Ecole Polytechnique
Formation préparatoire - Mathématiques

Espaces euclidiens et hermitiens.

Définitions. Soit E un espace vectoriel sur $K = \mathbb{R}$. Soit $\beta : E \times E \to \mathbb{R}$.
1) On dit que β est une **forme bilinéaire** si, pour tout $x \in E$ alors $y \to \beta(x, y)$ est linéaire, et pour tout $y \in E$ alors $x \to \beta(x, y)$ est linéaire.
2) β est dite **symétrique** si , pour tout $(u, v) \in E^2$, on a $\beta(u, v) = \beta(v, u)$.
3) Soit β une forme bilinéaire symétrique sur E. On dit que c'est un **produit scalaire** si β est **définie positive**, c'est-à-dire pour tout $u \in E$, on a $\beta(u, u) \geq 0$ et $\beta(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$.
Un espace vectoriel de **dimension finie** sur $\mathbb{R}$ muni d'un produit scalaire est appelé **espace euclidien**.

Définitions. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Soit $\beta : E \times E \to \mathbb{C}$.
1) On dit que β est une **forme sesquilinéaire** si pour tout $y \in E$ alors $x \to \beta(x, y)$ est linéaire et si pour tout $x \in E$ alors $y \to \beta(x, y)$ est **anti-linéaire**, c'est-à-dire pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a $\beta(x, \lambda y) = \overline{\lambda}\beta(x, y)$.
2) β est dite **hermitienne** si , pour tout $(u, v) \in E^2$, on a $\beta(u, v) = \overline{\beta(v, u)}$.
3) Soit β une forme hermitienne sur E. On dit que c'est un **produit hermitien (ou produit scalaire hermitien)** si β est **définie positive**, c'est-à-dire pour tout $u \in E$, on a $\beta(u, u) \geq 0$ et $\beta(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

Un espace vectoriel de **dimension finie** sur $\mathbb{C}$ muni d'un produit scalaire hermitien est appelé **espace hermitien**.

Un espace vectoriel sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ muni d'un produit scalaire est appelé **espace préhilbertien** lorsqu'il est de **dimension infinie**.

Dans toute la suite, E est un espace vectoriel de **dimension finie** n sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ muni d'un produit scalaire (hermitien) noté $< \, , \, >$.

Deux vecteurs u et v sont dit **orthogonaux** si $< u, v >= 0$.
Une famille $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de vecteurs de E est dite **orthogonale** si $< e_i, e_j >= 0$.
Elle est dite **orthonormée** ou **orthonormale** si elle est orthogonale et si ,pour tout i, on a $\|e_i\| = 1$.

Propriétés.
1) Inégalité de Cauchy-Schwarz : $|< u, v >| \leq \|u\| \, \|v\|$

On définit une **norme** sur E en posant $\|u\| = \sqrt{< u, u >}$.

2) $2\mathcal{R}e < u, v >= \|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2$
3) Théorème de Pythagore : $\mathcal{R}e < u, v >= 0 \Leftrightarrow \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$
4) Comme E est de **dimension finie** alors E possède une base orthonormée.
5) Soit F un sous-espace vectoriel de E.
On appelle **orthogonal de** F l'espace $F^\perp = \{u \in E; \text{ pour tout } x \in F \text{ on a } < u, x >= 0\}$.
Comme E **est de dimension finie** alors on a $F \oplus F^\perp = E$ et $(F^\perp)^\perp = F$.
Ces 2 propriétés ne sont plus vraies en général si E **est de dimension infinie**.

Théorème. Pour tout $f \in E^*$, il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que, pour tout $y \in E$ alors $f(y) =< a, y >$.

Proposition et définition. Soit $f : E \to E$ un endomorphisme de E. Il existe un unique endomorphisme de E vérifiant, pour tout x et y dans E la propriété : $< f(x), y >=< x, f^*(y) >$. L'endomorphisme f^* s'appelle **l'adjoint** de f.

Si A est la matrice de f dans une base **orthonormée** alors la matrice de f^* dans cette même base est ${}^t\overline{A}$.
Si $V \subset E$ est un sous-espace de E stable par f alors $V^\perp$ est stable par f^*