Ecole Polytechnique
Formation préparatoire

Corrigé de la feuille 2

Exercice 1. Soit $\Psi : \left\{ \begin{array}{l} E \to E^* \\ a \mapsto \varphi_a \end{array} \right.$. L'application Ψ est linéaire. Comme les espaces E et E^* ont même dimension, il suffit de montrer que Ψ est injective. Soit $a \in E$ tel que $\varphi_a = 0$. Ceci signifie que pour tout $x \in E$, on a $\varphi_a(x) = \langle a, x \rangle = 0$ en particulier $\varphi_a(a) = \|a\|^2 = 0$ et donc $a = 0$.

Exercice 2. 1) Soit $F_i = \mathbb{R}v_1 + \ldots \mathbb{R}v_i$. On veut montrer par récurrence sur i que

$$\text{Il existe une unique base orthonormée } (e_1, \ldots, e_i) \text{ de } F_i \text{ telle que } e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} \text{ et } \langle v_j, e_j \rangle > 0 \text{ pour } 1 \leq j \leq i. \tag{1}$$

Pour $i = 1$, l'élément $e_1 = v_1/\|v_1\|$ est une base orthonormale de F_1.

On suppose l'hypothèse de récurrence (1) vraie pour i, c'est-à-dire il existe une unique base orthonormale $(e_1, \ldots, e_i)$ de F_i vérifiant $< e_k, v_k >> 0$ pour $1 \leq k \leq i$ et $e_1 = \dfrac{v_1}{\|v_1\|}$.

On veut montrer qu'il existe un unique e_{i+1} orthogonal à F_i tel que $(e_1, \ldots, e_{i+1})$ soit une base orthonormale de F_{i+1} et $< e_{i+1}, v_{i+1} > 0$.

On a $F_{i+1} = Vect < v_1, \ldots, v_i, v_{i+1} >= Vect < e_1, e_2, \ldots, e_i, v_{i+1} >$. On cherche donc $e_{i+1} = \lambda_1 e_1 + \ldots \lambda_i e_i + \lambda_{i+1} v_{i+1}$ vérifiant les propriétés demandées. En particulier, ceci implique $\lambda_{i+1} \neq 0$ (car on veut que $(e_1, \ldots, e_{i+1})$ soit une base de F_{i+1}).

Pour $k \in \{1, \ldots, i\}$, on veut $< e_{i+1}, e_k >= 0$, ce qui donne $\lambda_k = -\lambda_{i+1} < v_{i+1}, e_k >$ et donc

$$e_{i+1} = \lambda_{i+1}(v_{i+1} - \sum_{k=1}^{i} < v_{i+1}, e_k > e_k). \tag{2}$$

On veut que $\|e_{i+1}\| = 1$, ce qui implique $|\lambda_{i+1}| = \dfrac{1}{\|v_{i+1} - \sum_{k=1}^{i} < v_{i+1}, e_k > e_k\|}$.
La dernière condition imposée à e_{i+1} est $< e_{i+1}, v_{i+1} >> 0$.
Par (2), on a $1 =< e_{i+1}, e_{i+1} >= \lambda_{i+1} < v_{i+1}, e_{i+1} >$ ce qui implique $\lambda_{i+1} > 0$. On obtient donc

$$e_{i+1} = \frac{v_{i+1} - \sum_{k=1}^{i} < v_{i+1}, e_k > e_k}{\|v_{i+1} - \sum_{k=1}^{i} < v_{i+1}, e_k > e_k\|}.$$

Unicité : Soit $w \in F_{i+1}$ vérifiant les propriétés voulues. Alors w est orthogonal à tous les e_i pour $1 \leq i \leq j$ et donc $w = \lambda e_{i+1}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme $\|w\| = 1$, on obtient $|\lambda| = 1$, ou encore $\lambda = \pm 1$. Comme $< w, v_{i+1} >> 0$, on obtient $\lambda = 1$ ce qui donne l'unicité.

2) u est trigonalisable signifie qu'il existe une base $\mathcal{B}_0 = (v_1, \ldots, v_n)$ de E dans laquelle la matrice T de u est triangulaire. On peut supposer que T est triangulaire supérieure.

