Algèbre Linéaire

18 décembre 2013

Table des matières

1 Généralités

Il s'agit d'un rappel de certaines notions d'algèbre linéaire, non pas d'un cours complet sur le sujet.

1.1 Espaces vectoriels

On rappelle ici brièvement les premières définitions.
Le corps $\mathbb{K}$ sera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ en général.

Définition 1. On appelle espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ tout triplet $(E, +, .)$ où :
- $(E, +)$ est un groupe abélien (= commutatif).
- . est une loi de composition externe à gauche, i.e une application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \to & E \\ (\lambda, x) & \mapsto & \lambda.x \end{array}$$

vérifiant :

1. $\forall x \in E, 1_{\mathbb{K}} x = x$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in E^2, \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
3. $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
4. $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, (\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$

Définition 2. Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle sous-espace vectoriel de E toute partie F de E stable pour $+$ et . et qui, munie des lois induites, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Pour démontrer qu'un espace est un sous-espace vectoriel, on utilise en général la caractérisation suivante :

Proposition 1. *Soit $F \subset E$*

$$F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \iff \begin{cases} F \neq \emptyset \\ \forall (x, y) \in F^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \lambda x + \mu y \in F \end{cases}$$

Définition 3. Soit X une partie de E. On appelle sous-espace vectoriel de E engendré par X (on le note $\mathrm{Vect}(X)$) le plus petit espace vectoriel contenant X.

On pourra vérifier la maîtrise de cette définition en résolvant l'exercice 1 par exemple.

Définition 4. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel E. On appelle somme de F et G et on note $F+G$

$$F+G=\{x+y,(x,y)\in F\times G\}$$

L'application somme

$$\begin{array}{ccc} F\times G & \to & F+G \\ (a,b) & \mapsto & a+b \end{array}$$

est surjective par définition. Lorsqu'elle est injective, on dit que $F+G$ **est directe** ou que F **et** G **sont en somme directe**. Dans ce cas, on note $F+G=F\oplus G$. On dit que F **et** G **sont supplémentaires** si

$$F+G=F\oplus G=E$$

Proposition 2.

$$F+G=F\oplus G \iff F\bigcap G=\{0\}$$

$$F\oplus G=E \iff \begin{cases} E=F+G \\ F\bigcap G=\{0\} \end{cases}$$

Pour se familiariser avec ces différentes notions, les exercices 2 et 3 sont vivement conseillés.

Remarque. (a) Il n'y a pas (en général) unicité du supplémentaire :

$$\mathbb{R}^2=\mathrm{Vect}\,\{(1,0)\}\oplus\mathrm{Vect}\,\{(0,1)\}=\mathrm{Vect}\,\{(1,0)\}\oplus\mathrm{Vect}\,\{(1,1)\}$$

(b) Ne pas confondre supplémentaire et complémentaire :

$$\mathbb{R}^2=\mathrm{Vect}\,\{(1,0)\}\oplus\mathrm{Vect}\,\{(0,1)\}\ \text{ mais } (1,1)\notin\mathrm{Vect}\,\{(1,0)\}\bigcup\mathrm{Vect}\,\{(0,1)\}$$

1.2 Applications linéaires

Définition 5. On appelle application $\mathbb{K}$-linéaire de E vers F toute application $f : E \to F$ vérifiant :

$$\forall (x, y) \in E^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

On note $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ l'ensemble de ces applications. Si $E = F$, on le note $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ et ces applications sont appelées endormorphismes.

Lorqu'il n'y a pas de confusion possible, on omet souvent le corps de base pour alléger la notation.

Exemples :

(a) $Id_E \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$

(b) $\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & ax \end{array}$ appartient à $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{R})$

(c) $\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & & z & \mapsto & \overline{z} \end{array}$ appartient à $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ mais n'appartient pas à $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$

(d) $E = \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$

$\begin{array}{rccc} D & : & E & \to & E \\ & & f & \mapsto & f' \end{array}$ appartient à $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$

Définition 6. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, l'image de f, notée $f(E)$ ou $\mathrm{Im} f$, est un sous-espace vectoriel de F.

Il en est de même pour le noyau de f, noté $ker f$ et défini par

$$ker f = \{x \in E | f(x) = 0\}$$

Proposition 3.

$$f \textit{ est surjective } \iff \mathrm{Im} f = F$$
$$f \textit{ est injective } \iff ker f = \{0\}$$

Définition 7. On note $GL(E)$ l'ensemble des isomorphismes (endomorphismes bijectifs) de E. Cet ensemble forme alors un groupe pour la loi de composition.

Définition 8. On appelle forme linéaire sur E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$. On note $E^* = \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, \mathbb{K})$ l'ensemble de ces formes linéaires, autrement appelé l'espace dual de E.

Définition 9. On appelle hyperplan de E tout noyau d'une forme linéaire non identiquement nulle sur E.

Remarque. On verra après avec la notion de dimension que cette définition d'hyperplan rejoint bien en dimension finie celle d'un espace de dimension $n - 1$.

1.3 Familles libres, génératrices, bases et dimension d'un espace vectoriel

Définition 10. Soit $(v_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E.

1. La somme $\sum \lambda_i v_i$, où $\{\lambda_i \neq 0\}$ est fini, est appelée **combinaison linéaire** (C.L) des $\{v_i\}$.
2. On dit que les vecteurs $v_1, \ldots, v_k$ sont **linéairement indépendants** ou encore qu'ils forment une **famille libre** si , pour tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ dans $\mathbb{K}$, on a l'implication
$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0.$$
3. On dit au contraire que les vecteurs $v_1, \ldots, v_k$ sont **linéairement dépendants** ou encore qu'ils forment une **famille liée** s'il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ dans $\mathbb{K}$ tels que :
$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k = 0$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \neq (0, \ldots, 0)$.
4. Les vecteurs $v_1, \ldots, v_k$ **engendrent** E, ou encore forme une **famille génératrice** de E si pour tout $v \in E$, il existe $x_1, \ldots, x_k$ dans $\mathbb{K}$ tels que $v = x_1 v_1 + \ldots + x_k v_k$. Autrement dit $\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_k) = E$.
5. Une famille libre et génératrice est appelé une **base** de E.

Exemples :

(a) Toute famille formée d'un unique vecteur non nul est libre.

(b) Toute famille dont l'un des vecteur est nul est liée.

(c) $(1, i)$ est libre dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, mais liée dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

(d) Dans $\mathbb{K}^n$, posons $e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ avec le 1 en j-ème position. Alors les $\{e_j\}_{j=1\ldots n}$ forment une base, appelée la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

(e) $(1, X, \ldots, X^n)$ est la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.

Remarque. On a défini ces notions dans le cadre de famille finie, mais on peut aussi le faire pour des familles infinies. Une famille est dite libre si toute sous-famille finie l'est. Elle est génératrice lorsque tout élement peut s'exprimer comme une combinaison linéaire finie de ses élements. On peut par exemple se convaincre que $(X^k)_{k\geqslant 0}$ est une base (infinie) de $\mathbb{K}[X]$.

Théorème 1. *S'il existe une base de E de cardinal $n < \infty$, toutes les bases de E ont ce même cardinal n, qu'on appelle alors la dimension de E. Dans ce cas, E est un espace de dimension finie.*

Remarque. (i) La compréhension des familles libres ou génératrices et des bases est extrêmement importante car ce sont des outils très utilisés en algèbre linéaire. En effet, si on connaît une application linéaire sur une base, on la connaît sur l'espace entier (grâce à la linéarité de la fonction et au caractère générateur de la base). C'est pour cette raison que les applications linéaires peuvent être représentées dans un tableau de taille finie, qu'on appellera une **matrice**.

(ii) Tout espace vectoriel admet des bases.

(iii) En dimension finie, on peut compléter une famille libre en une base comme on peut extraire une base d'une famille génératrice. Il s'agit du théorème de la base incomplète.

