalisable, le polynôme minimal M_g de g est scindé avec des racines simples et on a $M_g(g_0) = 0$. On a donc g_0 est diagonalisable.

Ainsi, il existe une base $(v_1, \dots v_m)$ de E_λ formé de vecteurs propres pour g.

3) On vient donc de montrer que, pour toute valeur propre λ, il existe une base $(v_1, \dots v_m)$ du sous-espace propre E_λ (donc ce sont des vecteurs propres pour f associés à λ) formé de vecteurs propres pour g.

Comme f est diagonalisable, l'espace V est la somme directe des sous-espaces propres pour f. On construit ainsi une base de V dont tous les éléments sont des vecteurs propres pour f et pour g.

4) Si $dim(V) = 1$ alors, pour tout $i \in I$, f_i est une homothétie ($= \lambda Id$) et donc le résultat est immédiat.

Supposons le résultat vrai pour tout espace vectoriel de dimension plus petit ou égal à n et supposons $dim(V) = n + 1$.

1er cas. Si tous les f_i sont des homothéties, le résultat est immédiat.

2ème cas. On suppose que l'un des f_i n'est pas une homothétie. On le note f_0. Comme f_0 est diagonalisable, il admet une valeur propre λ. Soit $E_\lambda = Ker(f_0 - \lambda Id)$. Comme f_0 n'est pas une homothétie on a $E_\lambda \neq V$ et donc $dim(E_\lambda) < n + 1$.

D'après la question 1), pour tout $i \in I$, l'espace E_λ est stable par f_i et la restriction de f_i à E_λ est encore diagonalisable et commute à λId qui est la restriction de f_0 à E_λ.

Par hypothèse de récurrence, il existe donc une base de E_λ formée de vecteurs propres pour tous les f_i.

Comme f_0 est diagonalisable, l'espace V est somme directe des sous-espaces propres de f_0. En choisissant une base comme ci-dessus pour chacun d'eux, on obtient une base de V formé de vecteurs propres pour tous les f_i.

Exercice 11. On rappelle que G est sous-groupe de $GL(n, \mathbb{R})$ si et seulement si pour tout A et B de G alors $AB^{-1} \in G$. Par hypothèse, pour tout $A \in G$, on $A^2 = Id$ ce qui équivaut à $A = A^{-1}$. On applique ceci à AB, donc

$$AB = (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = BA.$$

Donc G est commutatif. Si $A \in G$, comme $A^2 = Id$, la matrice A est annulé par $(X - 1)(X + 1)$ dont les racines sont simples, donc A est diagonalisable et les valeurs propres de A appartiennent à $\{\pm 1\}$. Comme G est commutatif, on déduit que toutes les matrices de G sont simultanément diagonalisables, c'est-à-dire

Il existe $P \in GL(n, \mathbb{R})$ telle que, pour tout $A \in G$, on a PAP^{-1} est une matrice diagonale.

Comme les seules valeurs propres des éléments de G sont 1 ou -1, on en déduit que G a au plus 2^n éléments.

Exercice 12. 1) Si f est nilpotent, il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $f^r = 0$. Si $v \neq 0$ est un vecteur propre associé à la valeur propre λ pour f et , on a $f(v) = \lambda v$ et donc $f^r(v) = \lambda^r v = 0$. Comme $v \neq 0$, on obtient $\lambda = 0$. Ainsi la seule valeur propre de f est 0 et donc $C_f = (-X)^n$. Maintenant supposons $C_f = (-X)^n$. Par le théorème de Cayley-Hamilton le polynôme minimal M_f de f divise C_f. Il existe donc $r \in \mathbb{N}$ tel que $M_f = X^r$. Par définition du polynôme minimal, on a $M_f(f) = 0$ ce qui donne $f^r = 0$. L'endomorphisme f est donc nilpotent.

2) a) Comme $f^{n-1} \neq 0$, il existe un vecteur $v \neq 0$ tel que $f^{n-1} \neq 0$. Montrons que $(v, f(v), \ldots f^{n-1}(v))$ est une base de E.

Soit $\lambda_0, \ldots \lambda_{n-1}$ des réels tels que $\lambda_0 v + \lambda_1 f(v) + \ldots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(v) = 0$. On applique successivement f à cette égalité. Comme $f^n = 0$, on obtient :

$$\begin{array}{l} \lambda_0 v + \lambda_1 f(v) + \ldots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(v) = 0 \\ \lambda_0 f(v) + \lambda_1 f^2(v) + \ldots + \lambda_{n-2} f^{n-1}(v) = 0 \\ \vdots \\ \lambda_0 f^{n-2}(v) + \lambda_1 f^{n-1}(v) = 0 \\ \lambda_0 f^{n-1}(v) = 0 \end{array} .$$

Ainsi, comme $f^{n-1}(v) \neq 0$, on obtient $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-1} = 0$. Ainsi, la famille $(v, f(v), \ldots f^{n-1}(v))$ est libre. Comme elle est de même cardinal que E, on en déduit que c'est une base de E.

2) b) La matrice de f dans la base $(v, f(v), \ldots, f^{n-1}(v))$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & & \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & \\ \vdots & & & & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le rang de f est $n - 1$.

2) c) Soit g un endomorphisme qui commute à f. On choisit v comme en 2) a) et on pose

$$g(v) = a_0 v + a_1 f(v) + \ldots a_{n-1} f^{n-1}(v).$$

Montrons que $g = P(f)$ où $P(X) = a_0 + a_1 X + \ldots a_{n-1} X^{n-1}$. On a $g[f^k(v)] = f^k[g(v)]$ car f et g commutent. Donc, on obtient $g[f^k(v)] = a_0 f^k(v) + a_1 f[f^k(v)] + \ldots f^{n-1}[f^k(v)] = P(f)[f^k(v)]$. Comme g et $P(f)$ prennent les mêmes valeurs sur les éléments de la base $(v, f(v), \ldots, f^{n-1}(v))$, ils sont égaux.

Réciproquement, si $g = Q(f)$ pour un polynôme Q, il est clair que g commute à f.

3) Par hypothèse, on a $dim\ V_0 = n - 1$. Comme $V_0 = f(V)$, on a $f(V_0) \subset V_0$.Soit f_0 la restriction de f à V_0. Comme $f^n = 0$, on a $f_0^n = 0$ et donc f_0 est un endomorphisme nilpotent de V_0.

On a immédiatement $Ker(f_0) \subset Ker(f)$. Comme $dim\ Ker(f) = 1$ puisque f est de rang $n-1$, on a soit $Ker(f_0) = \{0\}$ soit $Ker(f_0) = Ker(f)$. Si on avait $Ker(f_0) = \{0\}$, l'endomorphisme f_0 serait bijectif ce qui est impossible puisqu'il est nilpotent. On obtient donc $Ker(f_0) = Ker(f)$.

Le rang de f_0 est $dim(V_0) - dim\ Ker(f_0) = n - 2$.

4) On a vu en 2) que $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow c)$.

Montrons par récurrence sur n que si f est un endomorphisme nilpotent de V de rang $n - 1$ alors $f^{n-1} \neq 0$. D'après 3), l'endomorphisme f_0 est nilpotent de rang $n - 2$. Par hypothèse de récurrence, il existe $v \in V_0$ tel que $f_0^{n-2}(v) \neq 0$. Comme $V_0 = f(V)$, il existe $w \in V$ tel que $v = f(w)$. et donc $f^{n-1}(w) \neq 0$. Ainsi, on a $(c) \Rightarrow (a)$.