Par la question 1), il existe une base orthonormée $\mathcal{B}_1 = (e_1, \ldots, e_n)$ telle que $\langle v_i, e_i \rangle > 0$ pour tout i et $Vect(e_1, \ldots, e_k) = Vect(v_1, \ldots, v_k)$ pour $1 \leq k \leq n$. ($Vect$ désigne l'espace vectoriel engendré par). Ainsi la matrice de passage de P de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}_1$ est triangulaire supérieure et $P^{-1}TP$ est la matrice de u dans la base $\mathcal{B}_1$. Elle est triangulaire supérieure puisque T et P le sont.

Exercice 3. 1) Comme F est de dimension finie, on peut choisir une base orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$ de F. Soit $x \in E$. On cherche donc $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ tel que, pour tout j, le vecteur $x - y$ soit orthogonal à e_j ce qui donne $< x, e_j > -y_j = 0$ et donc l'élément $y = \sum_{i=1}^n < x, e_i > e_i$ vérifie la propriété demandée.

Si y et z sont deux éléments de F vérifiant $x - y$ et $x - z$ orthogonaux à F, alors la différence $y - z = x - z - (x - y)$ est orthogonale à F. Comme $y - z \in F$, on obtient $< y - z, y - z >= 0$ ce qui donne $y = z$ et donc l'unicité.

2) Par définition $p_F(x) = \sum_{i=1}^n < x, e_i > e_i$. La linéarité de p_F se déduit de la linéarité en la première variable du produit hermitien.

Comme $p_F(x)$ et $x - p_F(x)$ sont orthogonaux, on a $\|p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|x - p_F(x)\|^2$, et donc $\|p_F(x)\| \leq \|x\|$. Ainsi p_F est 1-lipschitzienne.

3) Comme $p_F(x) \in F$, on a $\inf\limits_{y \in F} \|x - y\| \leq \|x - p_F(x)\|$.

Soit $y \in F$. On écrit $x - y = x - p_F(x) + p_F(x) - y$. Comme $x - p_F(x)$ est orthogonal à F et $p_F(x) - y \in F$, on a $\|x - y\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - y\|^2$ et donc $\|x - p_F(x)\| \leq \|x - y\|$. Cette inégalité est valable pour tout y dans F. On en déduit $\|x - p_F(x)\| \leq \inf\limits_{y \in F} \|x - y\|$.

Exercice 4. 1) Ceci est juste une vérification (je ne l'écris pas mais il faut l'écrire si cela est demandé dans un examen).

2) On applique le procédé de Gram-Schmidt à la base $(v_1, v_2, v_3) = (1, x, x^2)$ de $\mathbb{R}_2[x]$. On a donc $e_1(x) = 1$. Notons p_0 la projection orthogonale sur $\mathbb{R}$ et p_1 la projection orthogonale sur $\mathbb{R}_1[x]$. Par l'exercice précédent, on a $e_2(x) = \dfrac{x - p_0(x)}{\|x - p_0(x)\|}$ et $e_3(x) = \dfrac{x^2 - p_1(x^2)}{\|x^2 - p_1(x^2)\|}$.

Le vecteur $p_0(x)$ est l'unique polynôme constant vérifiant $\langle x - p_0(x), 1 \rangle = 0$ ce qui donne $p_0(x) = \dfrac{1}{2}$ et $\|x - \dfrac{1}{2}\| = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$ ce qui donne $e_2 = 2\sqrt{3}(x - \dfrac{1}{2})$.

Le vecteur $p_1(x^2) = ax + b$ est l'unique polynôme de degré 1 vérifiant $\langle x^2 - p_1(x^2), 1 \rangle = 0$ et $\langle x^2 - p_1(x^2), x \rangle = 0$. Le calcul donne $a = 1$ et $b = -\dfrac{1}{6}$ et, après calculs, on obtient $e_3 = 6\sqrt{5}(x^2 - x + \dfrac{1}{6}))$.

3) On a $\inf_{a,b} \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx = \inf_{R \in \mathbb{R}_1[x]} \|x^2 - R(x)\|^2 = \|x^2 - p_1(x^2))\|^2 = \dfrac{1}{180}$ d'après l'exercice 3 et le calcul précédent.

Exercice 5. 1) On fixe une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \dots e_n)$ de E. Un endomorphisme est uniquement déterminé par ses valeurs sur une base, on cherche donc à déterminer $u^*(e_i)$ en fonction des $u(e_j)$ de telle sorte que la propriété demandée soit vraie.