Théorème 2 (de la base incomplète)**.** *Toute famille libre de vecteurs de E peut être complétée en une famille libre et génératrice (i.e une base) de E. Inversement, de toute famille génératrice de E, on peut extraire une sous-famille libre et génératrice.*

On peut s'entraîner à manipuler ces définitions pour démontrer les propriétés suivantes sur la dimension :

Proposition 4. *1. Soient $n \geqslant 2$, $E_1, \ldots, E_n$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, alors $\prod_{i=1}^n E_i$ est un espace vectoriel de dimension finie et*

$$\dim \prod_{i=1}^{n} E_i = \sum_{i=1}^{n} \dim E_i$$

2. Si E est de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E, alors $\dim F \leqslant \dim E$ avec égalité si et seulement si $F = E$.

3. Si E est de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E, alors F admet au moins un supplémentaire dans E et pour tout supplémentaire G de F dans E,

$$\dim G = \dim E - \dim F$$

4. [Théorème de Grassman] Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E de dimension finie, alors

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \bigcap G)$$

Remarque. (a) On utilise très souvent le fait que $F \subset E$ et $\dim F = \dim E$ pour conclure que $F = E$. Voir l'exercice 10 par exemple.

(b) On rappelle qu'il n'y a pas en général unicité du supplémentaire. Voir l'exercice 3.

(c) On peut tout de suite déduire du théorème de Grassman

$$E = F \oplus G \Longleftrightarrow \dim F + \dim G = \dim E \text{ et } F \bigcap G = \{0\}$$

(d) Si F et G sont supplémentaires et si b' est une base de F, b'' une base de G, alors $b = b' \bigcup b''$ est une base de $F \oplus G$. Voir l'exercice 12.

Proposition 5. *Deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes si et seulement s'ils ont la même dimension.*

Définition 11.
1. On appelle **rang d'une famille de vecteurs** la dimension de l'espace vectoriel qu'il engendre ($\mathrm{Rg}(\mathcal{F}) = \dim \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$).
2. On appelle **rang d'une application** la dimension de son image ($\mathrm{Rg}(f) = \dim \mathrm{Im} f$).

Cela nous permet d'arriver au **Théorème du rang**, très utile en algèbre linéaire.

Théorème 3. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et F un espace vectoriel de dimension quelconque. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors*

$$\mathrm{Rg}(f) + \dim \ker f = \dim E$$

Ce théorème fondamental a par exemple pour conséquence immédiate la propriété bien connue suivante :

Proposition 6. *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie vérifiant* $\dim E = \dim F$. *Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors*

$$f \textit{ est injective } \Longleftrightarrow f \textit{ est surjective } \Longleftrightarrow f \textit{ est bijective}$$

Remarque. L'équivalence n'est pas vraie en dimension infinie. Par exemple, l'application dérivée sur l'espace des polynômes est surjective, mais pas injective. La multiplication par X sur ce même espace est injective, mais pas surjective.

1.4 Matrices

Dans ce paragraphe, on travaille dans des espaces de dimension finie.

Définition 12. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (f_1, \ldots, f_m)$ une base de F. Si $f(e_j) = \sum_i a_{ij} f_i$, alors $A = (a_{ij}) \in M_{mn}(\mathbb{K})$ est la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, que l'on note $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

De plus, l'application qui à toute application linéaire associe sa matrice est un isomorphisme.

Remarque.

- Si x et y sont des vecteurs, de vecteurs colonnes associés X et Y, et f une application linéaire de matrice A, on a l'équivalence entre $y = f(x)$ et $Y = AX$.
- L'image, le noyau et le rang d'une matrice sont ceux de l'application linéaire canoniquement associée à f. Le rang de A est aussi le rang de sa famille de vecteurs colonnes (ou lignes).
- Dans le cas des matrices carrées ($\dim E = \dim F$), f est un isomorphisme si et seulement si sa matrice est inversible (la matrice de son inverse est alors l'inverse de sa matrice). L'ensemble des matrices inversibles forme alors un groupe pour la multiplication, que l'on note $GL_n(\mathbb{K})$.
- On a l'équivalence entre :
  (i) A est inversible
  (ii) La transposée de A (${}^tA = (A_{ji})$) est inversible
  (iii) Les vecteurs colonnes (ou les vecteurs lignes) de A sont linéairement indépendants
  (iv) $\text{Rg}(A) = n$
  (v) $\det A \neq 0$
- On a aussi l'égalité entre le rang de A, celui de sa transposée, et celui la famille formée des ses vecteurs lignes ou colonnes.

Définition 13. Pour $(i, j) \in [\![1, m]\!] \times [\![1, n]\!]$, on définit la matrice E_{ij} par

$$[E_{ij}]_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$$

où δ est le symbôle de Kronecker. Autrement dit, cette matrice a un 1 en position i, j et des 0 partout ailleurs.

Proposition 7. *Les E_{ij} forment une base (qu'on appelle canonique) de $M_{m,n}(\mathbb{K})$, ce qui en fait un espace de dimension mn. Par isomorphisme, on a aussi*

$$\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \times \dim F$$

.

Remarque. En particulier, $\dim E^* = \dim E$. D'ailleurs, si $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de E, la famille $(e_1^*, e_2^*, \ldots, e_n^*)$ dont les éléments sont définis par $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$ est une base de E^* appelée la **base duale** de $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Il s'agit des applications coordonnées relatives à la base initiale.

Changements de bases :

La **matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$**, notée $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ est la matrice représentative de l'application identité, de E (muni de la base $\mathcal{B}'$) dans E (muni de la base $\mathcal{B}$). Autrement dit, on peut voir comme étant « la décomposition de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$ ». D'ailleurs il est parfois plus simple de visualiser ainsi :

$$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = (\mathcal{B}')_{\mathcal{B}}$$

On a d'ailleurs

$$(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^{-1} = ((\mathcal{B}')_{\mathcal{B}})^{-1} = (\mathcal{B})_{\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$$

Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ bases de E, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ bases de F, alors on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f) &= (\mathcal{C})_{\mathcal{C}'}\, \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\, (\mathcal{B}')_{\mathcal{B}} \\ &= P_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}} \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \end{aligned}$$

En particulier, en posant $P = (\mathcal{B})_{\mathcal{B}'}$, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f) &= (\mathcal{B})_{\mathcal{B}'}\, \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)\, (\mathcal{B}')_{\mathcal{B}} \\ &= P \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) P^{-1} \end{aligned}$$

Pour s'entraîner à manipuler ces changements de bases, on pourra réfléchir à l'exercice 18.

2 Réduction des endomorphismes et des matrices

2.1 Stabilité et polynômes d'endomorphisme

Définition 14. On dit que F sous-espace vectoriel de E est stable par $u \in \mathcal{L}(E)$ si $u(F) \subset F$, ce qui permet de définir l'**endomorphisme induit** $u_F \in \mathcal{L}(F)$.

La philosophie de la réduction est justement de trouver des espaces stables les plus petits possibles, afin de réduire ainsi l'étude. Par exemple, si on parvient à écrire E comme la somme directe d'espaces stables par u alors sa représentation matricielle est immédiatement diagonale par blocs dans une base adaptée.

En effet, si $E = F \oplus G$ avec F, G stables par u, avec b' une base de F et b'' une base de G, on a

$$(u)_{b' \cup b''} = \begin{pmatrix} (u_F)_{b'} & 0 \\ 0 & (u_G)_{b''} \end{pmatrix}$$

<u>**Exemple :**</u> $\forall (u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ qui commutent ($u \circ v = v \circ u$), alors $\ker v$ et $\mathrm{Im} v$ sont u-stables.

Définition 15. Pour tout polynôme $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, si $u \in \mathcal{L}(E)$, on définit

$$P(u) = \sum_{k=0}^{d} a_k u^k \text{ où } u^k = u \circ u \circ \ldots \circ u (k \text{ fois})$$

On définit de la même manière le polynôme d'une matrice.