Comme la base $\mathcal{B}$ est orthonormale, pour tout j, on a $u(e_j) = \sum\limits_{k=1}^{n} \langle u(e_j), e_k \rangle e_k$.

Ainsi, en posant pour tout i, $u^*(e_i) = \sum_{k=1}^n \langle e_i, u(e_k) \rangle e_k$, on obtient $\langle u^*(e_i), e_j \rangle = \langle e_i, u(e_j) \rangle$. L'endomorphisme u^* ainsi défini vérifie la propriété demandée. Il est unique car la formule précédente détermine de manière unique u^*.

2) $x \in ker\ u^*$ équivaut à $u^*(x) = 0$. Donc $x \in ker\ u^*$ si et seulement si, pour tout $y \in E$, on a $\langle u^*(x), y \rangle = 0$, ce qui s'écrit également $\langle x, u(y) \rangle = 0$. Ceci donne $\ker\ u^* = (\operatorname{Im} u)^\perp$. L'autre égalité en découle car $u^{**} = u$ et $(V^\perp)^\perp = V$.

Exercice 6. 1) On montre que les valeurs propres de M sont réelles.

La matrice M admet une valeur propre complexe λ. Soit $V \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre non nul associé à λ que l'on note en colonne : $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$. Pour $x \in \mathbb{C}$ on note $\bar{x}$ son conjugué. On a alors : $M\bar{V} = \overline{MV} = \bar{\lambda}\bar{V}$ et donc en multipliant à gauche par le vecteur ligne ${}^tV$, on obtient ${}^tVM\bar{V} = \bar{\lambda}{}^tV\bar{V} = \bar{\lambda}(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^2)$. Comme la matrice M est symétrique, on a également ${}^tVM\bar{V} ={}^t (MV)\bar{V} = \lambda{}^tV\bar{V}$. On obtient donc $\bar{\lambda} = \lambda$ puisque $(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^2) \neq 0$ et par suite λ est un nombre réel.

2) Comme la matrice M est symétrique réelle, l'endomorphisme f vérifie

$$\text{pour tout } x, y \text{ dans } V \text{ alors } < f(x), y >=< x, f(y) > .$$

Montrons le résultat par récurrence sur n.

Si $n = 1$ le résultat est immédiat.

Si $n > 1$. Par ce qui précède, f admet une valeur propre réelle λ et donc un vecteur propre à coordonnées réelles v_1 de norme 1 associé à λ.

Soit H l'hyperplan orthogonal à v_1. Pour $x \in H$, on a $< f(x), v_1 >=< x, f(v_1) >= \lambda < x, v_1 >= 0$ puisque f est symétrique et que x est dans l'orthogonal de v_1. Par conséquent la restriction de f à H définit un endomorphisme symétrique de H. Comme H est de dimension $n - 1$. par l'hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormée $(v_2, \dots v_n)$ de H dans laquelle f est diagonale. La base $(v_1, v_2 \dots v_n)$ est donc une base orthonormée formée de vecteurs propres de f.

3) Soit O la matrice dont les vecteurs colonnes sont les cordonnées des vecteurs $v_1, v_2 \dots v_n$ obtenus précédemment dans la base canonique. On a alors ${}^tOO = Id$ car le coefficient de la $i$ème ligne et j-ème colonne est $< v_i, v_j >$. La matrice O correspond à la matrice de passage de la base canonique à la base $(v_1, v_2 \dots v_n)$ et la matrice OMO^{-1} est la matrice de f dans la base $(v_1, v_2 \dots v_n)$, elle est donc diagonale.

Exercice 7. 1) Montrons tout d'abord l'existence de N. Par l'exercice 6, il existe O telle que ${}^tOO = I_n$ telle que $OMO^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$. Par hypothèse, pour $1 \leq j \leq n$, on a $\lambda_j > 0$.

La matrice $N = O^{-1} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} O$ est symétrique définie positive et vérifie alors $M = N^2$.

Montrons l'unicité de N. On suppose que $M = N^2$. Pour $\alpha \in \mathbb{R}^+$, on a alors $Ker(N - \alpha I_n) \subset Ker(M-\alpha^2 I_n)$. Les deux matrices sont diagonalisables donc $\mathbb{R}^n = \oplus_{\alpha\in\mathbb{R}^+} Ker(N-\alpha I_n) = \oplus_{\alpha^2\in\mathbb{R}^+} Ker(M-\alpha^2 I_n)$ et donc $Ker(N - \alpha I_n) = Ker(M - \alpha^2 I_n)$. Ceci caractérise la matrice N.