On pourra pour s'entraîner en calculant $P(M)$ pour $P = (X^2 - X)^2$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Le lemme suivant, dit des noyaux, a une importance théorique considérable.

Lemme 8. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\forall P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{K}[X]$ premiers entre eux deux à deux, alors posant $P = \prod P_i$, on a

$$\ker(P(u)) = \oplus_{i=1 \ldots n} \ker(P_i(u))$$

Définition 16. On appelle polynôme annulateur de $u \in \mathcal{L}(E)$ tout $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(u) = 0$. L'ensemble de ces polynômes est un idéal, qui est donc principal et non nul lorsque E est de dimension finie (cf. exercice 22). On appelle **Polynôme minimal** de u son générateur unitaire.

<u>**Exemples :**</u>

- $X^2 - X$ annule les projecteurs.
- X^2 annule $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- Dans l'exemple ci-dessus laissé en exercice, on devait trouver $P(M) = 0$.

2.2 Eléments propres

Définition 17. 1. On appelle **valeur propre** tout scalaire λ tel que

$$\exists x \neq 0, u(x) = \lambda x$$

On note $\mathrm{vp}(u)$ l'ensemble des valeurs propres distinctes de u.

2. On appelle **vecteur propre** tout $x \neq 0$ tel que $\exists \lambda, u(x) = \lambda x$.
3. (λ, x) est alors appelé un **couple propre**, et $\ker(u - \lambda id)$ le **sous-espace propre** associé à λ, souvent noté $E_\lambda(u)$.

Remarque.

$$\lambda \text{ valeur propre de } u \iff u - \lambda id \text{ non injectif } (\iff u - \lambda id \text{ non bijectif })$$

La deuxième égalité n'est vrai qu'en dimension finie, et en dimension infinie, on fera alors la différences entre valeur propre et valeur spectrale. Mais cela ne nous concerne pas ici.

Proposition 9. *Tout sous-espace propre de u est u-stable ; de plus les sous-espaces propres sont deux à deux en sommes directes (pour des valeurs propres distinctes). Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre. En particulier*

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{vp}(u)} E_\lambda(u) = \oplus_{\lambda \in \mathrm{vp}(u)} E_\lambda(u)$$

mais cette somme n'est pas toujours égale à E.

Si on se souvient de ce qui a été dit dans le paragraphe précédent, on comprend ici tout l'intérêt des éléments propres.

Proposition 10. *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ Si λ est une valeur propre de u, $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(u)$ et*

$$E_\lambda(u) \subset E_{P(\lambda)}(P(u))$$

Corollaire 1. *Si λ est valeur propre de u et P est un polynôme annulateur de u, alors $P(\lambda) = 0$*

Cela justifie qu'on s'intéresse aux polynômes annulateurs lorsqu'on recherche des éléments propres.

On définit de même les éléments propres des matrices carrés (grâce à l'analogie endomorphisme-matrice).

2.3 Polynôme caractéristique

Définition 18. $\forall u \in \mathcal{L}(E)$, E de dimension $n > 0$ (respectivement $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$), on définit le **Polynôme caractéristique** par $\chi_u(\lambda) = \det(\lambda Id - u)$ (respectivement $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda Id - A)$).

Remarque. On rencontre souvent la définition $\det(u - \lambda Id)$. Ces définitions ne diffèrent que de $(-1)^n$ et comme on va principalement s'intéresser aux racines du polynôme caractéristique, cela n'a aucune importance.

Théorème 4.

$$\lambda \textit{ valeur propre de } u \Longleftrightarrow \lambda \textit{ racine de } \chi_u$$

On trouvera la démonstration de ce théorème dans l'exercice 17.

Donnons désormais l'énoncé du fondamental **Théorème de Cayley-Hamilton**

Théorème 5. *χ_u est un polynôme annulateur de u.*

Remarque. Le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique.

Définition 19. Soit λ une valeur propre de u. On appelle multiplicité (algébrique) de λ sa multiplicité en tant que racine de χ_u.

Les deux propositions suivantes montrent à nouveau l'intérêt pour la réduction de connaître des sous-espaces stables.

Proposition 11. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E. Alors, si F est stable par u, χ_{u_F} divise χ_u.*

Proposition 12. *Si $E = \oplus_{i=1\ldots p} E_i$ avec les E_i stables par u, alors*

$$\chi_u = \prod_{i=1}^{p} \chi_{u_{E_i}}$$

2.4 Réduction en dimension finie

Définition 20. On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est **diagonalisable** s'il existe une base b de E telle que $[u]_b$ (la matrice de u dans b) soit diagonale.

Théorème 6. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) u est diagonalisable

(ii) il existe b base de E constituée de vecteurs propres de u

(iii) $E = \oplus_{\lambda \in vp(u)} E_\lambda(u)$

Théorème 7. *Une condition nécessaire (mais largement insuffisante) pour que u soit diagonalisable est que χ_u soit scindé.*

Exemple On peut facilement se convaincre que le polynôme caractéristique de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est scindé, bien qu'elle ne soit pas diagonalisable.

Théorème 8. *u est diagonalisable si et seulement si χ_u est scindé et (avec $\alpha(\lambda)$ la multiplicité de λ) :*

$$\forall \lambda \in vp(u), \dim E_\lambda(u) = \alpha(\lambda)$$

Proposition 13. *Si λ est valeur propre de u, on a*

$$1 \leqslant \dim E_\lambda(u) \leqslant \alpha(\lambda)$$

Corollaire 2. *Si χ_u est simplement scindé, u est diagonalisable.*

Théorème 9. *u est diagonalisable si et seulement si il existe un polynôme annulateur simplement scindé (ou scindé à racines simples, c'est-à-dire produit de polynômes de degré 1 dont les racines sont deux à deux distinctes).*

Remarque. Ainsi, u est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est simplement scindé.

Corollaire 3. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace stable par u, alors si u est diagonalisable, u_F l'est aussi.*

La meilleure manière de bien comprendre cette théorie de la diagonalisation des endomorphismes ou des matrices est de manipuler ces différentes notions. On conseille pour cela les exercices...

Terminons brièvement par la trigonalisation.

Définition 21. On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est **trigonalisable** si il existe b une base de E telle que $[u]_b$ soit triangulaire supérieure.

Théorème 10.

$$\begin{aligned} u \text{ est trigonalisable } &\iff \chi_u \text{ est scindé} \\ &\iff \text{ il existe un polynôme annulateur scindé de } u \end{aligned}$$

Remarque. En particulier, toute matrice complexe est trigonalisable (tout polynôme est scindé sur $\mathbb{C}$).

3 Exercices et corrigés

On propose ici un recueil d'exercices avec leurs corrigés. Pour certains d'entre eux on pourra consulter des indications qui donneront ou bien des précisions sur l'énoncé ou bien des idées pour résoudre l'exercice concerné. On conseille vivement de bien réfléchir aux exercices, de regarder éventuellement les indications, mais surtout de ne pas aller immédiatement voir le corrigé, si on veut travailler efficacement.

3.1 Exercices

Exercice 1. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $\mathrm{Vect}(F \cup G) = F + G$.

Indication Corrigé

Exercice 2. Notons $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $\mathcal{P}$ (respectivement $\mathcal{I}$) l'ensemble des fonctions paires (respectivement impaires) de E. Montrer que

$$E = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$$

Indication Corrigé

Exercice 3. On pose $E = \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$, et on définit

$$F = \{f \in E | f(0) = f'(0) = 0\}$$

On note G l'ensemble des applications affines de E, et $H = \mathrm{Vect}(\cos, \sin)$

1. Montrer que F et G sont supplémentaires.
2. Montrer que F et H sont supplémentaires.
3. A-t-on $G = H$? Conclure.

Indication Corrigé

Exercice 4. Soit $\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & (x,y) & \mapsto & (x-y, x+y) \end{array}$

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.
2. Déterminer $\ker f$.
3. Déterminer $\mathrm{Im} f$.

Indication Corrigé

Exercice 5. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$f \text{ est une projection } \iff f^2 = f$$

Indication Corrigé

Exercice 6. Soient f et g des formes linéaires sur E. Montrer que

$$\ker f = \ker g \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}^* \text{ tel que } g = \lambda f$$

Indication Corrigé

Exercice 7. Montrer qu'une forme linéaire est ou bien nulle ou bien surjective.
Indication Corrigé

Exercice 8. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $E_n = \ker f^n$.

1. Montrer que la suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (au sens de l'inclusion).
2. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $E_p = E_{p+1}$. Montrer que pour tout $n \geqslant p, E_n = E_p$.

Indication Corrigé

Exercice 9. Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et $\varphi : E \to E$, avec

$$\begin{aligned}\varphi(f) :& \mathbb{R} && \to \mathbb{R} \\ & x && \mapsto x f(x)\end{aligned}$$

1. Montrer que φ est linéaire.
2. Déterminer $\ker \varphi$ et $\mathrm{Im}\varphi$.

Indication Corrigé

Exercice 10. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \cos x, g(x) = \sin x, h(x) = x \cos x$ et $i(x) = x \sin x$. Montrer que la famille (f, g, h, i) est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
Indication Corrigé

Exercice 11. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, montrer que les familles de fonctions suivantes sont libres :

1. $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ où $f_a(x) = |x - a|$
2. $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ où $f_a(x) = \exp(ax)$

Indication Corrigé

Exercice 12. Montrer que si b' est une base de F, b'' une base de G, alors $b = b' \bigcup b''$ est une base de $F \oplus G$.

Indication Corrigé

Exercice 13. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que, pour tout $x \in E$, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$. Montrer que u est une homothétie vectorielle (i.e $u = \mu Id$).

Indication Corrigé

Exercice 14. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3.

1. Soit f un endomorphisme de E tel que $f \neq 0$ et $f^2 = 0$. Déterminer le rang de f.
2. Même question avec g tel que $g^2 \neq 0$ et $g^3 = 0$.

Indication Corrigé

Exercice 15. On définit

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{C}_n[X] &\to \mathbb{C}_n[X] \\ P(X) &\mapsto P(X+1) - P(X) \end{aligned}$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme.
2. Déterminer $\ker \varphi$.
3. En déduire $\mathrm{Im}\varphi$.

Indication Corrigé

Exercice 16. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 7 \\ 4 & 3 & -1 & 11 \\ 0 & -1 & 2 & -4 \\ 3 & 3 & -2 & 11 \end{pmatrix}$. Calculer $\mathrm{rg}(A)$ et $\mathrm{rg}(B)$. Déterminer une base du noyau et une base de l'image pour chacune des applications linéaires associées f_A et f_B.

Indication Corrigé

Exercice 17. Montrer que en dimension finie :

$$\lambda \text{ valeur propre de } u \Longleftrightarrow \lambda \text{ racine de } \chi_u$$

Indication Corrigé

Exercice 18. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement aux bases canoniques, $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}, \vec{L}\,)$ et $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\,)$ est $\begin{pmatrix} 4 & 5 & -7 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

On définit deux nouvelles bases : $\mathcal{B} = (\vec{I}, \vec{J}, 4\vec{I} + \vec{J} - 3\vec{L}, -7\vec{I} + \vec{K} + 5\vec{L}\,)$ et $\mathcal{B}' = (4\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}, 5\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}, \vec{k}\,)$.

Quelle est la matrice de f relativement à $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$?

Indication Corrigé

Exercice 19. Soit A une matrice carrée d'ordre n. On suppose que A est inversible et que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de A.

1. Démontrer que $\lambda \neq 0$.
2. Démontrer que si $\vec{x}$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre λ alors il est vecteur propre de A^{-1} de valeur propre λ^{-1} .

Indication Corrigé

Exercice 20. Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et u un endomorphisme de E. On suppose u nilpotent, c'est-à-dire qu'il existe un entier strictement positif n tel que $u^n = 0$.

1. Montrer que u n'est pas inversible.
2. Déterminer les valeurs propres de u et les sous-espaces propres associés.

Indication Corrigé

Exercice 21. Soit A la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer et factoriser le polynôme caractéristique de A.
2. Démontrer que A est diagonalisable et déterminer une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles $A = PDP^{-1}$.
3. Donner en le justifiant, mais sans calcul, le polynôme minimal de A.
4. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Indication Corrigé

Exercice 22. Soit E un espace vectoriel de dimension n et φ une application linéaire de E dans E. Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ annulateur de φ.

Indication Corrigé

Exercice 23. Déterminer les valeurs propres des matrices suivantes. Sont-elles diagonalisables, triangularisables ?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

A l'aide du polynôme caractéristique de B, calculer B^{-1}.

Indication Corrigé

Exercice 24. Soit M la matrice de $\mathbb{R}^4$ suivante

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de M et ses sous-espaces propres.
2. Montrer que M est diagonalisable.
3. Déterminer une base de vecteurs propres et P la matrice de passage.
4. On a $D = P^{-1}MP$, pour $k \in \mathbb{N}$ exprimer M^k en fonction de D^k, puis calculer M^k.

Indication Corrigé

3.2 Indications

Indication 1. Exercice Corrigé On pourra raisonner par double inclusion, et bien utiliser la définition du Vect d'une partie.

Indication 2. Exercice Corrigé Pour ce type d'exercices, un raisonnement par analyse-synthèse fonctionne très souvent. On suppose que le résultat est vrai, et on essaie de voir ce que cela implique pour la décomposition sur la somme directe. On obtient des candidats, et la synthèse consiste à vérifier qu'ils conviennent bien.

Indication 3. Exercice Corrigé Encore une fois, un raisonnement par analyse-synthèse peut conduire au résultat, dans les deux cas.

Indication 4. Exercice Corrigé Pour les deux premières questions, appliquer la définition. Pour la troisième on pourra penser à utiliser le résultat de la question 2 et le théorème du rang.

Indication 5. Exercice Corrigé Rappel : On définit la projection vectorielle sur F parallèlement à G (où F et G sont supplémentaires dans E) par

$$p \ : \ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x = f + g & \mapsto & f \end{array} \quad \text{où } f + g \text{ est la décomposition de } x \text{ sur } F \oplus G$$

Pour le sens droite-gauche, on pourra montrer que si $f^2 = f$, alors

$$E = \ker f \oplus \mathrm{Im} f$$

.

Indication 6. Exercice Corrigé On pourra montrer tout d'abord que si $a \notin \ker f$, alors $E = \ker f \oplus \mathbb{K}a$.

Indication 7. Exercice Corrigé On pensera au théorème du rang.

Indication 8. Exercice Corrigé Pour la deuxième question, on a une information sur ce qu'il se passe aux ordres p et $p + 1$, mais quand $x \in E_{n+1}$, qui est dans E_{p+1} ?

Indication 9. Exercice Corrigé Pour l'image, on pourra procéder par analyse-synthèse.

Indication 10. Exercice Corrigé Il faut penser à particulariser en certains points.

Indication 11. Exercice Corrigé On rappelle qu'une famille infinie est libre lorsque toutes ses sous-familles finies sont libres. On se ramènera donc ici à une famille finie de fonctions, et on essaiera d'utiliser des spécificités des fonctions valeurs absolues et exponentielles.

On pourra essayer d'abord sur par exemple 4 fonctions de ce type et utiliser des arguments qui s'étendent à un nombre fini mais grand de fonctions.

Indication 12. Exercice Corrigé Bien revoir les définitions de familles libres génératrices et d'espaces en somme directe avant de faire cet exercice.

Indication 13. Exercice Corrigé Il faut commencer par bien comprendre que l'exercice a bien un sens et n'est pas trivial. En effet, pour le moment le λ dépend du x et il faut montrer que c'est en fait le même pour tous.

On pourra penser à utiliser une base de E.

Indication 14. Exercice Corrigé Montrer que

$$f^2 = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{Im} f \subset \ker f$$

, et utiliser le théorème du rang. Pour la deuxième question on pourra étudier les différentes possibilités et se convaincre qu'une seule est en fait possible.