2) La matrice ${}^tAA$ est symétrique. Pour X un vecteur colonne, on a ${}^tX{}^tAAX = {}^t(AX)AX = \|AX\|^2 \geq 0$. Ce réel est nul si et seulement si AX est le vecteur nul. Ceci équivaut à X est nul puisque A est inversible.

La matrice ${}^tAA$ est donc symétrique définie positive.

3) Par 1) et 2), il existe une unique matrice symétrique définie positive S telle que $S^2 =^t AA$. On pose $O = AS^{-1}$. On a alors ${}^tOO =^t S^{-1}\ {}^tAAS = I_n$ et donc O est orthogonale et définie de manière unique.

4) Si $A = OS$ alors ${}^tAA = S^2$ et $A^tA = OS^2O^{-1} = \left(OSO^{-1}\right)^2$. Par l'unicité de la racine carrée (question 1.), on a donc

$$ {}^tAA = A^tA \Leftrightarrow S = OSO^{-1} \Leftrightarrow OS = SO $$

Exercice 8.

(1) Si $A = [a_{ij}]$ alors $tr({}^tAA) = \sum a_{ij}^2$.

(2) Soit H antisymétrique, et A symétrique. Alors ${}^t({}^tAH) = -HA$. Or $tr^tB = trB$ donc $\langle H, A\rangle = 0$. Donc $\langle A, H\rangle = 0$, et $\mathcal{S}^\perp$ contient l'espace $\mathcal{A}$ des matrices anti-symétriques. Comme $\dim \mathcal{S}^\perp = \dim \mathcal{A}$, ces deux espaces coïncident.

Exercice 9.

1) Soit $v \in \ker(p) \cap \mathrm{Im}\,(p)$. On a donc $p(v) = 0$ et il existe $w \in E$ tel que $v = p(w)$. Comme p est un projecteur alors $p \circ p = p$ et donc $v = p(w) = p \circ p(w) = p(v) = 0$. Ainsi $\ker(p) \cap \mathrm{Im}\,(p) = \{0\}$. Comme $dimKerp + dimImf = dimE$, on obtient $E = \ker(p) \oplus \mathrm{Im}\,(p)$.

Si $v \in \mathrm{Im}\,(p)$, alors $v = p(w)$ avec $w \in E$, et donc $p(v) = p \circ p(w) = p(w) = v$.

2) a) $\Rightarrow$ b) On suppose que p est un projecteur orthogonal, c'est-à-dire que $Kerp$ et Imp sont orthogonaux et on veut montrer que $p^* = p$, c'est-à-dire pour tout x et y dans E alors $\langle x, p(y)\rangle = \langle p(x), y\rangle$.

Soient x, y dans E. On a $\langle x, p(y)\rangle = \langle p(x) + (x - p(x)), p(y)\rangle = \langle p(x), p(y)\rangle$ car $x - p(x) \in Kerp$ est orthogonal à $p(y) \in Imp$. De même, $\langle p(x), p(y)\rangle = \langle p(x), (p(y) - y) + y\rangle = \langle p(x), y\rangle$. On obtient bien b).

b) $\Rightarrow$ c) Si $p^* = p$ alors, pour tout $x \in E$, on a $\|p(x)\|^2 = \langle p(x), p(x)\rangle = \langle p^*p(x), x\rangle = \langle p^2(x), x\rangle = \langle p(x), x\rangle \leq \|p(x)\|\,\|x\|$ par Cauchy-Schwartz. Donc $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

c) $\Rightarrow$ a) Soit $x \in \ker(p)$ et $y \in \mathrm{Im}\,(p)$. Alors, pour tout t dans $\mathbb{R}$, on a $\|x + ty\|^2 = \|x\|^2 + 2t\langle x, y\rangle + t^2\|y\|^2$ et $p(x + ty) = ty$. Par c), on obtient $t^2\|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2t\langle x, y\rangle + t^2\|y\|^2$ c'est-à-dire $0 \leq \|x\|^2 + 2t\langle x, y\rangle$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Pour que cette inégalité soit valable pour tout $t \in \mathbb{R}$, il faut et il suffit que $\langle x, y\rangle = 0$.