Indication 15. Exercice Corrigé Pour la question 2, penser à regarder les racines d'un polynôme du noyau. Pour la question 3, on se demandera d'abord ce que fait φ au monôme de plus haut degré, puis essayer de déterminer la dimension de l'image.

Indication 16. Exercice Corrigé On pourra penser à utiliser le résultat suivant : S'il existe une sous-matrice carrée de M d'ordre k de déterminant non nul, alors $\mathrm{Rg} M \geqslant k$.

Indication 17. Exercice Corrigé Revoir les différentes définitions de valeurs propres.

Indication 18. Exercice Corrigé Bien relire et appliquer le paragraphe sur les changements de bases.

Indication 19. Exercice Corrigé Une nouvelle fois, revoir les différentes définitions de valeur propre.

Indication 20. Exercice Corrigé Pour la première question, on peut se demander quel outil permet facilement de démontrer que si f et g sont bijectives, alors $f \circ g$ l'est aussi...

Pour la deuxième question, que se passe t-il si λ est une valeur propre ?

Indication 21. Exercice Corrigé Une matrice est diagonalisable si et seulement si les dimensions de ses sous-espaces propres sont égales à leur multiplicité. On étudie donc le polynôme caractéristique pour obtenir ses racines (les valeurs propres). Si elles sont toutes simples (de multiplicité 1), il n'y a pas de problème. Sinon, on doit étudier le sous-espace propre. On doit ensuite trouver des vecteurs propres ; ils formeront les colonnes de P.

Une fois que $A = PDP^{-1}$, que vaut A^2 ? A^n ?

Pour le calcul de l'inverse de P, on pourra utiliser la formule

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P} {}^t\tilde{P}$$

Définition 22. Soit M une matrice, on note $M(i,j)$ le déterminant de la matrice obtenue à partir de M en enlevant la ligne i et la colonne j (on parle de **mineur** pour un tel déterminant). On note $\mathrm{Cof}(i,j) = (-1)^{i+j} M(i,j)$ le **cofacteur** d'indice (i,j). La **comatrice de** M, notée $\tilde{P}$ est la matrice des cofacteurs.

Remarque. On retrouve ces différentes notions lorsqu'on développe un déterminant selon une ligne ou une colonne

On pourra pour s'entraîner vérifier la formule du calcul de l'inverse sur des matrices 2×2 ou 3×3.

Indication 22. Exercice   Corrigé On pourra utiliser le fait que $\mathcal{L}(E)$ est isomorphe à $M_n(\mathbb{R})$.

Indication 23. Exercice   Corrigé On commencera par calculer les polynômes caractéristiques...

Indication 24. Exercice   Corrigé Il s'agit du même type de travail que pour l'exercice 21.

3.3 Corrigés

Corrigé 1. Enoncé Indication

On peut raisonner par double inclusion.

Tout d'abord, $F+G$ est un sous-espace vectoriel qui contient clairement F et G, donc leur union. Ainsi, $\text{Vect}(F\cup G)\subset F+G$ ($\text{Vect}(A)$ est le plus petit espace vectoriel contenant A).

D'autre part, $F\subset \text{Vect}(F\cup G)$ et $G\subset \text{Vect}(F\cup G)$ donc $F+G\subset \text{Vect}(F\cup G)$ par stabilité pour $+$. On a donc bien égalité.

Corrigé 2. Enoncé Indication

Raisonnons par analyse-synthèse.

Soit donc f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On cherche $(p,i)\in\mathcal{P}\times\mathcal{I}$ telles que $f=p+i$.

Analyse : Supposons que $f=p+i$ avec $(p,i)\in\mathcal{P}\times\mathcal{I}$.
Utilisons alors les propriétés des fonctions paires et impaires.
On a

$$f(x)=p(x)+i(x)$$
$$f(-x)=p(x)-i(x)$$

Ainsi les seules fonctions possibles sont

$$p(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2} \text{ et } i(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

ce qui donne l'unicité.

Existence : Il suffit de vérifier que p et i ainsi définies sont dans les bons espaces et que $f=p+i$.

Corrigé 3. Enoncé Indication

1. On utilise à nouveau un raisonnement par analyse-synthèse.

   Analyse : Soit $u\in E$, on suppose pouvoir écrire $u=f+g$, $(f,g)\in F\times G$, $g(x)=ax+b$.

   $$u(0)=f(0)+b=b$$
   $$u'(0)=f'(0)+a=a$$

   Ainsi, les seuls candidats pour la décomposition de u sont donc

   $$g(x)=u'(0)x+u(0) \text{ et } f(x)=u(x)-g(x)$$

   Synthèse : Ils restent à vérifier que ceux-ci fonctionnent.

2. Une nouvelle fois, on suppose $u = f + h$ avec $h = a\cos + b\sin$. On a
$$u(0) = f(0) + a = a$$
$$u'(0) = f'(0) + b = b$$
Cela permet de définir f et h à partir de u. On termine comme précédemment.
3. $G \neq H$ est évident. Ils n'ont d'ailleurs que la fonction identiquement nulle en commun. Cela montre qu'il n'y a pas unicité du supplémentaire.

Corrigé 4. Enoncé Indication

1. $$\begin{aligned} f(\lambda(x,y)+\mu(x',y')) &= f((\lambda x+\mu x', \lambda y+\mu y')) \\ &= (\lambda x+\mu x' - (\lambda y+\mu y'), \lambda x+\mu x' + (\lambda y+\mu y')) \\ &= \lambda(x-y, x+y) + \mu(x'-y', x'+y') \\ &= \lambda f(x,y) + \mu f(x',y') \end{aligned}$$
2. Si $(x,y) \in \ker f$, $x - y = 0 = x + y$, ce qui implique $(x,y) = (0,0)$. f est donc injective.
3. Pour cette question, ou bien on essaie à la main. On prend $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, et on fait une analyse-synthèse. Si $u = x - y$ et $v = x + y$, on obtient
$$x = \frac{u+v}{2} \text{ et } y = \frac{v-u}{2}$$
Cela montre que tout le monde est dans l'image et donc que f est surjective. Sinon, **beaucoup plus rapide et plus efficace**, grâce au théorème du rang et la question précédente, on sait que $\dim \mathrm{Im} f = 2$, mais $\mathrm{Im} f \subset \mathbb{R}^2$, donc (par égalité des dimensions), ces ensembles sont égaux.

Corrigé 5. Enoncé Indication

Tout d'abord, si f est la projection sur F parallèlement à G, considérons $x = f + g$ dans E, on a :
$$\begin{aligned} f \circ f(x) &= f(a) \\ &= a \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Réciproquement, supposons $f^2 = f$, et montrons pour commencer que $E = \ker f \oplus \mathrm{Im} f$.

Une analyse permet rapidement d'aboutir à l'unique décomposition $x = x - f(x) + f(x)$ avec $x - f(x) \in \ker f$ et $f(x) \in \mathrm{Im} f$.

La synthèse est alors immédiate, et on s'aperçoit que f est donc la projection sur $\mathrm{Im} f$ parallèlement à $\ker f$.

Corrigé 6. Enoncé Indication

Le sens droite-gauche est clair.

Supposons $\ker f = \ker g$. On peut supposer f non indentiquement nulle (ce cas est évident car alors $g = 0$ aussi).

Fixons $a \notin \ker f$. Dans ce cas $E = \ker f \oplus \mathbb{K}a$ car la décomposition de x quelconque dans E s'écrit :

$$x = \left(x - \frac{f(x)}{f(a)}a\right) + \frac{f(x)}{f(a)}a$$

et $\mathbb{K}a \cap \ker f = \{0\}$.

Comme $\ker f = \ker g$, $g(x - \frac{f(x)}{f(a)}a) = 0$, d'où

$$g(x) = \frac{g(a)}{f(a)}f(x)$$

Corrigé 7. Enoncé Indication

$\mathrm{Im} f \subset \mathbb{R}$. Or, les seuls sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}$ sont $\{0\}$ et lui-même. f est donc ou bien nulle ou bien surjective.

Corrigé 8. Enoncé Indication

1. Soit $x \in E_n$, cela signifie $f^n(x) = 0$, mais alors $f^{n+1}(x) = f(f^n(x)) = f(0) = 0$ donc $x \in E_{n+1}$.
2. Soit $n \geqslant p$, et soit $x \in E_{n+1}$, $f^{n+1}(x) = f^{p+1}(f^{n-p}(x)) = 0$, donc $f^{n-p}(x) \in E_{p+1} = E_p$ par hypothèse, donc $f^p(f^{n-p}(x)) = 0 = f^n(x)$, d'où $x \in E_n$.

Corrigé 9. Enoncé Indication

1. $$\begin{aligned}\varphi(\lambda f + \mu g)(x) &= x(\lambda f + \mu g)(x)\\ &= x(\lambda f(x) + \mu g(x))\\ &= \lambda x f(x) + \mu x g(x)\\ &= (\lambda\varphi(f) + \mu\varphi(g))(x)\end{aligned}$$
2. Si $f \in \ker\varphi$, $\forall x, xf(x) = 0$, mais alors $\forall x \neq 0, f(x) = 0$ et donc $f(0) = 0$ par continuité de f. Finalement $\ker f = \{0\}$.

   Pour déterminer l'image, on va procéder par analyse-synthèse. Si $f \in \mathrm{Im} f$, $\exists g, \varphi(g) = f$. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = xg(x)$. Ainsi, $f(0) = 0$ et f est dérivable en 0. Définissons alors

   $$H = \{f \in E | f(0) = 0 \text{ et } f \text{ dérivable en } 0\}$$

On a Im$f \subset H$ Réciproquement, soit $f \in H$, définissons

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ f'(0) \text{ si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

On a bien $g \in E$ et $\varphi(g) = f$. Donc $H = \text{Im}f$.

Corrigé 10. Enoncé Indication

S'il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tels que $af + bg + ch + di = 0$, en évaluant en 0, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{-\pi}{2}$ et π, on obtient :

$$\begin{cases} a & = 0 \\ b + d\dfrac{\pi}{2} & = 0 \\ -b + d\dfrac{\pi}{2} & = 0 \\ -a - c\pi & = 0 \end{cases}$$

Cela donne très rapidement $(a, b, c, d) = (0, 0, 0, 0)$.

Corrigé 11. Enoncé Indication

1. Il faut montrer que pour toute famille finie $(a_1, \ldots, a_n)$ de réels deux à deux distincts, la famille $(f_{a_1}, \ldots, f_{a_n})$ est libre. On raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe $(a_1, \ldots, a_n)$ distincts et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ tels que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_{a_i} = 0$$

avec tous les λ_i non nuls.
Cela donne par exemple

$$-\lambda_1 f_{a_1} = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i f_{a_i}$$

Le membre de droite est dérivable en a_1, mais pas le membre de gauche, d'où la contradiction.

2. Comme pour la première question, on raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe $(a_1, \ldots, a_n)$ distincts et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ tels que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_{a_i} = 0$$

avec tous les λ_i non nuls.

Supposons (quitte à renuméroter) que le plus grand des a_i est a_1.
On a

$$-\lambda_1 f_{a_1} = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i f_{a_i}$$

Factorisons par $e^{-a_1 x}$, cela devient, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$-\lambda_1 = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i e^{(a_i - a_1)x}$$

Ainsi, le membre de droite tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$, mais pas le membre de gauche, d'où la contradiction.

Corrigé 12. Enoncé Indication

Notons $b' = (e_1, \ldots, e_r)$ et $b'' = (e_{r+1}, \ldots, e_n)$, et montrons que $b = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $E = F \oplus G$.

Tout d'abord, b est une famille génératrice. En effet, soit $x \in E$, il s'écrit $x = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$. Mais alors f est engendré par les r premiers e_i et g par les $n - r$ suivants. On peut donc écrire x comme une combinaison linéaire des élements de b.

Ensuite, montrons que b est libre. Supposons

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0 = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i e_i + \sum_{i=r+1}^{n} \lambda_i e_i$$

Comme F et G sont en somme directe, les deux sommes sont nulles. Mais alors, chacun des λ_i est nul. En effet, pour les r premiers, ils sont les coefficients d'une combinaison linéaire nulle des $(e_i)_{i=1\ldots r}$ qui forment une famille libre, en tant que base de F. De même pour les $n - r$ suivants.

Corrigé 13. Enoncé Indication

Soit $b = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, et posons $x = \sum e_i$. Par hypothèse, $\forall i, \exists \lambda_i, u(e_i) = \lambda_i e_i$, et $\exists \lambda, u(x) = \lambda_x x$. Mais alors

$$u(x) = u(\sum e_i) = \sum u(e_i) = \sum \lambda_i e_i = \lambda_x x = \sum \lambda_x e_i$$

Mais comme b est une base, elle est en particulier libre et $\forall i, \lambda_x = \lambda_i$.
Ainsi, u coïncide avec l'homothétie λId sur une base de E, donc $u = \lambda Id$.

Corrigé 14. Enoncé Indication

1. Tout d'abord, on peut facilement démontrer (le faire si on n'est pas convaincu) que
$$f^2 = 0 \Rightarrow \mathrm{Im} f \subset \ker f$$
Or, d'après le théorème du rang, $\dim \mathrm{Im} f + \dim \ker f = 3$, donc $\mathrm{Rg} f \in \{0, 1\}$, mais $f \neq 0$, donc son rang vaut 1.

2. Montrons d'abord que le rang de g vaut 1 ou 2. En effet, il ne peut pas valoir 0 car $g \neq 0$, ni 3 car g serait alors bijectif, et on ne pourrait pas avoir $g^3 = 0$. Supposons que $\mathrm{Rg} g = 1$, alors $\mathrm{Im} g = \mathrm{Vect} y$. De plus, $g(y) \neq 0$, sinon on aurait $g^2 = 0$. Donc il existe $\lambda \neq 0$ tel que $g(y) = \lambda y$. Mais alors, $g^3(y) = \lambda^3 y \neq 0$, d'où une contradiction. On conclut donc $\mathrm{Rg} g = 2$.

Corrigé 15. Enoncé Indication

1. Cette question est laissée au lecteur.

2. Soit $P \in \ker \varphi$. On a donc $P(X+1) = P(X)$ (Quand est-ce qu'un polynôme est périodique ?). On est dans $\mathbb{C}$, donc si P est de degré supérieur ou égal à 1, il admet une racine que l'on note α, mais alors, $P(\alpha+1) = P(\alpha) = P(\alpha+n)$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$. P admet donc une infinité de racines, ce qui fournit une contradiction.

   Ainsi, P est constant. Réciproquement, les polynômes constants sont bien dans le noyau de φ.
$$\ker \varphi = \mathbb{C}$$

3. On constate que φ fait perdre un degré au polynôme. Ainsi, $\mathrm{Im}\varphi \subset \mathbb{C}_{n-1}[X]$. De plus, d'après la question précédente et le théorème du rang, on a $\dim \mathrm{Im}\varphi = n = \dim \mathbb{C}_{n-1}[X]$.

   Ces deux ensembles sont donc égaux.

Corrigé 16. Enoncé Indication

1. (a) Commençons par des remarques élémentaires : la matrice est non nulle donc $\mathrm{rg}(A) \geqslant 1$ et comme il y a $p = 4$ lignes et $n = 3$ colonnes alors $\mathrm{rg}(A) \leqslant \min(n, p) = 3$.

   (b) Ensuite on va montrer $\mathrm{rg}(A) \geqslant 2$ en effet le sous-déterminant 2×2 (extrait du coin en haut à gauche) : $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$ est non nul.

   (c) Montrons que $\mathrm{rg}(A) = 2$. Avec les déterminants il faudrait vérifier que pour toutes les sous-matrices 3×3 les déterminants sont nuls. Pour éviter de nombreux calculs on remarque ici que les colonnes sont liées par la relation $v_2 = v_1 + v_3$. Donc $\mathrm{rg}(A) = 2$.

(d) L'application linéaire associée à la matrice A est l'application $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$. Et le théorème du rang $\dim\ker f_A + \dim \mathrm{Im} f_A = \dim \mathbb{R}^3$ donne ici $\dim\ker f_A = 3 - \mathrm{rg}(A) = 1$.

Mais la relation $v_2 = v_1 + v_3$ donne immédiatement un élément du noyau : en écrivant $v_1 - v_2 + v_3 = 0$ alors $A\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ Donc $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \in \ker f_A$. Et comme le noyau est de dimension 1 alors

$$\ker f_A = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

(e) Pour un base de l'image, qui est de dimension 2, il suffit par exemple de prendre les deux premiers vecteurs colonnes de la matrice A (ils sont clairement non colinéaires) :

$$\mathrm{Im} f_A = \mathrm{Vect}\{v_1, v_2\} = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\5\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

2. On fait le même travail avec B et f_B.

(a) Matrice non nulle avec 4 lignes et 4 colonnes donc $1 \leqslant \mathrm{rg}(B) \leqslant 4$.

(b) Comme le sous-déterminant (du coin supérieur gauche) $\begin{vmatrix}2 & 2\\4 & 3\end{vmatrix} = -2$ est non nul alors $\mathrm{rg}(B) \geqslant 2$.

(c) Et pareil avec le sous-déterminant 3×3 :

$$\begin{vmatrix}2 & 2 & -1\\4 & 3 & -1\\0 & -1 & 2\end{vmatrix} = -2$$

qui est non nul donc $\mathrm{rg}(B) \geqslant 3$.

(d) Maintenant on calcule le déterminant de la matrice B et on trouve $\det B = 0$, donc $\mathrm{rg}(B) < 4$. Conclusion $\mathrm{rg}(B) = 3$. Par le théorème du rang alors $\dim\ker f_B = 1$.

(e) Cela signifie que les colonnes (et aussi les lignes) sont liées, comme il n'est pas clair de trouver la relation à la main on résout le système

$BX=0$ pour trouver cette relation ; autrement dit :

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 7 \\ 4 & 3 & -1 & 11 \\ 0 & -1 & 2 & -4 \\ 3 & 3 & -2 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou encore} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 2x+2y-z+7t & = & 0 \\ 4x+3y-z+11t & = & 0 \\ -y+2z-4t & = & 0 \\ 3x+3y-2z+11t & = & 0 \end{array} \right.$$

Après résolution de ce système on trouve que les solutions s'écrivent $(x,y,z,t) = (-\lambda, -2\lambda, \lambda, \lambda)$. Et ainsi

$$\ker f_B = \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Et pour une base de l'image il suffit, par exemple, de prendre les 3 premiers vecteurs colonnes v_1, v_2, v_3 de la matrice B, car ils sont linéairement indépendants :

$$\mathrm{Im} f_B = \mathrm{Vect}\,\{v_1, v_2, v_3\} = \mathrm{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

Corrigé 17. Enoncé Indication

$$\begin{aligned} \lambda \text{ valeur propre de } u &\iff u - \lambda Id \text{ non injectif} \\ &\iff u - \lambda Id \text{ non bijectif} \\ &\iff \det(u - \lambda Id) = 0 \\ &\iff \chi_u(\lambda) = 0 \end{aligned}$$

Corrigé 18. Enoncé Indication

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Corrigé 19. Enoncé Indication

1. Si $\lambda = 0$ est valeur propre de A, alors $\ker A \neq \{0\}$, donc A n'est pas injective et sa matrice n'est pas inversible, d'où la contradiction.

2. Comme A est inversible et $\lambda \neq 0$, on a

$$\begin{aligned} A\vec{x} = \lambda\vec{x} &\Longleftrightarrow A^{-1}(A\vec{x}) = A^{-1}(\lambda\vec{x}) \\ &\Longleftrightarrow \vec{x} = \lambda A^{-1}\vec{x} \\ &\Longleftrightarrow \frac{1}{\lambda}\vec{x} = A^{-1}\vec{x} \end{aligned}$$

Corrigé 20. Enoncé Indication

1. Montrons que u n'est pas inversible.
   On a : $0 = \det u^n = (\det u)^n$, d'où $\det u = 0$, ce qui prouve que u n'est pas inversible.
2. Déterminons les valeurs propres de u et les sous-espaces propres associés.
   Soit λ une valeur propre de u, il existe alors un vecteur $x \in E$ non nul tel que $u(x) = \lambda x$. Or, $u(x) = \lambda x \Rightarrow u^n(x) = \lambda^n x$. Mais, $u^n(x) = 0$ et $x \neq 0$, d'où $\lambda^n = 0$ et donc $\lambda = 0$. La seule valeur propre possible de u est donc 0 et c'est une valeur propre car, comme u n'est pas inversible, le noyau de u n'est pas réduit à $\{0\}$. L'endomorphisme u admet donc 0 comme unique valeur propre, le sous-espace propre associé est $\ker u$.

Corrigé 21. Enoncé Indication

On rappelle

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Soit P_A le polynôme caractéristique de A, on a

$$\begin{aligned} P_A(X) = \begin{vmatrix} 3-X & 0 & -1 \\ 2 & 4-X & 2 \\ -1 & 0 & 3-X \end{vmatrix} &= (4-X)\begin{vmatrix} 3-X & -1 \\ -1 & 3-X \end{vmatrix} \\ &= (4-X)(X^2-6X+8) \\ &= (4-X)(X-4)(X-2) \\ &= (2-X)(4-X)^2 \end{aligned}$$

2. Le polynôme P_A admet deux racines, donc la matrice A admet deux valeurs propres, $\lambda_1 = 2$, valeur propre simple et $\lambda_2 = 4$, valeur propre double. Déterminons les sous-espaces propres associés.
   Notons $E_1 = \{\vec{V} = (x, y, z)/A\vec{V} = 2\vec{V}\}$, on résout alors le système

$$\left\{ \begin{aligned} 3x - z &= 2x \\ 2x + 4y + 2z &= 2y \\ -x + 3z &= 2z \end{aligned} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{aligned} z &= x \\ y &= -2x \end{aligned} \right.$$

Le sous-espace propre E_1 associé à la valeur propre 2 est une droite vectorielle, dont un vecteur directeur est $\vec{e_1} = (1, -2, 1)$.
Notons $E_2 = \{\vec{V} = (x, y, z)/A\vec{V} = 4\vec{V}\}$, on résout alors le système

$$\begin{cases} 3x - z = 4x \\ 2x + 4y + 2z = 4y \\ -x + 3z = 4z \end{cases} \iff z = -x$$

Le sous-espace propre E_2 associé à la valeur propre 4 est le plan vectoriel, d'équation $z = -x$ dont une base est donnée, par exemple par les vecteurs $\vec{e_2} = (0, 1, 0)$ et $\vec{e_3} = (1, 0, -1)$. Remarquons que l'on pouvait lire directement sur la matrice A, le fait que le vecteur $\vec{e_2}$ est vecteur propre associé à la valeur propre 4.
Les dimensions des sous-espaces propres sont égales aux multiplicités des valeurs propres correspondantes, par conséquent, l'espace $\mathbb{R}^3$ admet une base de vecteurs propres et la matrice A est diagonalisable.
Notons P la matrice de passage, on a

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et, si D est la matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

on a la relation

$$A = PDP^{-1}.$$

3. La matrice A est diagonalisable, donc son polynôme minimal n'a que des racines simples, par ailleurs les racines du polynôme minimal sont exactement les valeurs propres de A et le polynôme minimal est un polynôme unitaire qui divise le polynôme caractéristique. On a donc

$$Q_A(X) = (X - 2)(X - 4)$$

4. On a vu, dans la question 2), que $A = PDP^{-1}$, on a donc, pour $n \in \mathbb{N}$, $A^n = P^{-1}D^nP$, or

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}$$

il nous reste à calculer P^{-1}. On sait que $P^{-1} = \frac{1}{\det P}{}^t\tilde{P}$ (avec $\tilde{P}$ la comatrice de P, cf l'indication pour plus d'explications), d'où

$$\det P = -2,\ \tilde{P} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a donc

$$\begin{aligned} A^n &= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2^n+4^n & 0 & 2^n-4^n \\ 2(4^n-2^n) & 2.4^n & 2(4^n-2^n) \\ 2^n-4^n & 0 & 2^n+4^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Corrigé 22. Enoncé Indication

$\mathcal{L}(E)$ est isomorphe à $M_n(\mathbb{R})$ donc est de dimension finie n^2. La famille $\{id_E, \varphi, \dots, \varphi^{n^2}\}$ compte n^2+1 vecteurs donc est liée c'est à dire : il existe $\lambda_0, \dots, \lambda_{n^2}$ dans $\mathbb{R}$, non tous nuls et tels que $\lambda_0 id_E + \lambda_1\varphi + \cdots + \lambda_{n^2}\varphi^{n^2} = 0$. Le polynôme $P(X) = \lambda_0 + \lambda_1 X + \cdots + \lambda_{n^2}X^{n^2}$ répond donc à la question.

Corrigé 23. Enoncé Indication

- A est triangulaire inférieure donc ses valeurs sont ses coefficients diagonaux : 1, 2 et 3. A a trois valeurs propres distinctes donc A est diagonalisable.
- $\chi_B = -(X-1)(X+1)^2$. $B+I = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, donc $\mathrm{rg}(B+I) = 2$, $\dim(\ker B+I) = 1 < 2$ donc B n'est pas diagonalisable.

  $\chi_B(B) = 0$ donc $B(B^2+B-I) = I$, soit $B^{-1} = B^2+B-I = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

Corrigé 24. Enoncé Indication

1. Les valeurs propres de M sont les réels λ tels que $\det(M-\lambda Id) = 0$.

$$\begin{aligned} \det(M-\lambda Id) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 7 & -\lambda & 6 \\ 0 & 0 & 3 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^4 - 13\lambda^2 + 36 \\ &= (\lambda^2-4)(\lambda^2-9) \\ &= (\lambda-2)(\lambda+2)(\lambda-3)(\lambda+3) \end{aligned}$$

Les valeurs propres de M sont donc $2, -2, 3$ et -3. Notons E_2, E_{-2}, E_3 et E_{-3} les sous-espaces propres associés.

$$\begin{aligned} E_2 &= \{X \in \mathbb{R}^4, MX = 2X\} \\ &= \Big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, y = 2x, 2x - z = 2y, 7y + 6t = 2z, 3z = 2t\Big\} \end{aligned}$$

$$\text{or } \begin{cases} y = 2x \\ 2x - z = 2y \\ 7y + 6t = 2z \\ 3z = 2t \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x \\ 2x - z = 4x \\ 14x + 9z = 2z \\ 3z = 2t \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x \\ z = -2x \\ t = -3x \end{cases}$$

ainsi, E_2 est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $u_1 = (1, 2, -2, -3)$.

$$\begin{aligned} E_{-2} &= \{X \in \mathbb{R}^4, MX = -2X\} \\ &= \Big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, y = -2x, 2x - z = -2y, 7y + 6t = -2z, 3z = -2t\Big\} \end{aligned}$$

$$\text{or } \begin{cases} y = -2x \\ 2x - z = -2y \\ 7y + 6t = -2z \\ 3z = -2t \end{cases} \iff \begin{cases} y = -2x \\ 2x - z = 4x \\ -14x - 9z = 2z \\ 3z = -2t \end{cases} \iff \begin{cases} y = -2x \\ z = -2x \\ t = 3x \end{cases}$$

ainsi, E_{-2} est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $u_2 = (1, -2, -2, 3)$.

$$\begin{aligned} E_3 &= \{X \in \mathbb{R}^4, MX = 3X\} \\ &= \Big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, y = 3x, 2x - z = 3y, 7y + 6t = 3z, 3z = 3t\Big\} \end{aligned}$$

$$\text{or } \begin{cases} y = 3x \\ 2x - z = 3y \\ 7y + 6t = 3z \\ 3z = 3t \end{cases} \iff \begin{cases} y = 3x \\ 2x - z = 9x \\ 21x + 6t = 3z \\ z = t \end{cases} \iff \begin{cases} y = 3x \\ z = -7x \\ t = -7x \end{cases}$$

ainsi, E_3 est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $u_3 = (1, 3, -7, -7)$.

$$\begin{aligned} E_{-3} &= \{X \in \mathbb{R}^4, MX = -3X\} \\ &= \Big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, y = -3x, 2x - z = -3y, 7y + 6t = -3z, 3z = -3t\Big\} \end{aligned}$$

$$\text{or } \begin{cases} y = -3x \\ 2x - z = -3y \\ 7y + 6t = -3z \\ 3z = -3t \end{cases} \iff \begin{cases} y = -3x \\ 2x - z = 9x \\ -21x - 6z = -3z \\ z = -t \end{cases} \iff \begin{cases} y = -3x \\ z = -7x \\ t = 7x \end{cases}$$

ainsi, E_{-3} est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $u_4 = (1, -3, -7, 7)$.

2. La matrice M admet quatre valeurs propres distinctes, ce qui prouve que les quatres vecteurs propres correspondants sont linéairement indépendants. En effet, les vecteurs u_1, u_2, u_3 et u_4 déterminés en 1) forment une base de $\mathbb{R}^4$. L'endomorphisme dont la matrice est M dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est représenté par une matrice diagonale dans la base (u_1, u_2, u_3, u_4) puisque $Mu_1 = 2u_1, Mu_2 = -2u_2$, $Mu_3 = 3u_3$ et $Mu_4 = -3u_4$.
3. Une base de vecteurs propres a été déterminée dans les questions précédentes. C'est la base (u_1, u_2, u_3, u_4) et la matrice de passage est la matrice
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ -2 & -2 & -7 & -7 \\ -3 & 3 & -7 & 7 \end{pmatrix}$$
4. On a $D = P^{-1}MP$, pour $k \in \mathbb{N}$ exprimons M^k en fonction de D^k, puis calculons M^k.
On a
$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ donc } D^k = \begin{pmatrix} 2^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-3)^k \end{pmatrix}.$$
Mais, $M = PDP^{-1}$, d'où, pour $k \in \mathbb{N}$, $M^k = (PDP^{-1})^k = PD^kP^{-1}$.
Pour calculer M^k, il faut donc déterminer la matrice P^{-1} qui exprime les coordonnées des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ dans la base (u_1, u_2, u_3, u_4).
On résout le système, et on a :
$$\begin{aligned} u_1 &= i + 2j - 2k - 3l \\ u_2 &= i - 2j - 2k + 3l \\ u_3 &= i + 3j - 7k - 7t \\ u_4 &= i - 3j - 7k + 7l \end{aligned} \iff \begin{cases} i = \dfrac{1}{10}(7u_1 + 7u_2 - 2u_3 - 2u_4) \\ j = \dfrac{1}{10}(7u_1 - 7u_2 - 3u_3 + 3u_4) \\ k = \dfrac{1}{10}(u_1 + u_2 - u_3 - u_4) \\ l = \dfrac{1}{10}(3u_1 - 3u_2 - 2u_3 + 2u_4) \end{cases}$$
d'où
$$P^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 7 & 7 & 1 & 3 \\ 7 & -7 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

et

$$M^k = PD^kP^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ -2 & -2 & -7 & -7 \\ -3 & 3 & 7 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-3)^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 7 & 1 & 3 \\ 7 & -7 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$